VEKTORSZÁMÍTÁS

1. VEKTORALGEBRA

1.1. A vektor szemléletes értelmezése

Azok a fizikai mennyiségek, melyeknek nagyságukon kívül irányuk is van, **vektorok**. (A vektorok absztrakt matematikai definíciójában döntő szerepe van az összeadásnak és a skalárral való szorzásnak. Az olyan halmazok elemeit nevezik vektoroknak, amelyek elemeire értelmezve vannak ezek a műveletek, és a műveletek lényeges szabályai megegyeznek az irányított egyenes szakaszok összeadásának és számmal való szorzásának főbb szabályaival.)

A vektort egyértelműen megadhatjuk a hosszával és az irányával; nem tekintünk különbözőnek két vektort, ha azok párhuzamos eltolással átvihetők egymásba.

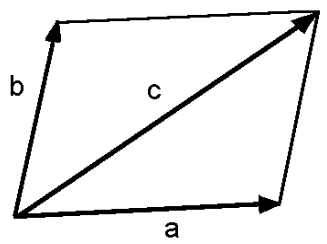
1.2. A vektor abszolút értéke

A vektor kezdő- és végpontjának távolságát a vektor **abszolút érték**ének (**hossz**ának, **nagyság**ának) nevezzük. Jelölése: $|\mathbf{a}|$ vagy a.

Ha a vektor hossza egységnyi, akkor a vektort **egységvektor**nak, ha nulla, akkor **nullvektor**nak mondjuk. Nullvektor csak egy van, de egységvektorból végtelen sok különböző van.

1.3. Vektorok összeadása

Két vektor összegét a paralelogramma-szabály definiálja:



Az összeadás invertálható művelet, inverz művelete a kivonás. Tehát ha

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$, akkor (és csak akkor)

$\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$.

1.4. Vektor szorzása skalárral

Az **a** vektornak λ számmal való szorzata

$\mathbf{b}=\lambda\,\mathbf{a}$ egy olyan vektor, melynek nagysága

$|\mathbf{b}|=|\lambda\,\mathbf{a}|=|\lambda||\mathbf{a}|$,

iránya pedig megegyezik az **a** vektor irányával, ha $\lambda>0$, és ellentétes, ha $\lambda<0$.

1.5. A skalárszorzat

Két vektorhoz, **a**-hoz és **b**-hez rendeljünk hozzá egy számot: a két vektor abszolút értékének és az általuk közbezárt szög koszinuszának szorzatát. Ezt a számot a két vektor **skaláris** (belső) **szorzat**ának nevezzük:

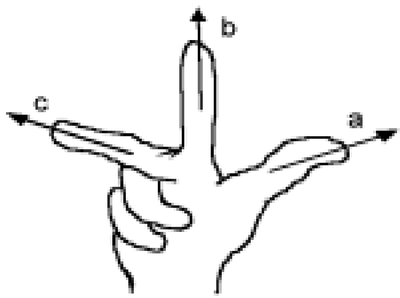
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

Szokásos jelölések még (**a,b**) és $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ is.

1.6. Vektorszorzat

Két vektorhoz, **a**-hoz és **b**-hez rendeljünk hozzá egy **c** vektort, melynek nagysága a két vektor által meghatározott paralelogramma területe, iránya pedig merőleges az **a** és **b** vektorok által meghatározott síkra, úgy, hogy az **a, b** és **c** vektorok jobbrendszert alkossanak, azaz a **c** vektor végpontjából nézve az **a** vektort π-nél kisebb szögű pozitív (az óramutató járásával ellentétes) irányú forgatás vigye át a **b** vektor irányába.

(Szemléletesebben. ha a jobb kéz hüvelykujja az **a**, mutatóujja a **b** vektor irányába mutat, akkor a középső ujj beállítható a **c** vektor irányába.)



Az így definiált **c** vektort az **a** és **b** vektor **vektoriális** (külső) **szorzat**ának nevezzük:

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

Szokásos jelölés még $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ is.

A vektorszorzat abszolút értéke:

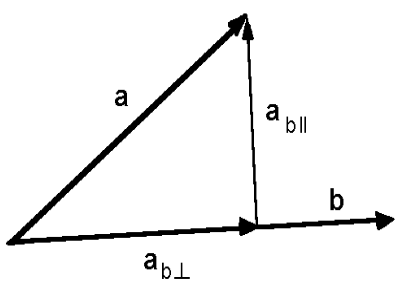
$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}||\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})|.$$

1.7. Vetület

Az **a** vektor (merőleges) vetülete a **b** vektor irányára:

$$a_b=|\mathbf{a}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_b,$$

ahol $\mathbf{e}_b=\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ a **b** irányú egységvektor.



Az

$$\mathbf{a}_{b\|}=a_b\,\mathbf{e}_b=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_b)\,\mathbf{e}_b$$

vektort az **a** vektor **b** irányú (vektor-)komponensének nevezzük.

