

# FIZIKA I. MECHANIKA

Ez az anyag azokat a részeket foglalja össze vázlatosan, amelyek az előadás és a vizsga anyagában is szerepelnek, de a Kísérleti Fizika I. ill. a Fizikai alapismeretek c. jegyzetben nem, vagy az előadástól nagyon eltérő módon fordulnak elő.

Erre a két jegyzetre fogunk hivatkozni:

Láng László: *Kísérleti Fizika I.* 60930 (J6-930) /Röviden: KF/

Farkas - Wittmann: *Fizikai Alapismeretek* 60947 (J6-947) /Röviden: FA/

## Mechanika

### 1. Alapfogalmak

A pont modellje közelítésként alkalmazható relatíve kicsi méretű testek mozgásánál. Alkalmazható azonban tetszőleges méretű testek translációs mozgása esetén is. Végül a pontmechanika alkalmazhatóságának egy másik területét jelöli ki a *tömegközéppont tétele*.

### 2. Koordinátarendszerek

#### 2.1. Descartes-féle koordinátarendszer

A háromdimenziós euklideszi térben bevezethető egy Descartes-féle jobbsodrású koordinátarendszer, amelynek egységvektorait szokásosan **i**, **j**, **k**-val, a helyvektort **r**-rel, a helyvektor koordinátáit x, y, z-vel jelöljük. /KF/

Általánosabban az f-dimenziós euklideszi térben a Descartes-féle koordinátarendszer egységvektorait **e<sub>i</sub>**-vel, a helyvektort **x**-szel, koordinátáit x<sub>i</sub>-vel jelöljük:

$$/2.1/ \quad \mathbf{x} = \sum_{i=1}^f x_i \mathbf{e}_i$$

Hasonlóan e térben bármely **a** vektorjellegű fizikai mennyiség ebben a bázisban komponensekre bontható:

$$/2.2/ \quad \mathbf{a} = \sum_{i=1}^f a_i \mathbf{e}_i \quad a_i : \text{a vektor } i\text{-edik komponense,}$$

$a_i \mathbf{e}_i$  : a vektor i-edik vektorkomponense.

A Descartes-rendszer egységvektorai *ortonormált* bázist alkotnak, ami azt jelenti, hogy

$$/2.3/ \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \delta_{ij} : \text{az } f \times f\text{-es egységmátrix elemei.}$$

Ezért a vektorok skaláris szorzata Descartes-rendszerben a komponensek szorzatösszege:

$$/2.4/ \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^f a_i b_i ,$$

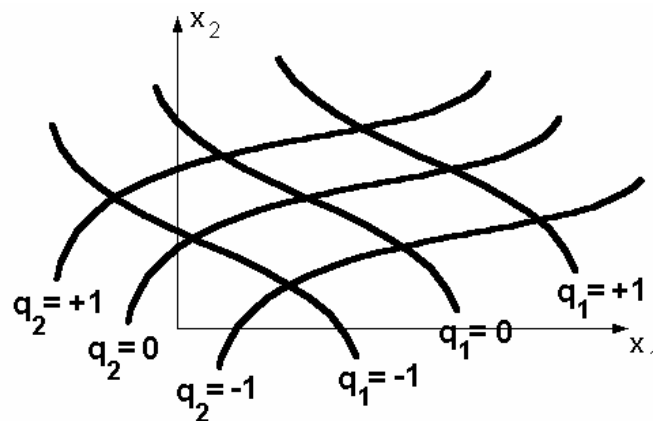
az **a** vektor hosszának négyzete pedig:

$$/2.5/ \quad |\mathbf{a}|^2 = \sum_{i=1}^f a_i^2$$

A koordinátarendszer *koordinátavonalai* azok a vonalak, amelyek mentén egy kivételével minden koordináta konstans. A *koordinátatengelyek* pedig azok a koordinátavonalak, amelyeknél a konstansok értéke éppen zérus. A Descartes-rendszer koordinátavonalai egyenesek (párhuzamosak illetve merőlegesek).

## 2.2. Általános koordináták

Szemléltetésül képzeljünk el egy könnyen nyújtható anyagból készült abrosszal fedett asztalt. A Descartes-féle koordinátavonalak négyzetes hálóját mind az asztalra, mind az abroszra rajzoljuk rá. Nyújtsuk az abroszt az asztal síkjában (a különböző részeket különböző mértékben, zsugorítást is megengedve).



Általános koordinátarendszer

Ekkor az asztal síkjának bármely pontja kétféleképpen is megadható koordinátákkal, mégpedig az asztalra rajzolt  $(x_1, x_2)$  Descartes-koordinátákkal és az abroszon lévő  $(q_1, q_2)$  általános koordinátákkal.

Tekintsük a sík egy  $\mathbf{x}$  helyvektorú pontját. Ehhez a ponthoz tartoznak a Descartes-rendszerben az  $(x_1, x_2)$  koordináták, egy másik koordinátarendszerben pedig a  $(q_1, q_2)$  koordináták. A két koordinátarendszert vigye át egy differenciálható és invertálható koordináta-transzformáció egymásba:

$$/2.6/ \quad x_i = x_i(q_1, q_2) \quad i=1,2$$

$$/2.7/ \quad q_i = q_i(x_1, x_2) \quad i=1,2$$

Fejezzük ki az  $\mathbf{x}$  helyvektort a Descartes-bázisban, de a  $q$ -koordinátákkal:

$$/2.8/ \quad \mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 = x_1(q_1, q_2) \mathbf{e}_1 + x_2(q_1, q_2) \mathbf{e}_2$$

A helyvektor tehát a  $q$ -koordináták függvénye.

A parciális deriváltak olyan vektorok, amelyek a koordinátavonalak érintői. A

$$/2.9/ \quad \mathbf{b}_i^* = \delta \mathbf{x} / \delta q_i \quad i=1,2$$

vektor a  $q_i$ -koordinátavonal érintője irányába mutat. E vektorokat beosztva a hosszukkal normált bázisvektorokat kapunk:

$$/2.10/ \quad \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i^* / |\mathbf{b}_i^*|, \quad |\mathbf{b}_i| = 1 \quad i=1,2$$

A sík bármely  $\mathbf{a}$  vektora kifejezhető ebben a bázisban is:

$$/2.11/ \quad \mathbf{a} = a_1 \mathbf{b}_1 + a_2 \mathbf{b}_2$$

Egészen hasonló módon vezethetők be az  $f$ -dimenziós euklideszi térben a  $(q_1, q_2, \dots, q_f)$  általános koordináták, és a hozzájuk tartozó  $\mathbf{b}_i$  normált bázisvektorok. Az általános koordinátarendszer a Descartes-koordinátarendszertől több vonatkozásban lényeges eltéréseket mutat:

a/ A koordinátavonalak nem feltétlenül egyenesek.

b/ A bázisvektorok nem feltétlenül ortogonálisak egymásra, ezért a hossza és a vektorok skaláris szorzatára nem állanak fel egyszerű összefüggések.

c/ A bázisvektorok nem feltétlenül állandóak: a tér minden  $\mathbf{x}$  pontjához tartozik egy bázis. Tehát a bázis *lokális bázis*.

d/ Az  $\mathbf{x}$  helyvektor komponensei nem feltétlenül egyenlők a  $q_i$  koordinátákkal.

