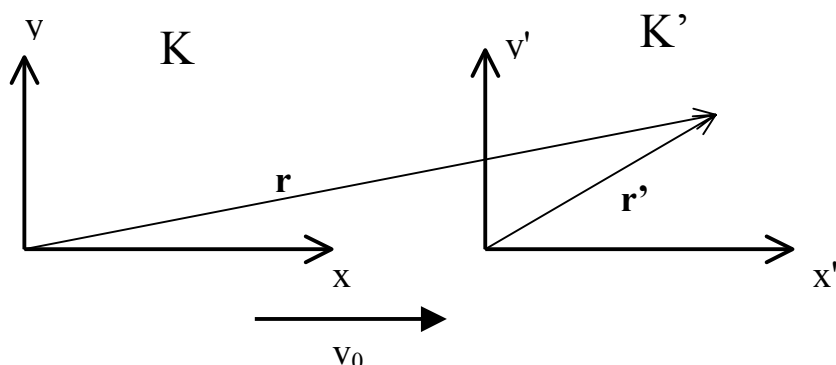


Anyag az emelt szintű képzéshez

Galilei-transzformáció és a Galilei-féle relativitás. Összehasonlítás az Einstein-féle relativitási elvvel.



Vegyük két Descartes-féle koordináta-rendszert. K és K' tengelyei $t = 0$ -kor egybeesnek, K' az x tengely irányába mozog állandó v_0 sebességgel. Ha egy tömegpont helyét az x, y, z koordináták adják meg a K rendszerben, x', y', z' pedig a K' rendszerben, akkor

$$\begin{aligned}x' &= x - v_0 t \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}\tag{1}$$

Ezek a Galilei-transzformáció egyenletei. Az utolsó összefüggés azt jelenti, hogy az idő mindkét rendszerben azonos, a klasszikus mechanikában egységes világidő van.

A K koordináta-rendszer meghatároz egy R vonatkoztatási rendszert, a K' pedig egy R' vonatkoztatási rendszert. A két vonatkoztatási rendszer egymáshoz képest v_0 állandó sebességű egyenesvonalú egyenletes transzlációt végez. R-ben a tömegpont sebessége $\mathbf{v}$, R'-ben $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$. Ez a sebességösszeadás klasszikus formulája, ami közvetlen következménye a Galilei-transzformációnak. A tömegpont gyorsulása a két rendszerben egyenlő: $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$, mert v_0 állandó. Ezért a mozgásegyenlet invariáns a Galilei-transzformációra, azaz

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} = m\mathbf{a}'\tag{2}$$

Az erő ugyanis, mint a környezetnek a pontra gyakorolt hatásának mértéke, nem függ a vonatkoztatási rendszertől.

Mivel minden mechanikai probléma visszavezethető a tömegpont mozgásegyenletére, ezzel bebizonyítottuk a Galilei-féle relativitási elvet: **mechanikai szempontból az egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes transzlációt végző vonatkoztatási rendszerek egyenértékűek.** Ha R inerciarendszer, akkor R' is inerciarendszer.

(Megjegyzés: Ha R az I inerciarendszerhez képest forog, és R' R-hez képest egyenesvonalú egyenletes transzlációt végez, akkor R' ugyanazon tengely körül ugyanolyan szögsebességgel forog I-hez képest, mint R.)

Ha ma (jelző nélkül) relativitáselvről beszélünk, akkor az Einstein-féle relativitáselvet értjük alatta. Ez annyiban általánosabb, mint a Galilei-féle, hogy a két rendszer egyenértékűségét nemcsak a mechanika szempontjából, hanem általában, minden fizikai szempontból mondja ki. Az Einstein-féle relativitáselméletben a Galilei-transzformáció helyébe a Lorentz-transzformáció lép. Ellentétben a Galilei-transzformációval, itt az idő a két rendszerben nem azonos, nincs egységes világidő, hanem minden inerciarendszerhez külön rendszeridő tartozik. Az Einstein-féle relativitáselméletnek számos olyan következménye van, ami a klasszikus szemléletünkkel ellentétes (az egyidejűség relatív, mozgó rendszerben a távolságok lerövidülnek, az időtartamok meghosszabbodnak, a sebességösszeadás klasszikus képlete nem alkalmazható, stb.).

Hamiltoni mechanika

Általánosított koordináták. Általánosított impulzusok, Hamilton formalizmus. A harmonikus oszcillátor és a rotátor tárgyalása Hamilton-formalizmusban.

Koordinátatranszformációk, görbevonaltú koordináták – ld. Jegyzetkiegészítés.