Az **a** vektor felbontható egy **b** irányú és egy **b**-re merőleges komponens összegére:

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_{b\|}+\mathbf{a}_{b\perp}$$

A **b** vektorra merőleges $\mathbf{a}_{b\perp}$ komponens nagyságát a Pitagorasz-tétellel kapjuk:

$$|\mathbf{a}_{b\perp}|=\sqrt{|\mathbf{a}|^2-a_b^{\,2}}=|\mathbf{a}||\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})|.$$

A vetületek jelentős szerepet játszanak a vektorok szorzásánál - ezt mutatja az alábbi két azonosság:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\; b_a = a_b\; |\mathbf{b}| = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}_{a\|}$$

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}_{a\perp}| = |\mathbf{a}_{b\perp}||\mathbf{b}|$$

1.8. A vektoralgebra fontosabb szabályai és azonosságai

Legyenek **a, b** és **c** tetszőleges vektorok, λ és μ tetszőleges skalárok.

$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$ $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ $\lambda\,\mathbf{0}=\mathbf{0}$ $0\cdot\mathbf{a}=\mathbf{0}$ $1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$ $\lambda(\mu\,\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$ $(\lambda+\mu)\,\mathbf{a}=\lambda\,\mathbf{a}+\mu\,\mathbf{a}$ $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\,\mathbf{a}+\lambda\,\mathbf{b}$	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{0}=0$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ $(\lambda\,\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(\lambda\,\mathbf{b})$ ha $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, akkor (és csak akkor) **a**⊥**b** $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}|^2$	$\mathbf{a}\times\mathbf{0}=\mathbf{0}$ $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ tehát a vektorszorzat antikommutatív! $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ $(\lambda\,\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times(\lambda\,\mathbf{b})$ ha $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$, akkor (és csak akkor) $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$ $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$

A hármas vektorszorzat kifejtési tétele:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

Végül megemlítjük az ún. vegyes szorzatot:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c},$$

melynek értéke -előjeltől eltekintve- a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogatával egyenlő.

1.9. Vektorok Descartes-féle koordinátái

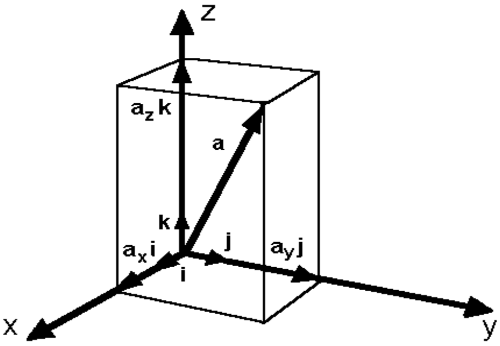
Legyenek **i, j** és **k** ortonormált bázisvektorok, amelyek jobbrendszert alkotnak:

$$|\mathbf{i}|^2=|\mathbf{j}|^2=|\mathbf{k}|^2=1; \qquad \mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$$

Ekkor bármely **a** vektor egyértelműen felírható három merőleges komponens összegeként:

$$\mathbf{a}=a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k}$$

Az a_x, a_y, a_z számokat az **a** vektor koordinátáinak nevezzük az **i, j, k** bázisvektorok által meghatározott jobbsodrású Descartes-féle (x,y,z) koordinátarendszerben.



1.10. Vektorok közötti műveletek Descartes-féle koordinátákban

Összeadás: ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, akkor $c_x = a_x + b_x$, stb.

Szorzás skalárral: ha $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a}$, akkor $c_x = \lambda a_x$, stb.

Skalárszorzat: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Vektorszorzat: ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor $c_x = a_y b_z - a_z b_y$, stb.

Az összeadás, skalárral való szorzás és a vektoriális szorzat y koordinátáját az x koordináta kifejezéséből ciklikus permutációval kapjuk az x index helyett y-t, y helyett z-t és z helyett x-et írva. A z koordinátára vonatkozó kifejezéseket ismételt ciklikus permutációval kapjuk meg.

A vektorszorzatot az alábbi determináns kifejtésével is megkaphatjuk:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Vektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}$$

A vektornak a koordinátatengelyekkel bezárt szögeinek koszinuszai, azaz a vektor iránykoszinuszai:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}$$

Az iránykoszinuszok egyben az **a** irányú $\mathbf{e}_a$ egységvektor koordinátái, ezért

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2. VEKTOR-SKALÁR FÜGGVÉNY

A vektor-skalár függvény független változója skalár, függő változója vektor. Ilyen függvényekre a határérték, folytonosság, differenciálhatóság fogalma a valós függvényeknél tanultakhoz hasonlóan alkalmazható.

Az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ függvény határértéke a $t = t_0$ pontban $\mathbf{a}_0$, vagyis

$\lim\limits_{t \to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0$, ha tetszőleges ε>0 számhoz található olyan δ>0, hogy

$$|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0| < \varepsilon, \quad \text{ha } |t - t_0| < \delta.$$

Az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ függvény a t_0 pontban folytonos, ha létezik határértéke, és az egyenlő a függvényértékkel:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t_0)$$

A $t = t_0$ pontban az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ függvény differenciálható, ha létezik a $\dfrac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} = \dfrac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t_0)}{t - t_0}$ differenciahányados határértéke $t = t_0$-ban. Ha ez a határérték **b**, akkor **b**-t az $\mathbf{a}(t)$ t_0-beli **differenciálhányados**ának, **derivált**jának nevezzük. Jelölése:

$$\dot{\mathbf{a}}(t_0) = \left.\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right|_{t=t_0} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t_0)}{t - t_0}$$

A differenciálhányadost minden pontban képezve kapunk egy újabb vektor-skalár függvényt, a derivált függvényt:

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}(t)$$

Ha ez a függvény is differenciálható, akkor deriváltját az $\mathbf{a}(t)$ függvény második differenciálhányadosának nevezzük:

$$\ddot{\mathbf{a}}(t) = \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} = \frac{d\dot{\mathbf{a}}(t)}{dt}$$

Hasonló módon definiálhatjuk a magasabbrendű deriváltakat.