Sokszor szükségünk van a  $d\mathbf{x}$  elemi elmozdulás kifejezésére:

$$/2.12/ \quad d\mathbf{x} = \sum (d\mathbf{x}/dq_i) dq_i$$

Ha az elemi elmozdulás a  $q_i$ -koordinátavonal irányába mutat és a  $dq_i$  koordináta-differenciálhoz tartozik, akkor

$$/2.13/ \quad d\mathbf{x} = (d\mathbf{x}/dq_i) dq_i$$

Ez az elmozdulás tehát egy olyan elemi elmozdulás, ami a  $q_i$ -koordinátavonalon (azaz a többi koordináta konstans értéke mellett)  $dq_i$  változásnak felel meg. Általános koordináták esetén  $dq_i$  nem feltétlenül egyenlő az elemi ívhosszal. Valóban, a /2.13/ elemi elmozduláshoz

$$/2.14/ \quad ds = |d\mathbf{x}| = |(\delta\mathbf{x}/\delta q_i)dq_i|$$

elemi ívhossz tartozik.

### Elnevezések

Ha a koordinátavonalak egyenesek, akkor a koordinátarendszert *egyenesvonalúnak* mondjuk. Belátható, hogy egy koordinátarendszer akkor és csak akkor egyenesvonalú, ha a normált bázisvektorok állandóak, azaz a tér minden  $\mathbf{x}$  pontjához ugyanaz a bázis tartozik.

Ha a bázisvektorok egymásra merőlegesek, akkor a koordinátarendszer *derékszögű /ortogonális/*. Derékszögű koordinátarendszerben a  $dq_i$  koordináta-differenciálok egy elemi téglalapot határoznak meg, amelynek térfogata:

$$/2.15/ \quad dV = \prod_{i=1}^f |d\mathbf{x}/dq_i| dq_i$$

A Descartes-féle koordinátarendszer egyenesvonalú is és derékszögű is. De egy egyenesvonalú derékszögű koordinátarendszer sem feltétlenül Descartes-féle. Tekintsük például az  $(x)$  Descartes-féle koordinátarendszert, ebből az  $x_1 = 2q_1$  transzformációval egyenesvonalú, derékszögű koordinátarendszerhez jutunk, ami azonban mégsem Descartes-féle.

## 2.3. További speciális koordinátarendszerek

### Síkbeli polárkoordináta-rendszer

A két koordináta most az  $r$  sugár és a  $\varphi$  szög:

$$/2.16/ \quad x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

A koordinátavonalak az origó középpontú körök, valamint az origóból kiinduló félegyenesek. A koordinátarendszer bázisvektorait szokásosan  $\mathbf{e}_r$ -rel és  $\mathbf{e}_\varphi$ -vel jelöljük, és radiális illetve poláris egységvektornak nevezzük. A fenti /2.9/ és /2.10/ formulák alkalmazásával kapjuk, hogy

$$/2.17/ \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi \quad (= \mathbf{r} / r)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi$$

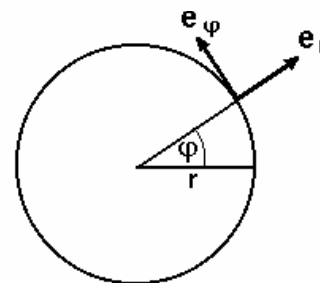
Ez a koordinátarendszer derékszögű és nem egyenesvonalú.

Az elemi elmozdulás kifejezése:

$$/2.18/ \quad d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\varphi r d\varphi$$

A koordinátavonalak irányával meghatározott területelem (kétdimenziós térfogatelem):

$$/2.19/ \quad dA = r dr d\varphi$$



### Hengerkoordináta-rendszer

A hengerkoordináta-rendszerhez úgy jutunk, hogy a síkbeli két polárkoordinátához hozzávesszük harmadiknak a harmadik  $z$  Descartes-koordinátát. Tehát:

$$/2.20/ \quad x = \rho \cos\varphi \quad y = \rho \sin\varphi \quad z$$

Itt  $\rho$  a  $z$  tengelytől mért távolságot jelenti.

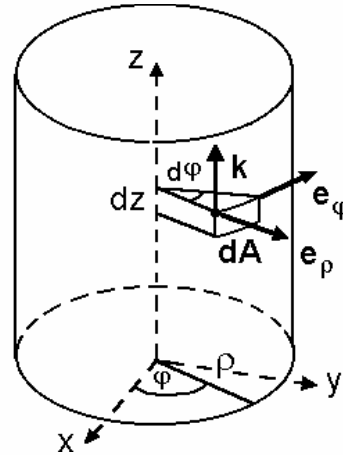
A bázisvektorok most:  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ .

Az elemi elmozdulás:

$$/2.21/ \quad d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\rho dr + \mathbf{e}_\varphi r d\varphi + \mathbf{e}_z dz$$

A térfogatelem:

$$/2.22/ \quad dV = \rho d\rho d\varphi dz$$



### Gömbi /térbeli polár-/ koordináta-rendszer

A gömbi koordináta-rendszer egyik koordinátája az origótól mért  $r$  sugár. A másik két koordináta pedig a gömbfelület pontjaihoz rendelhető  $\nu$  illetve  $\varphi$  szög. (A gömbfelületen a helyzetmegadás a földrajzból ismert szélességi és hosszúsági fokokkal is történhet, a gömbi koordináták ezektől kissé eltérnek - FA).

A  $\nu$  *polárszög* a  $z$ -tengellyel bezárt szög. Adott  $r$  és  $\nu$  esetén a pont egy  $\rho = r \sin \nu$  sugarú körön /"szélességi kör"/ mozoghat. A kör merőleges a  $z$ -tengelyre és középpontja a  $z$ -tengelyen van. A körön a pont helyzetét az  $x$ -tengellyel párhuzamos sugárral bezárt  $\varphi$  *azimutszög* adja meg.

Végül is a koordináta-rendszert meghatározó koordináta-transzformáció összefüggései:

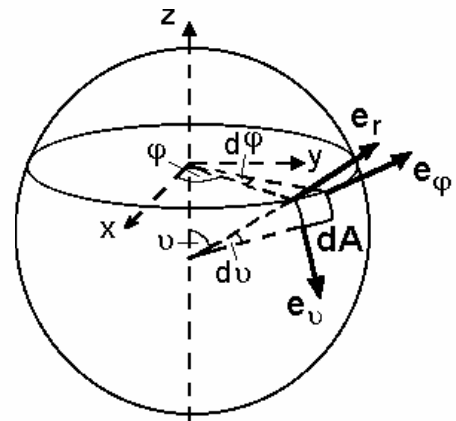
$$/2.23/ \quad x = r \sin\nu \cos\varphi \quad y = r \sin\nu \sin\varphi \quad z = r \cos\nu$$

A koordináta-rendszer egységvektorai:  $\mathbf{e}_r$  /sugárirányú/,  $\mathbf{e}_\nu$  /a "hosszúsági kör" érintője irányú/,  $\mathbf{e}_\varphi$  /a "szélességi kör" érintője irányú/. Az elemi elmozdulás:

$$/2.24/ \quad d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\nu r d\nu + \mathbf{e}_\varphi r \sin\nu d\varphi$$

A derékszögű térfogatelem:

$$/2.25/ \quad dV = r^2 \sin\nu dr d\nu d\varphi$$



## 3. Pontkinematika

### 3.1. Alapok

Sebesség:

$$/3.1/ \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = v \mathbf{e}_\nu, \quad v = \dot{s}$$