Egy tömegpont helyét görbevonaltú koordinátarendszerben három koordináta adja meg. Általában egy f szabadsági fokú mechanikai rendszer helyét, helyzetét f általánosított koordinátával adhatjuk meg: $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_f)$.

Tekintsünk egy f szabadsági fokú konzervatív mechanikai rendszert, amelynek potenciális energiája E_{pot} , kinetikus energiája E_{kin} . Az előbbi az általános koordináták függvénye, az utóbbiról tételezzük fel, hogy a $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ általánosított sebességektől négyzetesen függ.

Definiáljuk a q_i koordinátához rendelt általánosított impulzust, p_i -t a következőképpen:

$$p_i = \frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial \dot{q}_i} \quad (3)$$

Ebből kifejezhetők az általános sebességek az általános koordináták függvényeként.

A rendszer Hamilton-függvényét megkapjuk, ha a mechanikai energiát kifejezzük mint az általános koordináták és impulzusok függvényét:

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}. \quad (4)$$

A Hamilton-függvény segítségével megadhatók a

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (5)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (6)$$

Hamilton-egyenletek, ezek a rendszer mozgásegyenletei, amelyek egyenértékűek a newtoni mozgásegyenletekkel. Az általános koordináták és impulzusok $2f$ dimenziós terét a rendszer fázisterének nevezzük. A fázistér minden pontja tekinthető kezdeti feltételnek: ha megadjuk a kezdeti koordinátákat és impulzusokat, akkor a rendszer további fejlődése a mozgásegyenletekből egyértelműen kiadódik. A fázistér minden pontján egy és csak egy trajektória megy át, ez a mechanikai determinizmus.

A Hamilton-egyenletek megoldása nélkül is könnyen látható, hogy H értéke a mozgás közben állandó

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E_0 \text{ (konstans: a mechanikai energia kezdeti értéke)} \quad (7)$$

A mechanikai energia megmaradási tétele következtében tehát a fázistérben minden trajektória rajta van egy állandó energiájú szintfelületen, az energia értékét a kezdeti feltételek határozzák meg.

A harmonikus oszcillátor

Kiindulunk a harmonikus oszcillátornak a newtoni mechanikából már ismert formuláiból, és eljutunk a Hamilton-függvényhez és a harmonikus oszcillátor hamiltoni tárgyalásához.

A harmonikus oszcillátor szabadsági foka 1, legyen a koordináta $q = x$, a sebesség így: $\dot{q} = \dot{x}$.

A kinetikus és a potenciális energia a newtoni mechanikából ismert:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} k q^2 \quad E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad (8)$$

Hogy innen a Hamilton formalizmushoz eljussunk, be kell vezetnünk a kanonikus impulzust:

$$p = \frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad (9)$$

(Látható, hogy ez most éppen a közönséges impulzus.)

A fentiek alapján a Hamilton-függvény:

$$H(q,p) = \frac{1}{2} p^2/m + \frac{1}{2} kq^2, \quad (10)$$

a Hamilton-egyenletek pedig:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad (11)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \quad (12)$$

(Az utóbbi egyenlet éppen az impulzustétel.)

A Hamilton-egyenletek önmagukban a harmonikus oszcillátor teljes leírását adják, korábbi ismeretek nem szükségesek.

A $H = E_0$ (konst) összefüggés (a mechanikai energia megmaradása) most ($f = 1$ esetén) közvetlenül a trajektóriák egyenletét adja meg a fázistérben:

$$\frac{k}{2} q^2 + \frac{p^2}{2m} = E_0 \text{ (állandó)} \quad (13)$$

A trajektóriák tehát origó középpontú ellipszisek:

$$\left(\frac{q}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2 = 1, \quad \text{ahol } a = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}, \quad b = \sqrt{2mE_0}. \quad (14)$$

Az időfüggést a Hamilton-egyenletek megoldása adja. A mozgás időben periodikus, a harmonikus rezgés periódusideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (15)$$

tehát csak a rendszer adataitól függ; minden trajektóriára azonos.

Szabad rotátor

Tekintsünk most egy merev testet, ami rögzített tengely körül foroghat. A szabadsági fok 1. Koordinátának most a szöget célszerű választani, az általános sebesség pedig a szögsebesség:

$$q = \alpha, \quad \dot{q} = \dot{\alpha} = \omega \quad (16)$$

A kinetikus energia:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \theta \dot{q}^2, \quad \theta \text{ a tehetetlenségi nyomaték.} \quad (17)$$

Az általános impulzus:

$$p = \frac{\partial E_{\text{kin}}}{\partial \dot{q}} = \theta \dot{q} (= \theta \omega = N), \quad (18)$$

azaz az általános impulzus most éppen az impulzusmomentum.