A skalár-skalár függvények differenciálási szabályaival analóg összefüggések állnak fenn vektor-skalár függvényekre is. Ha λ(t) differenciálható skalár-skalár függvény, **a**(t) és **b**(t) differenciálható vektor-skalár függvények, akkor az alábbi differenciálási szabályok alkalmazhatók:

Összeg differenciálása:

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)\right] = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

Szorzat differenciálása:

$$\frac{d}{dt}\left[\lambda(t)\mathbf{a}(t)\right] = \frac{d\lambda}{dt}\mathbf{a} + \lambda\frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)\right] = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)\right] = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

Közvetett függvény differenciálása:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}(\lambda(t)) = \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt}$$

Ha az **a**(t) vektorokat közös kezdőpontból mérjük fel, akkor a vektorok végpontjai egy térgörbét írnak le, miközben a *t* változó értéke végigfut egy intervallumon; az $\dot{\mathbf{a}}(t)$ derivált vektor pedig a térgörbe érintőjének irányába mutat. Ha az **a**(t) vektor egységvektor, akkor a térgörbe egy gömbfelületen lesz rajta, és az $\dot{\mathbf{a}}(t)$ derivált vektor merőleges lesz az **a**(t)-re. Ezt a következőképpen láthatjuk be.

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{a}(t)\right] = 2\mathbf{a}(t) \cdot \dot{\mathbf{a}}(t) = \frac{d}{dt}\left|\mathbf{a}(t)\right|^2 = \frac{d}{dt}\{1\} = 0$$

Tehát mivel **a**(t) és $\dot{\mathbf{a}}(t)$ skalárszorzata zérus, a két vektor merőleges egymásra.

2.1. Vektor-skalár függvény Descartes-féle koordinátákban

Rögzített Descartes-féle koordinátarendszerben a vektort megadhatjuk koordinátáival, ezért az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ függvény három skalár-skalár függvénnyel egyenértékű:

$$a_x = a_x(t), \qquad a_y = a_y(t), \qquad a_z = a_z(t)$$

Ezek az egyenletek az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ függvény által meghatározott térgörbe paraméteres egyenletei. Ha a *t* paramétert valamelyik egyenletből kifejezzük és behelyettesítjük a másik kettőbe, kapjuk a térgörbe egyenletét

$$f(a_x, a_y, a_z) = 0, g(a_x, a_y, a_z) = 0 \qquad \text{alakban.}$$

A vektor-skalár függvények tulajdonságai megfogalmazhatók a koordinátáik segítségével is. Így pl. bebizonyítható, hogy az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ függvény akkor és csak akkor differenciálható, ha az $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ koordináták mindegyike differenciálható, és ekkor fennáll az

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = \dot{a}_x(t)\mathbf{i} + \dot{a}_y(t)\mathbf{j} + \dot{a}_z(t)\mathbf{k} \qquad \text{összefüggés.}$$

Hasonló összefüggés áll fenn magasabb rendű deriváltakra.

3. SKALÁR- ÉS VEKTORTEREK

A fizikában gyakran előfordul, hogy egyes mennyiségek értéke függ a helytől. Mivel a helyet a helyvektorral adhatjuk meg, így ezeknek a mennyiségeknek a helyfüggését olyan függvények írják le, melyeknek független változója vektor.

Azokat a függvényeket, melyeknek független változója vektor, függő változója pedig skalár, **skalár-vektor függvényék**nek vagy **skalártereke**nek nevezzük. Azokat a függvényeket pedig, melyeknek mindkét változója vektor, **vektor-vektor függvényék**nek vagy **vektortereke**nek nevezzük.

Az ilyen típusú függvényekre hasonló módon értelmezhetjük a határérték és a folytonosság fogalmát, mint a vektor-skalár függvényekre. A képletek alakilag változatlanok maradnak, csak a független vektor változót kell az ott szereplő *t* helyébe írni, a függő változó helyébe pedig a megfelelő skalár vagy vektor függő változót, attól függően, hogy skalár- vagy vektortérről van szó. A differenciálhányados fogalmát azonban nem lehet közvetlenül a vektor-skalár függvény differenciálhányadosának mintájára értelmezni, hiszen a független változó jelen esetben vektor, mellyel osztani nem lehet.

3.1. Skalártér szintfelületei

Legyen

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r})$$

egy skalártér. Mivel az **r** vektort kifejezhetjük x, y, z Descartes-féle koordinátáival:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

ezért a skalárteret egy háromváltozós függvénnyel is leírhatjuk:

$$\varphi = \varphi(x, y, z).$$

A skalártér szemléltetésére bevezethetjük a **szintfelületek** (nívófelületek) fogalmát. A szintfelületek azon **r** pontok mértani helyei, amelyekre a függvény értéke állandó. A szintfelületek egyenlete Descartes-féle koordinátákban:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1 = \text{konst}.$$

Különböző φ_1 értékekhez különböző szintfelületek tartoznak, így a $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ skalártérhez egyparaméteres szintfelület-sereg tartozik - paraméternek tekinthetjük a φ_1 értéket.