$\mathbf{e}_\nu$  : érintő irányú, előremutató egységvektor

Gyorsulás:

$$/3.2/ \quad \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

Mivel a Descartes-koordináta-rendszer bázisvektorai állandóak, a sebességvektor és a gyorsulásvektor Descartes-komponensei egyszerűen adódnak /KF/. Általános koordináta-rendszerben a sebesség kifejezése /2.12/-ből:

$$/3.3/ \quad \mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt = \sum (d\mathbf{x}/dq_i) dq_i /dt$$

Síkbeli polárkoordináta-rendszerben ebből adódik a sebesség két komponense:

$$/3.4/ \quad v_r = \dot{r} \quad v_\phi = r \dot{\phi}$$

Egy más levezetést is adhatunk:

$$/3.5/ \quad \mathbf{v} = d(\mathbf{r}\mathbf{e}_r)/dt = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r$$

Bármely  $\mathbf{e}$  egységvektor időderiváltja merőleges az egységvektorra. Ezt az állítást az  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1$  összefüggés idő szerinti differenciálásával láthatjuk be. Szemléletesen belátható, hogy az  $\mathbf{e}$  vektor nagysága viszont éppen a  $\dot{\phi}$  nagyságával egyenlő, s így is eljutunk a /3.4/ formulákhoz:

$$/3.6/ \quad \mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi$$

A gyorsulást a /3.6/ összefüggésből kapjuk további differenciálással /KF/.

### 3.2. Tangenciális és centripetális gyorsuláskomponens

A vektorokat -amint az általános koordinátarendszernél láttuk- többféle bázisban előállíthatjuk komponenseikkel. A pontmechanikában a fentiekén kívül használunk még egy olyan bázist, ami a pont pályájához illeszkedik. A pálya egy pontján vezessük be az  $\mathbf{e}_v$  *tangenciális egységvektort*. Ez a pálya érintője irányába mutat és mozgásirányban előre. A sebességvektor mindig ilyen irányú, mert

$$/3.7/ \quad \mathbf{v} = v\mathbf{e}_v$$

Képezzük most a gyorsulásvektort:

$$/3.8/ \quad \mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{e}_v + v\dot{\mathbf{e}}_v$$

Tudjuk, hogy egységvektor időderiváltja merőleges az egységvektorra, ezért a második tag merőleges lesz a pálya érintőjére. Ennél azonban többet is mondhatunk. Szigorú matematikai levezetés helyett az eredményt szemléletesen ismertetjük.

A pályán tekintsünk egy P pontot, aminél a gyorsulást vizsgáljuk. Vegyünk fel a P előtt egy  $P_1$  pontot és a P után egy  $P_2$  pontot. Ha ez a három pont nem esik egy egyenesbe, akkor meghatároz egy kört. Ennek a körnek a határesetete, amint a  $P_1$  és  $P_2$  is tart P-hez, a pálya *simuló köre a P pontban*. A simuló kör sugara legyen R, a sugárirányú, kifelé mutató egységvektor pedig  $\mathbf{n}$ . Ekkor

$$/3.9/ \quad \dot{\mathbf{e}}_v = -\dot{\phi}\mathbf{n}$$

ahol  $\dot{\phi} = \omega$  a szögsebesség a simuló kör középpontjából nézve. (A mozgást a simuló körön végzett körmozgással közelítjük!)

Behelyettesítés után kapjuk, hogy

$$/3.10/ \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_{cp}, \quad \mathbf{a}_t = \dot{v}\mathbf{e}_v \quad \text{tangenciális (pálya menti) gyorsulás}$$

$$|\mathbf{a}_t| = |\dot{v}| = |\ddot{s}|$$

$$\mathbf{a}_{cp} = -v\dot{\phi}\mathbf{n} \quad \text{centripetális gyorsulás}$$

$$|\mathbf{a}_{cp}| = v|\dot{\phi}| = v^2/R = R\omega^2$$

A tangenciális gyorsulás a sebesség nagyságának változásából ered és előre mutat, ha a sebesség nagysága időben növekszik, visszafelé mutat, ha v csökken. A centripetális gyorsulás a sebesség irányának változásából ered és **mindig a simuló kör középpontja felé mutat**. Ha a mozgás egyenesvonalú, akkor a centripetális gyorsulás zérus, ha a mozgás egyenletes, akkor pedig a tangenciális gyorsulás zérus.

Természetesen nemcsak a gyorsulást, hanem más vektorokat is felbonthatunk a pálya egy pontjára vonatkoztatva tangenciális és arra merőleges /normális/ komponensekre. Ennek a felbontásnak szerepe van például súrlódás esetén a nyomóerő számításánál.

### 3.3. Körmozgás

A körmozgás tárgyalása legegyszerűbb a kör síkjában felvett polárkoordináta-rendszerben. A kör középpontja legyen a koordináta-rendszer origója, sugara  $r$ . Mivel  $r$  most konstans, a helyvektor, a sebességvektor és a gyorsulásvektor a fenti általános formulákból adódik:

$$/3.11/ \quad \mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad \mathbf{v} = r \omega \mathbf{e}_\varphi \quad \mathbf{a} = r \beta \mathbf{e}_\varphi - r \omega^2 \mathbf{e}_r$$

A sebesség nagysága ugyanis:  $v = r\omega$ , ennek időderiváltja  $r\beta$ , ahol  $\beta$  a szöggyorsulás:  $\omega = \beta$ .

A körmozgás vetülete bármely, az origón átmenő egyenesre *rezgőmozgás*. Az egyenletes körmozgás vetülete *harmonikus rezgőmozgás*.

## 9. A Hamilton-függvény

A mechanikai mozgásegyenlet az eddig tárgyalt formában időben másodrendű. Ezért két kezdeti feltételünk volt: a kezdeti helyet és sebességet is meg kellett adnunk ahhoz, hogy egyértelmű megoldáshoz jussunk.

A mechanika *Hamilton-féle* vagy más néven *kanonikus* felépítésében a mozgásegyenlet időben elsőrendű egyenletrendszer. Ehhez úgy jutunk, hogy bevezetünk új mennyiségeket, az *impulzusokat*. Minden egyes térkoordináta-hoz rendelünk egy impulzust a következő definícióval: fejezzük ki az  $E_k$  kinetikus energiát mint a  $q_i$  térkoordináták és a  $\dot{q}_i$  sebességkoordináták függvényét; ekkor a  $p_i$  impulzuskoordináta definíciója:

$$/9.1/ \quad p_i = \delta E_i / \delta \dot{q}_i .$$

Egyetlen tömegpont esetén Descartes-rendszerben ezek éppen a korábbról megismert *közönséges* impulzusvektor koordinátái, általános koordináta-rendszerben *általánosított impulzusoknak* szokás hívni őket.