Ha külső erő nem hat (szabad rotátor), akkor $E_{\text{pot}} = 0$.

A szabad rotátor Hamilton-függvénye:

$$H = p^2/2\theta \quad (19)$$

A Hamilton-egyenletek:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{\theta} \quad (20)$$

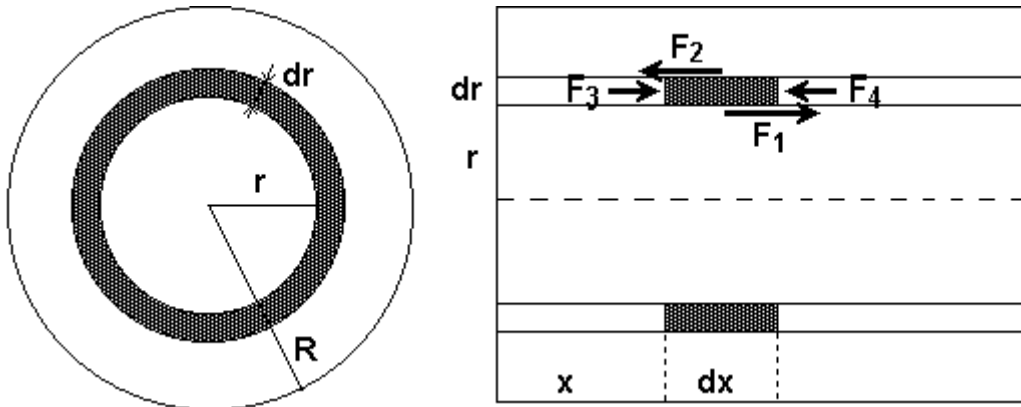
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0 \quad (21)$$

Tehát p állandó (perdületmegmaradás). Ebből jön, hogy a szabad rotátor egyenletes forgómozgást végez állandó, $\omega = p/\theta$ szögsebességgel.

Tenzorok. Jacobi tenzor, dilatációs tenzor. Izotróp rugalmas test: a Hooke-törvény.
Jegyzetkiegészítés

Állandó sűrűségű viszkózus folyadék stacionárius, lamináris áramlása hengeres csőben.

Feltételezzük, hogy az áramlás hengersizmetrikus. Legyen x a cső tengelye, az erre merőleges y, z síkban pedig vezessük be az r, α polárkoordinátákat. Vegyünk egy hengergyűrűt r és $r+dr$ sugarak illetve x és $x+dx$ között. A nyomás x -től függ, a tengely mentén az áramlás irányában csökken, de sugárirányban nem változik, ez kimutatható. A hengergyűrű palástjaira ható nyomóerők eredője zérus (a hengersizmetria miatt). A belső és külső paláston nyíróerők hatnak (a sebesség sugárirányban történő változása miatt), a belső paláston előre (F_1), a külső paláston vissza (F_2), ezek eredője egy előre mutató erő. A hengergyűrű alaplapján és fedőlapján a nyomóerők (F_3, F_4) egy visszafelé mutató eredőt adnak. Ez tart egyensúlyt stacionárius áramlásnál a nyíróerők eredőjével.



$$F_1 = -\eta \frac{dv}{dr} \cdot 2\pi r \, dz \quad (22)$$

$$F_2 = -\eta \left(\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} dr \right) \cdot 2\pi(r+dr) \, dz \quad (23)$$

$$F_1 - F_2 = \eta \left(r \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{dv}{dr} \right) \cdot 2\pi \, dr \, dz \quad (24)$$

$$F_3 = p(x) \cdot 2\pi r \, dr \quad (25)$$

$$F_4 = \left(p(x) + \frac{dp(x)}{dx} dx \right) \cdot 2\pi r \, dr \quad (26)$$

$$F_3 - F_4 = -\frac{dp(x)}{dx} 2\pi r \, dr \, dx \quad (27)$$

$$\begin{aligned} F_1 - F_2 + F_3 - F_4 &= 0 \Rightarrow \\ -\frac{dp(x)}{dx} r + \eta \left(r \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{dv}{dr} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

A kapott differenciálegyenlet szeparálható, a megoldás:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta} \frac{dp(x)}{dx} &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = c \text{ (konst)} \Rightarrow r \frac{dv}{dr} = c/2 r^2 \Rightarrow \\ v &= c/4 (r^2 - R^2) \end{aligned} \quad (29)$$

tehát a sebességprofil parabolikus, legnagyobb a sebesség a cső közepén, falánál zérus.

A csőben a térfogatáramerősség:

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^R 2\pi r \cdot \frac{c}{4} (r^2 - R^2) dr = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{R^4}{\ell} (p_1 - p_2) \quad (30)$$