A hőmérséklet, a nyomás, ill. a potenciál térbeli eloszlását leíró skalárterek szintfelületeit izoterma, izobár, ill. ekvipotenciális felületeknek nevezzük.

3.2. Iránymenti derivált és gradiens

A közönséges derivált a függő változó változási sebességét jelenti. Skalárterek esetén bevezetjük az **iránymenti derivált** fogalmát. Legyen **e** egy egységvektor. A $\varphi = \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z)$ skalártér **e** irányú iránymenti deriváltjának az $\mathbf{r}_0$ pontban az ehhez az irányhoz tartozó függvényérték-változási sebességet nevezzük:

$$\left.\frac{d\varphi}{ds_{\mathbf{e}}}\right|_{\mathbf{r}_0} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi(\mathbf{r}_0 + \Delta s\,\mathbf{e})}{\Delta s}$$

Látható, hogy ez a derivált egyenlő a $\hat{\varphi} : s \mapsto \varphi(\mathbf{r}_0 + s\,\mathbf{e})$ függvénynek *s* szerinti közönséges deriváltjával az *s=0* pontban:

$$\left.\frac{d\varphi}{ds_{\mathbf{e}}}\right|_{\mathbf{r}_0} = \left.\frac{d\varphi(\mathbf{r}_0 + s\,\mathbf{e})}{ds}\right|_{s=0}$$

Az iránymenti derivált segítségével szemléletesen definiálhatjuk a **gradiens** fogalmát. Képezzük az $\mathbf{r}_0$ pontban az összes iránymenti deriváltat, majd keressük meg azt az $\mathbf{e}_0$ egységvektort, amelyhez tartozó iránymenti derivált a legnagyobb. Az $\mathbf{r}_0$ pontban a gradiens vektor abszolút értéke egyenlő a legnagyobb iránymenti deriválttal, iránya pedig az $\mathbf{e}_0$ irányával megegyező. A gradiens abszolút értéke tehát az adott pontbeli legnagyobb függvényérték-változási sebességet jelenti, iránya pedig a leggyorsabb növekedés irányába mutat.

A gradiens vektor definiálása történhet más módon, a közönséges derivált mintájára is. Ehhez azonban nem használható a differenciahányados alak, mivel vektor nem kerülhet a nevezőbe. Viszont a nevezővel átszorozva a következőképpen definiálható egy skalár-skalár függvény deriváltja: az y=y(x) függvény deriváltja az x_0 pontban y', ha y megváltozása

$$\Delta y = y'(x_0)\,\Delta x + \varepsilon(x_0, \Delta x)\,\Delta x$$

alakban felírható, ahol

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x_0, \Delta x) = 0.$$

Ennek mintájára egy $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvény deriváltja az $\mathbf{r}_0$ pontban a $\Phi = grad\,\varphi$ vektor, ha

$$\Delta\varphi = grad\,\varphi \cdot \Delta\mathbf{r} + \varepsilon(\mathbf{r}_0, \Delta\mathbf{r}) \cdot \Delta\mathbf{r}$$

alakban felírható, ahol

$$\lim_{\Delta\mathbf{r} \to \mathbf{0}} \varepsilon(\mathbf{r}_0, \Delta\mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

3.3. Iránymenti derivált és gradiens Descartes-féle koordinátákban

Legyenek az **e** egységvektor koordinátái e_x, e_y, e_z, az $\mathbf{r}_0$ ponté pedig x_0, y_0, z_0.

Akkor az iránymenti derivált a közvetett függvényre vonatkozó differenciálási szabály felhasználásával:

$$\left.\frac{d\varphi}{ds_{\mathbf{e}}}\right|_{\mathbf{r}_0} = \left.\frac{d\varphi(\mathbf{r}_0 + s\mathbf{e})}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{d}{ds}\varphi(x_0 + s\mathbf{e}_x, y_0 + s\mathbf{e}_y, z_0 + s\mathbf{e}_z)\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{\mathbf{r}_0} \cdot e_x + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{\mathbf{r}_0} \cdot e_y + \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{\mathbf{r}_0} \cdot e_z,$$

ami az **e** vektor skalárszorzata a $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ vektorral. Az utóbbi éppen a gradiens vektor Descartes-féle koordinátákban kifejezve:

$$grad\,\varphi = \frac{d\varphi}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial\varphi}{dx}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{dy}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{dx}\mathbf{k}$$, amivel tehát

$$\left.\frac{d\varphi}{ds_{\mathbf{e}}}\right|_{\mathbf{r}_0} = \left. grad\,\varphi\right|_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{e} = \left|\left. grad\,\varphi\right|_{\mathbf{r}_0}\right| \cdot \cos\alpha$$

ahol α a $grad\,\varphi$ és az **e** vektorok által bezárt szög. Az utóbbi alakból az is látható, hogy az iránymenti derivált maximuma éppen $grad\,\varphi$ ($\cos\alpha$=1). Másrészt -$grad\,\varphi$ éppen a leggyorsabb csökkenés irányába mutat ($\cos\alpha$=-1). Ha viszont $grad\,\varphi$ és **e** merőlegesek egymásra ($\cos\alpha$=0), az iránymenti derivált zérus, azaz a $grad\,\varphi$ merőleges a $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ skalártér szintfelületeire.