Tételezzük fel, hogy rendszerünk konzervatív, a potenciális energiát jelöljük  $E_p$ -vel. Fejezzük ki a mechanikai energiát a  $q_i$  koordináták és a  $p_i$  impulzusok függvényeként, ezt a függvényt nevezzük *Hamilton-függvénynek*. A Hamilton-függvény értéke tehát a mechanikai energia:

$$/9.2/ \quad H(q,p) = E_p + E_k$$

Egyetlen tömegpont és Descartes-koordináta-rendszer esetén

$$/9.3/ \quad H(\mathbf{r},\mathbf{p}) = E_p(\mathbf{r}) + \mathbf{p}^2 / 2m$$

A mozgásegyenletek ebben a formalizmusban a

$$/9.4/ \quad \dot{q}_i = \delta H / \delta q_i \quad \dot{p}_i = - \delta H / \delta p_i$$

*Hamilton-egyenletek.*

## 10. Merev testek mozgásegyenletei

Az impulzustétel és az impulzusmomentum tétele természetesen a merev testekre is érvényes. Sőt, ez a két tétel együtt jelenti éppen a merev test mozgásegyenleteit, amelyekből a test mozgása -a kezdőfeltételek ismeretében- meghatározható. Mivel az impulzustételben a külső erők eredője, az impulzusmomentum-tételben a külső forgatónyomatékok eredője szerepel, ezért - egy adott merev testre ható - két erőrendszer ugyanazt a mozgást idézi elő a merev testen, ha ez a két mennyiség ugyanannyi a két erőrendszerre.

Tehát két erőrendszer akkor és csak akkor *egyenértékű egymással*, ha

- az erők eredője egyenlő, és
- a forgatónyomatékok eredője is egyenlő.

Ebből következik például, hogy a merev testre ható erő *eltolható a támadásvonal mentén*. Egy ilyen eltolásnál ugyanis sem az eredő erő, sem a forgatónyomaték nem változik.

Egy síkban ható erőrendszer majdnem mindig helyettesíthető egyetlen eredő erővel. Egyik kivételes eset az *erőpár*, ennél az eredő erő zérus, az eredő forgatónyomaték viszont nem zérus! Az erőpár  $\mathbf{M}$  forgatónyomatéka független a vonatkoztatási ponttól, olyan vektor, amely merőleges az erőpár síkjára, nagysága pedig  $M = d \cdot F$ , ahol  $d$  az erőpárt alkotó két erő egyenesének távolsága.

## 11. Kontinuummechanika

### 11.1. Alapfogalmak

A mechanika felosztása: pontmechanika és kiterjedt testek mechanikája. Kiterjedt testek: pontrendszer és kontinuum. Kontinuum: a sűrűség szakaszosan folytonos függvény. A testben véges a sűrűség:  $0 < \rho < \infty$ .

Kontinuumok: merev testek és deformálható testek. Deformálható testek: rugalmas testek, szilárd testek, fluidumok, reológiai modellek.

$V$  jelölje a test térfogatát és egyúttal a test által elfoglalt tértartományt. Kezdetben ( $t=t_0$  vagy  $t=0$ ) legyen  $V_0$ , tehát a test pontjai (helyvektorok) kezdetben:  $\mathbf{x}_0 \in V_0$ .  $\mathbf{x}_0$  lesz a részecske "neve",  $\mathbf{x}$  változik, ahogy a test mozog, de  $\mathbf{x}_0$ -at a test pontjához rögzítjük. A  $t$  időpontban a test pontjai:  $\mathbf{x} \in V$ .

Pontrendszer és kontinuum közelíthető egymással. Dirac-féle delta-függvény.

Mozgás:  $V_0 \rightarrow V$ ,  $\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}$  leképezés. Jelölés:  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^L(\mathbf{x}_0, t)$ .

Kezdeti feltétel:  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^L(\mathbf{x}_0, 0)$ .

Feltesszük, hogy invertálható:  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^E(\mathbf{x}, t)$ .

? Mi a matematikai kifejezése annak, hogy az  $\mathbf{x}^E$  függvény az  $\mathbf{x}^L$  függvény inverze?

#### Jacobi mátrix

Kiválasztjuk a testnek egy pontját, a 0 kezdeti időben legyen ez  $\mathbf{x}_{P0}$ . E pont környezetében a mozgást leíró leképezést lineáris leképezéssel közelíthetjük:

$$\begin{aligned} /11.1/ \quad \Delta \mathbf{x} &\approx \underline{\mathbf{J}} \cdot \Delta \mathbf{x}_0, \\ \text{határesetben} \quad d\mathbf{x} &= \underline{\mathbf{J}} \cdot d\mathbf{x}_0, \end{aligned}$$

ahol  $\Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{P0}$  és  $\mathbf{x}_0$  a kiválasztott pont környezetének valamely pontja, ami  $t$  időben az  $\mathbf{x}$  pontban lesz.

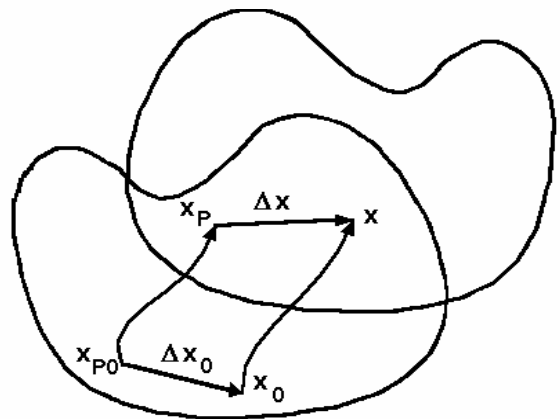
A  $\underline{\mathbf{J}}$  Jacobi mátrix elemei:

$$!!! \quad /11.2/ \quad J_{ik} = \delta x_i^L / \delta x_k^0.$$

A Jacobi mátrix determinánsa a  $J$  Jacobi determináns. A Jacobi determináns a térfogatváltozással van szoros kapcsolatban: ha volt egy  $dV_0$  térfogatunk, akkor ez a mozgás során  $dV = J dV_0$  térfogatba megy át. Tehát a relatív térfogatváltozás:  $J - 1$ .

? Hogyan fejezhető ki a sűrűség /relatív/ változása?

? Mi a térfogat két- és egydimenziós térben?



A Jacobi determináns értéke természetesen függ az időtől:  $t=0$  időben éppen 1. Továbbá függ attól is, melyik volt a kiválasztott  $\mathbf{x}_{P0}$  pont, amelynek a környezetében vizsgálódunk.

Folytonossági követelmény:  $0 < J < \infty$ . (Véges térfogat végesbe megy át.)

### Térmennyiség időderiváltjai

*Térmennyiség*: hely és idő függvénye. /Más szóval: mező./ Elnevezések: homogén: helytől, stacionárius (sztatikus): időtől, izotróp: iránytól való függetlenség.

A térmennyiségek hely-időfüggését kétféle módon szokás megadni:

Euleri leírás:  $\mathbf{x}, t$

Lagrange-i leírás:  $\mathbf{x}_0, t$

Például: hőmérséklet:  $T = T^E(\mathbf{x}, t) = T^L(\mathbf{x}_0, t)$ .

Az  $\mathbf{x}_0$  részecske *sebessége*:  $\mathbf{v} = \delta \mathbf{x}^L / \delta t$ , *gyorsulása*:  $\mathbf{a} = \delta \mathbf{v}^L / \delta t = \delta^2 \mathbf{x}^L / dt^2$ . A sebesség térmennyiség, a sebességtér vektorvonalai az *áramvonalak*. A *pályavonalak* pedig a részecskék pályagörbéi. Stacionárius áramlásnál az áramvonalak és a pályavonalak egybeesnek.

Az  $\mathbf{F}$  térmennyiség *lokális időderiváltja*:  $\delta \mathbf{F}^E / \delta t$ ; ezt nevezzük parciális időderiválnak is, és röviden így is jelöljük:  $\delta \mathbf{F} / \delta t$ . Az  $\mathbf{F}$  térmennyiség szubsztanciális időderiváltja:  $\delta \mathbf{F}^L / \delta t$ . A szubsztanciális derivált más jelölése: teljes derivált:  $d\mathbf{F} / dt = \delta \mathbf{F}^L / \delta t$ . Összefüggés a kétféle időderivált között:

$$/11.3/ \quad d\mathbf{F}/dt = \delta \mathbf{F} / \delta t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{F} \quad (? \text{ Miért?})$$

/konvektív tag/

A gyorsulás kifejezése az Euleri leírásban:  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \delta \mathbf{v} / \delta t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$

? Hogy van ez Descartes-koordinátákban?

*Inkompresszibilis kontinuum*: a sűrűség szubsztanciálisan állandó, azaz szubsztanciális időderiváltja zérus.

### Tenzorok

Az  $n$  dimenziós vektortérben vegyünk fel egy bázist,  $\mathbf{e}_i$  jelölje a *bázisvektorokat*. Tegyük fel, hogy a bázis ortonormált, azaz

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{egyébké } n \end{cases}$$

A vektortér bármely  $\mathbf{x}$  vektora egyértelműen kifejezhető a bázisvektorok lineáris kombinációjaként:

$\mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{e}_i$ , itt  $x_i$  az  $\mathbf{x}$  vektor *koordinátái*.

*Tenzor*: homogén lineáris vektor-vektor függvény. Vektor-vektor függvény: független változója és értéke is vektor, pl.  $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ . Ezt homogén lineárisnak nevezzük, ha teljesül, hogy

$$\mathbf{f}(c_1 \mathbf{r}_1 + c_2 \mathbf{r}_2) = c_1 \mathbf{f}(\mathbf{r}_1) + c_2 \mathbf{f}(\mathbf{r}_2) \quad \text{minden } \mathbf{r}_i \text{ vektor és } c_i \text{ skalár esetére.}$$

Ha ez az összefüggés teljesül, akkor többtagú lineáris kombinációkra is érvényes, tehát ha az  $\mathbf{f}$  függvény homogén lineáris, akkor általánosan is érvényes, hogy

$$\mathbf{f}(\sum c_i \mathbf{x}_i) = \sum c_i \mathbf{f}(\mathbf{x}_i).$$

Emiatt a homogén lineáris vektor-vektor függvényt egyértelműen meghatározzák a bázisvektorokhoz tartozó  $\mathbf{f}(\mathbf{e}_i)$  függvényértékek, hiszen

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\sum x_i \mathbf{e}_i) = \sum x_i \mathbf{f}(\mathbf{e}_i).$$

Tenzorjelölés:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{x}$  Egységtenzor:  $\underline{\mathbf{1}}$ , amire  $\underline{\mathbf{1}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}$ .

A  $\underline{\mathbf{T}}$  tenzor mátrixa:  $\underline{\mathbf{T}}_{ij} = (\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}_j)_i$ . A bázis megváltoztatása esetén a tenzor marad, de a mátrix komponensei változnak. Egy adott bázis esetén a tenzorok és mátrixaik kölcsönösen egyértelműen megfelelnek egymásnak. Ezért a továbbiakban -egy bázist rögzítve- a tenzort és a mátrixát ugyanazzal a betűvel fogjuk jelölni.

Egységtenzor mátrixa egységmátrix: a főátlóban minden elem 1, minden más elem zérus.

A  $\underline{\mathbf{T}}$  mátrix transzponáltja:  $\tilde{\underline{\mathbf{T}}}$ , ahol  $\tilde{\underline{\mathbf{T}}}_{ij} = \underline{\mathbf{T}}_{ji}$ .



Szimmetrikus a  $\underline{\mathbf{T}}$  mátrix, ha  $\underline{\tilde{\mathbf{T}}} = \underline{\mathbf{T}}$ , aszimmetrikus, ha nem szimmetrikus, és antiszimmetrikus, ha  $\underline{\tilde{\mathbf{T}}} = -\underline{\mathbf{T}}$ .

Bármely  $\underline{\mathbf{B}}$  mátrix felbontható egy  $\underline{\mathbf{S}}$  szimmetrikus és egy  $\underline{\mathbf{A}}$  antiszimmetrikus mátrix összegére:  $\underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{S}} + \underline{\mathbf{A}}$ ,  $\underline{\mathbf{S}} = (\underline{\mathbf{B}} + \underline{\tilde{\mathbf{B}}})/2$ ,  $\underline{\mathbf{A}} = (\underline{\mathbf{B}} - \underline{\tilde{\mathbf{B}}})/2$

Ortogonalis a  $\underline{\mathbf{T}}$  mátrix, ha  $\underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\tilde{\mathbf{T}}} = \underline{\mathbf{1}}$ . Ortogonalis tenzor mátrixa /azaz ortogonalis mátrix/ sorvektorai és oszlopvektorai ortogonalisak egymásra:

$$\sum_j \underline{\mathbf{T}}_{ij} \underline{\mathbf{T}}_{kj} = \delta_{ik} \text{ és } \sum_j \underline{\mathbf{T}}_{ji} \underline{\mathbf{T}}_{jk} = \delta_{ik} .$$

Ortogonalis tenzor megőrzi a skalárszorzatot és így az ortogonalis tenzor távolság- és szögtartó lineáris leképezés.

Az  $\mathbf{x}$  /nullvektortól különböző/ vektort a  $\underline{\mathbf{T}}$  tenzor *sajátvektorának* nevezzük, ha létezik olyan  $\lambda$  szám, hogy  $\underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ . Ekkor  $\lambda$ -t a  $\underline{\mathbf{T}}$  tenzor  $\mathbf{x}$  vektorhoz tartozó *sajátértékének* nevezzük. A sajátértékeket a  $\det(\underline{\mathbf{T}} - \lambda \underline{\mathbf{1}}) = 0$  *sajátérték-egyenletből* határozhatjuk meg.  $n$  dimenziós térben legfeljebb  $n$  sajátérték van. Egy sajátértékhez viszont több sajátvektor is tartozhat. A sajátértékhez legfeljebb annyi független sajátvektor tartozik, amennyi a *multiplicitása*. A sajátértékek és a sajátvektorok még akkor sem feltétlenül valóságosak, ha a tenzor minden mátrixeleme valós.

Szimmetrikus mátrixnak a multiplicitásokat is figyelembe véve pontosan  $n$  valós sajátértéke van. A különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok egymásra merőlegesek. A mátrix *nyoma*: a főátlóban lévő elemeinek összege.