3.4. A vektortér vektorvonalai

Legyen $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ egy vektortér. Az **a** vektor koordinátáival kifejezhető, ezért az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektortér egyenértékűen megadható az

$$a_x = a_x(\mathbf{r}) = a_x(x, y, z)$$
$$a_y = a_y(\mathbf{r}) = a_y(x, y, z)$$
$$a_z = a_z(\mathbf{r}) = a_z(x, y, z)$$

három skalártérrel, ill. három darab háromváltozós függvénnyel.

A vektortér szemléltetésére bevezetjük a **vektorvonalak** fogalmát. A vektorvonalak érintője bármely pontban egyező irányú az ahhoz a ponthoz tartozó függvényérték irányával.

A fizikában előforduló két legfontosabb vektortér: az erőtér -ekkor az **a** vektor térerősséget jelent-, és az áramlási tér - ekkor az **a** vektor az áramló folyadék sebességét jelenti. Az erőtér vektorvonalait erővonalaknak, az áramlási tér vektorvonalait áramvonalaknak nevezzük.

Szokás a vektortér függő változójának $|\mathbf{a}|$ abszolút értékét a vektorvonalak sűrűségével jellemezni oly módon, hogy a vektorvonalakra merőleges egységnyi felületen éppen annyi vektorvonal haladjon át, amennyi a függő változó abszolút értéke (ld. később a fluxust).

3.5. Vektorterek integráljai

3.5.1. Vonalintegrál

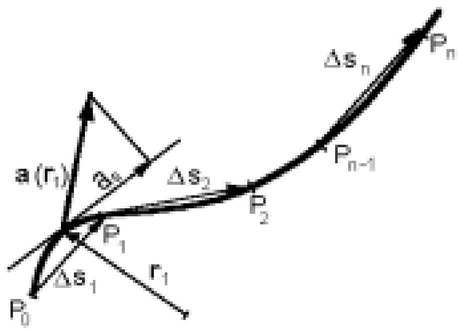
Legyen *g* egy irányított térgörbe, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ pedig egy vektortér. Osszuk fel a *g* görbét *n* részre, az osztópontok legyenek $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Jelöljük a $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ vektort $\overrightarrow{\Delta s_i}$-vel, a $P_{i-1}P_i$ görbeív valamely közbenső pontjának helyvektorát $\mathbf{r}_i$-vel. Képezzük a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{s}_i$$

integrálközelítő összeget.

Ennek az összegnek a "végtelenül finomodó beosztásra vonatkozó határértéke" a **vonalintegrál**:

$$\lim_{\Delta \mathbf{s}_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{s}_i = \int_g \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dr} = \int_g a_s \, ds ,$$



ahol *ds* jelöli az ívhosszelemet, a_s pedig az **a** vektornak a görbe érintője irányába eső vetületét.

Descartes-féle koordinátarendszerben a vonalintegrál egy közönséges egyváltozós határozott integrállá alakítható át. Legyen adott a *g* görbe paraméteres alakban (a paraméter lehet pl. az ívhossz vagy az idő):

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad z = z(\tau), \quad \tau_1 \le \tau \le \tau_2$$

Ekkor a vonalintegrál a következőképpen alakítható át:

$$\int_g \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dr} = \int_g (a_x dx + a_y dy + a_z dz) =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ a_x [x(\tau), y(\tau), z(\tau)] \frac{dx(\tau)}{d\tau} + a_y [x(\tau), y(\tau), z(\tau)] \frac{dy(\tau)}{d\tau} + a_z [x(\tau), y(\tau), z(\tau)] \frac{dz(\tau)}{d\tau} \right\} d\tau$$

3.5.2. Felületi integrál

Legyen *A* egy felület, $\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{r})$ pedig egy vektortér. Osszuk be az *A* felületet *n* részre, a részek területei: $\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots, \Delta A_n$. Mindegyik részfelületen válasszunk ki egy pontot, melyek helyvektorai: $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$. A felület normálisa az **r** pontban legyen **n(r).** Képezzük a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(\mathbf{r}_i)\cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i)\,\Delta A_i$$

integrálközelítő összeget. Ennek az összegnek a "végtelenül finomodó beosztásra vonatkozó határértéke" a **felületi integrál**:

$$\lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(\mathbf{r}_i)\cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i)\Delta A_i = \int_A \mathbf{a}(\mathbf{r})\cdot \mathbf{dA} = \int_A a_n \mathrm{d}A \equiv \Phi_a , \qquad \text{ahol} \quad a_n = \mathbf{a}(\mathbf{r})\cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})$$

az **a** vektor normális irányú komponense. Az $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektortérnek az *A* felületre vett felületi integrálját az **a fluxusának** nevezzük. A vektorvonalak sűrűségének szokásos megválasztása esetén a fluxus éppen egyenlő az *A* felületen áthaladó vektorvonalak számával.

Ha a felület normálvektorának **n** helyett -**n**-et választjuk, akkor a felületi integrál előjelet vált. Bizonyos speciális esetekben az egyik irány kitüntetett irány:

1./ zárt felület esetében mindig a "külső" (kifelé mutató) normálist választjuk;

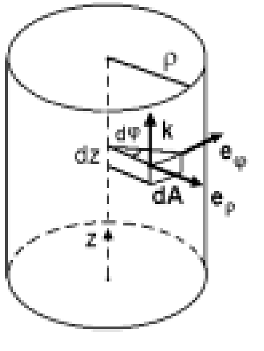
2./ ha a felületet egy irányított zárt görbe határolja, akkor a felület normálisát úgy választjuk meg, hogy az a görbe körüljárási irányával jobbcsavart alkosson.