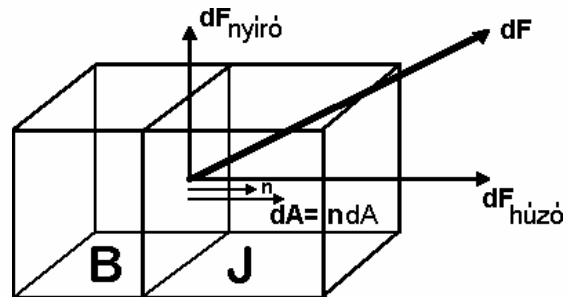
### Feszültségtenzor

A kontinuum részecskéire hathatnak külső erők  $\underline{\mathbf{F}}_{\text{kül}}$ , ezek rendszerint extenzív mennyiségek, bevezethető tehát a fajlagos értékük  $\underline{\mathbf{f}}$  és a térfogati sűrűségük  $\underline{\mathbf{p}}\underline{\mathbf{f}}$ :

$$/11.4/ \quad \underline{\mathbf{F}}_{\text{kül}} = \int \underline{\mathbf{f}} \, dm = \int \underline{\mathbf{p}}\underline{\mathbf{f}} \, dV$$

Hathatnak viszont belső erők is. Ezek *közelfható* erők, a szomszédos részecskék a közös határfelületük mentén hatnak csak egymásra. E belső erők matematikailag kezelhető leírását adja a feszültségtenzor.

Képzeljük el, hogy a kontinuumban kiválasztunk egy pontot, azon átfektetünk egy  $d\mathbf{A}$  felületelemet. A felületelem két oldalán képzeljünk el két kis tartományt, az egyiket jelöljük B-vel, a másikat J-vel. A B "baloldali" részecskére a J "jobboldali" részecske  $d\mathbf{F}$  erővel hat. A  $d\mathbf{A}$  határfelület normálisa /a B szempontjából "külső" normális/ legyen  $\mathbf{n}$ , ekkor  $d\mathbf{A} = \mathbf{n} \, dA$ .



Az erő most a felületen oszlik el, "felületi extenzív mennyiség", más szóval  $d\mathbf{F}$  arányos  $d\mathbf{A}$ -val. Igen ám, de mind  $d\mathbf{F}$ , mind  $d\mathbf{A}$  vektorok, s irányuk nem feltétlenül esik egybe, még izotróp testekben sem. A  $d\mathbf{F}$  erőnek a felületre merőleges /azaz  $\mathbf{n}$ -nel párhuzamos/ komponensét *húzóerőnek*, a felületbe eső /azaz  $\mathbf{n}$ -re merőleges/ komponensét *nyíróerőnek* /más néven *csúsztatóerőnek*/ nevezzük. A húzóerő negatívját *nyomóerőnek* nevezzük. A húzóerő akkor pozitív, ha "kifelé" mutat, a nyomóerő pedig akkor, ha "befelé". Természetesen a III. axióma következtében B is hat J-re, és peddig  $-d\mathbf{F}$  erővel.

A test kiválasztott pontjához tartozik egy  $\underline{\mathbf{T}}$  *feszültségtenzor*, ami tulajdonképpen a  $d\mathbf{F}$  és a  $d\mathbf{A}$  közötti arányossági tényező:

$$/11.5/ \quad d\mathbf{F} = \underline{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{A}$$

A feszültségtenzor tehát felületi erőssűrűség. Descartes-koordinátákban

$$/11.6/ \quad d\mathbf{F}_i = \sum_k \underline{\mathbf{T}}_{ik} \cdot d\mathbf{A}_k$$

Tehát a  $\underline{\mathbf{T}}$  feszültségtenzor  $\underline{\mathbf{T}}_{ik}$  mátrixában az első index az erőre, a második index a felületre utal. Például  $\underline{\mathbf{T}}_{yz}$  a z normálisú "egységnyi" felületre ható erő y komponense. A feszültségtenzor mátrixának főátlójában tehát a húzófeszültségek vannak, a mátrix többi eleme nyírófeszültség. Az itt előforduló esetekben a feszültségtenzor szimmetrikus, azaz  $\underline{\mathbf{T}}_{ik} = \underline{\mathbf{T}}_{ki}$ .

Alkalmazzuk most egy dV elemi térfogatú tartományra a tömegpontra érvényes

$$/11.7/ \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{k\ddot{u}l} + \mathbf{F}_{b\ddot{e}l}$$

egyenletet:

$$/11.8/ \quad \rho \, dV \, \mathbf{a} = \rho \, \mathbf{f} \, dV + \int \underline{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{A} \quad /az \, integr\acute{a}l \, a \, dV \, hat\acute{a}rfel\ddot{u}let\ddot{e}re \, veend\ddot{o}/$$

Integrálva egy tetszőleges, véges térfogatra, a Gauss-féle divergenciatétel felhasználásával kapjuk a kontinuum mozgásegyenletét:

$$/11.9/ \quad \rho \, d\mathbf{v}/dt = \rho \mathbf{f} + \text{div} \, \underline{\mathbf{T}}$$

### Dilatációs tenzor

A kontinuum egy  $\mathbf{x}_{p0}$  pontját kiválasztva, a mozgást a kiválasztott pont környezetében a  $\underline{\mathbf{J}}$  Jacobi-tenzor írja le (/11.1/). Most úgynevezett *infinitézimális deformációkra* szorítkozunk, amikor  $\underline{\mathbf{J}}$  csak kicsit tér el az egységtenzortól:

$$/11.10/ \quad \underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{D}} \quad \underline{\mathbf{D}}: \text{elmozdulástenzor}, \quad \mathbf{D}_{ik} \ll 1.$$

Bontsuk fel a  $\underline{\mathbf{D}}$  tenzort szimmetrikus és antiszimmetrikus részre:

$$/11.11/ \quad \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{R}} + \underline{\mathbf{E}}$$

$$/11.12/ \quad \underline{\mathbf{E}} = (\underline{\mathbf{D}} + \underline{\tilde{\mathbf{D}}})/2 \quad \underline{\mathbf{E}}: \text{dilatációs /nyúlási/ tenzor},$$

$$/11.13/ \quad \underline{\mathbf{R}} = (\underline{\mathbf{D}} - \underline{\tilde{\mathbf{D}}})/2 \quad \underline{\mathbf{R}} \text{ a test merev test-szerű forgásával kapcsolatos.}$$

Ha ilyen rotáció nincs, akkor

$$/11.14/ \quad d\mathbf{x} = (\underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{E}}) \cdot d\mathbf{x}_0 \quad \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{E}}: \text{deformációs tenzor.}$$

A főátlóban lévő deformációk a húzó /ill. nyomó/ deformációk, a főátlón kívüliek pedig a nyíródeformációk.

### Izotróp rugalmas test

Rugalmas testek esetén a feszültségtenzor kizárólag a deformációs tenzor pillanatnyi értékétől függ. Ha a test nem rugalmas,  $\underline{\mathbf{E}}$  korábbi értékei is szerepet játszanak a  $\underline{\mathbf{T}}$  pillanatnyi értékében, a testnek "memóriája van".

Lineáris /más néven *Hooke-*/ test esetében  $\underline{\mathbf{T}}$  komponensei lineáris módon függenek  $\underline{\mathbf{E}}$  komponenseitől:

$$/11.15/ \quad T_{ik} = \sum_p \sum_q c_{ikpq} E_{pq}$$

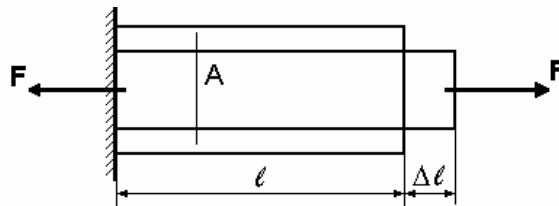
Ha a test izotróp, akkor ez az összefüggés egyszerűsödik az alábbi formába:

$$/11.16/ \quad \underline{\mathbf{T}} = \lambda \theta \cdot \underline{\mathbf{1}} + 2\mu \cdot \underline{\mathbf{E}}$$

ahol  $\lambda$  és  $\mu$  a test adatai, az úgynevezett *Lamé-állandók*,  $\theta$  pedig az  $\underline{\mathbf{E}}$  tenzor nyoma, ez éppen a relatív térfogatváltozás, azaz a J Jacobi-determináns.

### Egyszerű nyújtás

Egy hasábot nyújtunk meg az  $x$  tengely irányában. A többi lapot hagyjuk szabadon. Ekkor a feszültségtenzor mátrixának egyetlen eleme fog zérustól különbözni:  $\mathbf{T}_{xx}$ .



A dilatációs tenzor mátrixa pedig, amint az szimmetria-megfontolásokból következik, izotróp testben

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

A nyújtásra vonatkozó Hooke-törvény szerint a feszültség arányos a relatív megnyúlással, azaz:

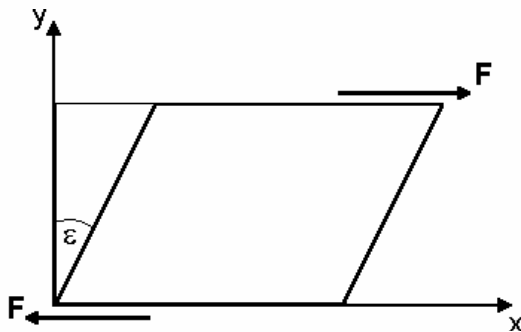
$$\mathbf{T}_{xx} = E \varepsilon_1 \quad E: \text{Young-modulus.}$$

Esetünkben oldalirányban a test összehúzódik /harántkontrakció/, ami arányos a megnyúlással:

$$\varepsilon_2 = \nu \varepsilon_1 \quad \nu: \text{Poisson-arány, értéke kb. } 0,3 - 0,4 \text{ a legtöbb anyagra.}$$

Az izotróp lineáris, rugalmas testnek két független rugalmassági jellemzője van. A korábban említett Lamé-állandók egyértelműen megadhatók  $E$  és  $\nu$  függvényeként, és viszont.

### Egyszerű nyírás



Az ábrán vázolt elrendezésben az elmozdulástenzor:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ahol } \varepsilon \text{ a nyírás szöge.}$$

Ezért a dilatációs tenzor:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon/2 & 0 \\ \varepsilon/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A feszültségtenzor izotróp rugalmas Hooke-féle közeg esetén ekkor:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & T & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T = \mu \varepsilon, \quad \mu: \text{torziós modulus.}$$

## Fluidumok

Fluidumban nyugalmi állapotban nyírófeszültségek nem lépnek fel. *Ideális* a fluidum, ha ezt a sajátját mozgás közben is megőrzi, míg *reális* vagy más szóval viszkózus fluidumok áramlásakor nyírófeszültségek is fellépnek.

A *fluidum* a gázok és a folyadékok összefoglaló neve. A gázok és folyadékok egyensúlyának és áramlásának törvényszerűségei ugyanis a legtöbb esetben együtt tárgyalhatók. A gázokra jellemző az összenyomhatóság, míg a folyadékok kevésbé összenyomhatók. *Inkompresszibilis* az a kontinuum, amely egyáltalán nem nyomható össze, azaz sűrűsége nem függ a deformációtól illetve a sebességtől.

Izotróp, ideális fluidumra érvényes a *Pascal-törvény*. A nyomás ilyenkor a fluidum egy pontjában minden irányban ugyanaz, és a nyomóerő mindig merőleges a felületre. A feszültségtenzor ilyenkor:  $\underline{T} = -p \underline{1}$ , ahol  $p$  a *nyomás*. Ugyanilyen alakú a feszültségtenzor, ha a fluidum viszkózus, de nyugalomban van.

A  $p$  nyomás persze függhet a helytől. A földi nehézségi erőterben két eset különösen gyakori:

a/ Inkompresszibilis folyadék esetében

$$p = p_0 - \rho g z, \text{ ahol } \begin{array}{l} p_0 \text{ a nyomás értéke a } z=0 \text{ magasságban,} \\ p \text{ a nyomás } z \text{ magasságban,} \\ \rho \text{ a folyadék sűrűsége.} \end{array}$$

b/ Izoterm ideális gáz esetére érvényes a *barometrikus formula*:

$$p = p_0 \cdot \exp(-bz), \text{ ahol } b \text{ a gáz minőségétől függő állandó.}$$

## A Bernoulli-egyenlet

Alkalmazzuk a kinetikus energia tételét egy áramlási csőre. Tegyük fel, hogy a fluidum stacionárius áramlásakor az ábrán szereplő  $P_1$  és  $P_2$  közötti térfogat átmegy a  $Q_1$  és  $Q_2$  közötti térfogatba. A tömegmegmaradás miatt a két sraffozott részben ugyanannyi a fluidum tömege. A kiválasztott fluidumrész kinetikus energiájának megváltozása:

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} (\rho_2 \Delta V_2 v_2^2 - \rho_1 \Delta V_1 v_1^2)$$

Eközben a kiválasztott fluidumrészen -a nehézségi erő és a nyomóerők által végzett- munka:

$$W = g (\rho_1 \Delta V_1 z_1 - \rho_2 \Delta V_2 z_2) + p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2$$

A kinetikus energia tétele szerint e két mennyiség egyenlő egymással.

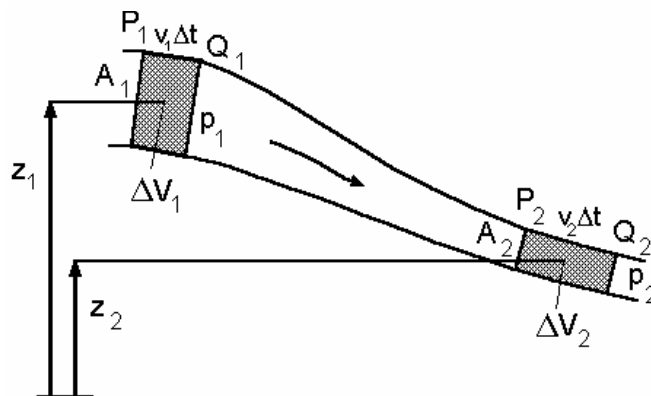
Szorítkozzunk inkompresszibilis fluidumra, ekkor kapjuk egyrészt, hogy

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho, \quad A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Másrészt, ezeket felhasználva a kinetikus energia tételében, adódik a

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konstans}$$

*Bernoulli-egyenlet*, amely tehát egy áramlási csőre érvényes, ha a közeg inkompresszibilis, az áramlás pedig stacionárius.



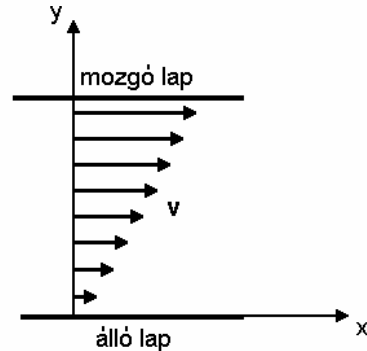
## Viszkózitás

Fluidumok áramlásakor hasonló összefüggés áll fenn a feszültségtenzorra mint amilyen az izotróp rugalmas közeg feszültségtenzorára áll fenn, csak itt a dilatációs tenzor helyett a sebességgradiens tenzor szerepel. A viszkózus fluidum mozgásegyenlete a *Navier-Stokes-féle differenciálegyenlet*.