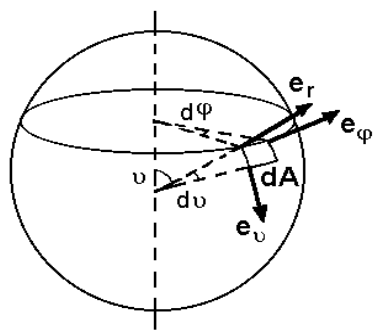
Lerögzítve a felület normálisának irányát, a felületen a zárt görbéket mindig olyan körüljárással vesszük fel, hogy a normális iránya azzal jobbcsavart alkosson.

Ezek a konvenciók különösen olyan azonosságok alkalmazásánál fontosak, ahol egyidejűleg többféle integrál fordul elő (ld. később Gauss-Osztrogradszkij-tétel, Stokes-tétel).

A felületi integrál általában kétszeres integrállal számítható ki. Az integrál kiszámításához szükséges, hogy a *dA* felületelemet a koordinátákkal és a koordináta-differenciálokkal fejezzük ki.

Henger-, ill. gömbfelület esetében a *dA* felületelemet célszerű úgy megválasztani, hogy élei az $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{k}$, ill. az $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\vartheta$ bázisvektorok irányába mutassanak.





$dA = \rho d\varphi dz$ $\qquad$ $dA = r^2 \sin \upsilon d\upsilon d\varphi$

3.5.3. Vektorértékű vonal- és felületi integrál

Ha a vonalintegrál integrálközelítő összegében a skaláris szorzást vektoriális szorzásra cseréljük ki, akkor a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(\mathbf{r}_i) \times \Delta\mathbf{s}_i$$

integrálközelítő összeget kapjuk, melynek határértéke az

$$\int_{\mathrm{g}} \mathbf{a} \times \mathbf{dr}$$

vektorértékű vonalintegrál.

Hasonlóan a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(\mathbf{r}_i) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}_i)\, \Delta A_i$$

integrálközelítő összeg határértéke az

$$\int_{\mathrm{A}} \mathbf{a} \times \mathbf{dA}$$

vektorértékű felületi integrál.

3.5.4. Vektortér térfogati integrálja

Legyen $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ egy vektortér, *V* pedig a tér egy tartománya. Osszuk be a *V* tartományt *n* részre, melyek térfogatai: $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$. Minden résztartományból válasszunk ki egy pontot, melyek helyvektorai: $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$. Képezzük a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}(\mathbf{r}_i) \Delta V_i$$

integrálközelítő összeget. Ennek az összegnek a "végtelenül finomodó beosztásra vonatkozó határértéke" a

$$\int_{\mathrm{V}} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \mathrm{dV}$$

térfogati integrál.

Henger, ill. gömb esetén célszerű a *dV* térfogatelemet téglatestnek választani, melynek élei a henger-, ill. polárkoordináta-rendszer bázisvektorai irányába mutatnak; ekkor:

hengernél: $dV = dA\, d\rho = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$,

gömbnél: $dV = dA\, dr = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$.

3.5.5. Az integrálok tulajdonságai

A fentebb tárgyalt integrálokra is érvényesek a közönséges integrálszámítás fontosabb szabályai:

a) összeg tagonként integrálható;

b) konstans az integráljel elé kiemelhető;

c) egymásba nem nyúló tartományok (intervallumok, felületek) egyesítésére vett integrál egyenlő a résztartományokra vett integrálok összegével.

3.6. Rotáció

Legyen $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ egy vektortér, *S* pedig egy, az **r** ponton átmenő sík, melynek normálvektora **n**. Az *S* síkon vegyünk fel egy irányított zárt *g* görbét úgy, hogy az **r** pont a görbe belsejébe essen. Az

$$\frac{1}{\Delta A}\oint_g \mathbf{a}\cdot\mathbf{dr}$$

mennyiség határértékét, miközben a (rögzített) *S* síkban lévő *g* görbe a (rögzített) **r** pontra zsugorodik, jelöljük b_n-nel:

$$b_n = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{1}{\Delta A}\oint_g \mathbf{a}\cdot\mathbf{dr},$$

ahol ΔA jelöli a *g* görbe által körülzárt területet. Az **r** pontot továbbra is rögzítve, de az *S* síkot (így az **n** normálvektort is) változtatva, minden **n**-hez kapunk egy b_n értéket. Kimutatható, hogy az így kapott b_n értékek egy vektornak az **n** irányú komponensei; ezt a vektort az **a** vektor **rotáció**jának nevezzük az **r** pontban:

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})\cdot\mathbf{n} = (\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_n = \mathrm{rot}_n\mathbf{a} = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{1}{\Delta A}\oint_g \mathbf{a}\cdot\mathbf{dr}$$

Kimutatható, hogy Descartes-koordinátákban

$$rot_x\mathbf{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$$

A másik két koordinátát ciklikus permutációval kapjuk:

$$rot_y\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}$$

$$rot_z\mathbf{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

A $\oint_g \mathbf{a}\cdot\mathbf{dr}$ mennyiséget a vektortérnek a *g* görbén vett **cirkuláció**jának nevezik. Ez a mennyiség a vektortér vektorvonalainak csavarodásával függ össze. A cirkulációnak és a bezárt felületnek a hányadosát, ami a rotáció definíciójában szerepel, átlagos felületi örvénysűrűségnek nevezik. Ha az **a** vektortér áramlási tér, akkor a rotáció az áramlás forgó, örvénylő jellegével függ össze.

3.7. Divergencia

Az $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektortér fluxusa egy zárt *A* felületen megadja az *A* felület belsejéből kijövő vektorvonalak számát (ez természetesen úgy értendő, hogy a felületbe bemenő vektorvonalak negatív előjellel jönnek számításba). Ezt a mennyiséget az **a** vektortér **forrás**ának nevezzük az *A* felület által körülzárt ΔV térfogatú tartományban. Ha **a** az egységnyi sűrűségű inkompresszibilis folyadék sebessége, akkor az **a** forrása számértékben egyenlő a ΔV térfogatból időegység alatt kiáramló folyadék térfogatával - ez indokolja a "forrás" elnevezést.

A forrásnak és a térfogatnak a hányadosát **átlagos forrássűrűség**nek nevezzük. Az átlagos forrássűrűség határértékét, amint a ΔV térfogat egy (rögzített) **r** pontra zsugorodik, az **a** vektortér **r** pontbeli **forrássűrűség**ének vagy **divergenciá**jának nevezzük:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_A \mathbf{a} \cdot \mathbf{dA}$$

Kimutatható, hogy Descartes-koordinátákban

I $$div\,\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

3.8. Stokes-tétel

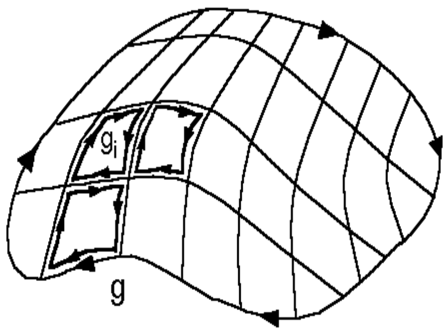
A zárt görbe menti és a felületi integrálok között állapít meg összefüggést Stokes tétele (rotáció-tétel):

$$\oint_g \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_A \mathrm{rot}\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{dA}$$

ahol *A* a *g* irányított zárt görbe által határolt felület.

A Stokes-tétel bizonyítása a következő gondolatmeneten alapul: osszuk be az *A* felületet olyan kis felületrészekre, amelyeken az átlagos felületi örvénysűrűség már jól megközelíti a rotáció értékét, azaz

$$\Delta A_i \,\mathrm{rot}_{n_i} \mathbf{a} \approx \oint_{g_i} \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$



ahol g_i az i-edik részfelületet, a ΔA_i területű, $\mathbf{n}_i$ normálisú felületet határoló zárt görbe. Összegezve:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \,\mathrm{rot}_{n_i} \mathbf{a} \approx \sum_{i=1}^{n} \oint_{g_i} \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \qquad (✡)$$

Figyeljük meg, hogy a görbe menti integráloknál a "belső" szakaszok járulékai két szomszédos görbénél szerepelnek ellentétes előjellel (ábra), ezért az összegezésnél kiesnek. Marad tehát

$$\sum_{i=1}^{n} \oint_{g_i} \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_g \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

míg (✡) bal oldalán a $\int_A \mathrm{rot}\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{dA}$ integrál közelítő összege szerepel, így a (✡) összefüggésből határértékben következik a Stokes-tétel.

3.9. Vektortér örvénymentességének feltételei

Örvénymentesnek nevezzük az **a** vektorteret, ha rotációja nulla. Az örvénymentes vektorterek főbb sajátosságai:

a./ $rot\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$

b./ A vektortér egy φ **skalárpotenciál**ból származtatható: $\mathbf{a} = grad\,\varphi$

c./ A vektortér vonalintegrálja minden olyan görbére egyenlő, melyek kezdő- és végpontja megegyezik; azaz a vonalintegrál független az úttól, csak a kezdő- és végponttól függ.

d./ A vektortérnek bármely zárt görbére vett vonalintegrálja nulla.

Ha a vektortér a fenti tulajdonságok bármelyikével rendelkezik, akkor rendelkezik a többivel is. Az a./ és d./ tulajdonságok egyenértékűségét a Stokes-tételből közvetlenül láthatjuk. A c./ tulajdonságot a következőképpen láthatjuk be: Legyen g_1 és g_2 két olyan görbe, amelynek kezdőpontja P_1, végpontja P_2. A g_2 görbe irányítását megfordítva egy *g* zárt görbét kapunk, amelyre:

$$\oint_g \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{g_1} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} - \oint_{g_2} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}$$

Ezért d./-ből következik c./ és viszont.