A viszkózitás mibenléte legegyszerűbben az ábrán látható elrendezésben szemléltethető. A viszkózus nyírófeszültség arányos a sebességgradiens nyírókomponensével:

$$T_{xy} = -\eta \partial v_x / \partial y$$

Az  $\eta$  arányossági tényező a viszkózitás.



## MÉRLEGEGYENLETEK

A fizikai mennyiségek lehetnek *pontfüggvények* (térmennyiségek) és *halmazfüggvények*. Az utóbbiak esetében a tér egy halmazához tartozik egy érték. A szokásos szóhasználatban az **extenzív** mennyiségek olyan halmazfüggvények, amelyekre az **additivitás** követelménye teljesül:

$$E(A \cup B) = E(A) + E(B) \quad \text{ha } A \cap B = \emptyset.$$

Extenzív mennyiség (térfogati) *sűrűsége*:  $\rho_E = dE/dV$ . Értelmezés: a kiszemelt P pontot körülvevő egy  $\Delta V$  térfogatú tértartománnyal, ebben van  $\Delta E$  mennyiség az E extenzív mennyiségből; az *átlagsűrűség*:  $\Delta E/\Delta V$ . Ennek határértéke, amint a  $\Delta V$  tértartomány a P pontra zsugorodik, a sűrűség a P pontban.

Legyen E egy test extenzív mennyisége. Ennek megváltozása fizikailag lehetséges külső okok miatt (beáramlás a környezetből a test határfelületén át) vagy belső okok miatt (az E termelődése, *produkciója* a test belsejében):  $\Delta E = (\Delta E)_k + (\Delta E)_b$ . Beosztva a  $\Delta t$  időtartammal, és a  $\Delta t \rightarrow 0$  határértékben kapjuk az E extenzív mennyiségre vonatkozó **globális (integrális) mérlegegyenletet**:

$$dE/dt = -I_E + P_E.$$

Itt  $P_E$  az E mennyiség *forráserőssége*,  $I_E$  pedig az E mennyiségnek a test határfelületére vonatkozó *áramerőssége*.

Az E mennyiségnek valamely felületre vonatkozó *áramerőssége*: a felületen átment E mennyiség és az időtartam hányadosának határértéke. Ennek előjele függ attól, melyik átmeneti irányt tüntetjük ki.

A forráserősség extenzív mennyiség, sűrűsége a *forrássűrűség*. Megmaradó az a mennyiség, amelynek forráserőssége mindig zérus.

Az áramerősség is halmazfüggvény, de itt a halmazok kétdimenziósak: a szóban forgó felület részfelületei. Erre is értelmezhetünk tehát sűrűséget (felületegységre vonatkoztatott áramerősséget), ezt nevezzük *áramsűrűségnek*. Az áramerősség az áramsűrűség *fluxusa* (felületi integrálja):

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}.$$

A mérlegegyenletben szereplő tagokat pontfüggvények integráljaként állíthatjuk elő:

$$dE/dt = d/dt \int \rho_E dV = \int \delta \rho_E / \delta t dV \quad (\text{ha a határfelület nem mozog})$$

$$I_E = \oint \mathbf{J}_E \cdot d\mathbf{A} = \int \text{div} \mathbf{J} dV \quad (\text{A Gauss-féle divergenciatétel alapján})$$

$$P_E = \int \sigma_E dV \quad (P_E \text{ extenzív, } \sigma_E \text{ jelöli a sűrűségét, a } \textit{forrássűrűséget})$$

Az előforduló térfogati integrálok integrálási tartománya közös (t.i.: a test által elfoglalt  $V$  tartomány), ezért a globális mérlegegyenletből:

$$\int (d\rho_E / dt + \operatorname{div} \mathbf{J}_E - \sigma_E) dV = 0.$$

Ez az azonosság a test minden részére is fennáll, s ezért, ha az előforduló függvények folytonosak, akkor magának az integrandusnak kell eltűnnie:

$$d\rho_E / dt + \operatorname{div} \mathbf{J}_E - \sigma_E = 0 \quad (\text{ez a mérlegegyenlet lokális alakja})$$

A *térfogatáramsűrűség*:  $\mathbf{J}_v = \mathbf{v}$ .

Ezért a konvektív *áramsűrűség*:  $\mathbf{J}_E^{\text{konv}} = \rho_E \mathbf{v}$ , idő- és felületegységre vonatkoztatva ennyi  $E$  mennyiséget visz magával a mozgó közeg. A lokális mérlegben szereplő áramsűrűség a teljes áramsűrűség, ami a konvektív tagon kívül tartalmazhat *konduktív* (vezetési) tagot is:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_E^{\text{konv}} + \mathbf{J}_E^{\text{kond}} \quad \text{tehát } \mathbf{J}_E^{\text{kond}} = \mathbf{J}_E - \mathbf{J}_E^{\text{konv}}.$$

A tömeg csak konvektív úton áramolhat, ezért a tömegáramsűrűség:

$$\mathbf{J}_M = \rho \mathbf{v}.$$

A *tömegmérleg* lokális alakja:

$$\delta\rho/\delta t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0.$$

Ezzel egyenértékű a *szubsztanciális* tömegmérleg:

$$d\rho/dt + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Inkompresszibilis közeg áramlása esetén  $d\rho/dt = 0$ , s ezért  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ .

A lokális mérlegegyenletből matematikai azonosságok, valamint a kétféle időderivált közötti összefüggés felhasználásával kapjuk az  $E$  mennyiségre vonatkozó *szubsztanciális mérlegegyenletet*:

$$!!! \quad \rho \, dE/dt + \operatorname{div} \mathbf{J}_E^{\text{kond}} - \sigma_E = 0$$

<b>1. ALAPFOGALMAK .....</b>	<b>1</b>
<b>2. KOORDINÁTARENDSZEREK.....</b>	<b>1</b>
2.1. Descartes-féle koordinátarendszer .....	1
2.2. Általános koordináták .....	2
Elnevezések.....	3
2.3. További speciális koordinátarendszerek.....	3
Síkbeli polárkoordináta-rendszer .....	3
Hengerkoordináta-rendszer .....	3
Gömbi /térbeli polár-/ koordinátarendszer .....	4
<b>3. PONTKINEMATIKA .....</b>	<b>4</b>
3.1. Alapok.....	4
3.2. Tangenciális és centripetális gyorsuláskomponens .....	5
3.3. Körmozgás.....	6
<b>9. A HAMILTON-FÜGGVÉNY .....</b>	<b>6</b>
<b>10. MEREV TESTEK MOZGÁSEGYENLETEI .....</b>	<b>6</b>
<b>11. KONTINUUMMECHANIKA.....</b>	<b>7</b>
11.1. Alapfogalmak .....	7
Térmennyiség időderiváltjai.....	8
Tenzorok .....	8
Feszültségtenzor .....	9
Dilatációs tenzor .....	10
Izotróp rugalmas test .....	10
Egyszerű nyújtás .....	11
Egyszerű nyírás .....	11
Fluidumok .....	12
A Bernoulli-egyenlet.....	12
Viszkozitás.....	13
<b>MÉRLEGEGYENLETEK.....</b>	<b>13</b>