Végül tegyük fel, hogy

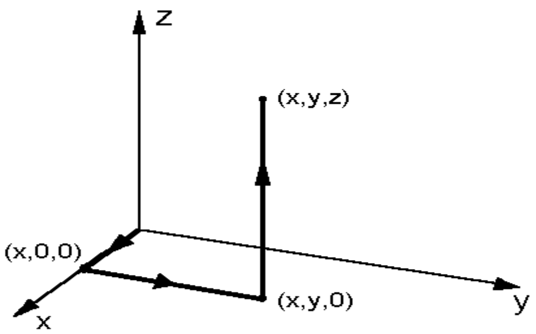
$rot\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$, azaz $\dfrac{\partial a_z}{\partial y} = \dfrac{\partial a_y}{\partial z}$, stb.

Jelöljük $\varphi(\mathbf{r})$-rel az alábbi módon definiált skalárteret:

$$\varphi(x,y,z) = \int_0^x a_x(x,0,0)dx + \int_0^y a_y(x,y,0)dy + \int_0^z a_z(x,y,z)dz\,,$$ azaz

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_g \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}$$

ahol *g* egy koordinátatengelyekkel párhuzamos élekből álló töröttvonal, melynek kezdőpontja az origó, végpontja az (*x,y,z*) pont.



Bebizonyítható, hogy ha $rot\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$, akkor $grad\,\varphi = \mathbf{a}$, azaz az a./ sajátságból következik a b./ sajátság; ugyanakkor b./-ből is következik a./, mert

$rot\ grad\,\varphi = 0$ bármely $\varphi(\mathbf{r})$-re.

A c./ tulajdonság miatt

$$\varphi = \int_{g_1} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}\,,$$

ahol g_1 az origóban kezdődő és az $\mathbf{r}$ pontban végződő tetszőleges görbe. Ha φ_0 kielégíti az $\mathbf{a} = grad\varphi_0$ egyenletet, akkor minden olyan φ skalártér is kielégíti, amelyik a $\varphi_0(\mathbf{r})$-től csak konstansban tér el ($\varphi = \varphi_0 + c$), mert

$$grad\,\varphi = grad\,(\varphi_0 + c) = grad\,\varphi_0 + grad\,c = grad\,\varphi_0 = \mathbf{a}$$

Adott örvénymentes térhez tehát a potenciált csak egy önkényesen választható additív állandó erejéig határozhatjuk meg, emiatt a *g* görbéről szükségtelen kikötni, hogy az origóban kezdődjön.

3.10. Gauss-Osztrogradszkij-tétel

A zárt felületi és térfogati integrálok között állapít meg összefüggést a Gauss-Osztrogradszkij-tétel (Gauss-tétel, divergencia-tétel):

$$\int_A \mathbf{a} \cdot \mathbf{dA} = \int_V \mathrm{div}\mathbf{a}\mathrm{dV}$$

ahol *A* a *V* térfogatot határoló zárt felület.

A Gauss-tétel bizonyítása teljesen analóg a Stokes-tételével. A *V* térfogatot kis részekre osztva, a divergencia definíciójából kapjuk, hogy közelítőleg

$$\int_{A_i} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dA}_i \approx \Delta V_i \mathrm{div}\mathbf{a} \quad i = 1,\ldots,n$$

ahol A_i a ΔV_i térfogatot határoló zárt felület. Összegezésnél a "belső" felületek járulékai eltűnnek, és határértékben adódik a Gauss-tétel.

3.11. Vektortér forrásmentességének feltétele

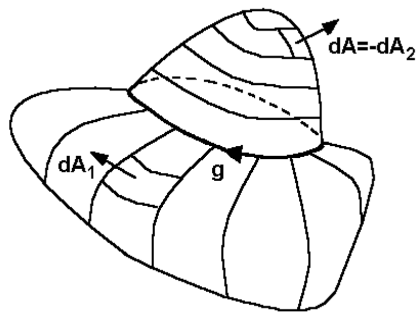
A forrásmentes vektorterek főbb sajátságai:

a./ $div\,\mathbf{a} = 0$

b./ A vektortér **vektorpotenciál**ból származtatható, azaz van olyan **b** vektortér, amelyre $rot\,\mathbf{b} = \mathbf{a}$

c./ A vektortér felületi integrálja egyenlő az olyan felületekre, amelyeket ugyanaz a *g* irányított zárt görbe határol.

d./ A vektortér fluxusa bármely zárt felületen zérus.



A fenti tulajdonságok bármelyikéből következik a többi. Az a./ és d./ tulajdonságok egyenértékűsége közvetlenül jön a Gauss-tételből. A c./ és d./ tulajdonságok egyenértékűségét könnyen beláthatjuk, ha a *g* zárt görbére két felületet fektetünk rá. Az A_2 felület irányítását megfordítva egy zárt *A* felületet kapunk, amelyre

$$\int_A \mathbf{a} \cdot \mathbf{dA} = \int_{A_1} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dA}_1 - \int_{A_2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{dA}_2$$

A vektorpotenciálból származtatott vektortér forrásmentes, mert $div\, rot\ \mathbf{b}$ bármely $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ vektortér esetén zérus. A tétel fordítottjának igazolása és adott forrásmentes vektortérhez tartozó vektorpotenciál megkonstruálása bonyolultabb, ezért ezzel itt nem foglalkozunk.

3.12. Nabla-operátor. Magasabbrendű deriváltak. Vektoranalitikai azonosságok

A skalár- és vektorterek differenciálásával kapcsolatban szokás bevezetni a nabla-operátort:

$$\vec{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

A nabla egy vektoroperátor, amelyet szorozhatunk jobbról skalár- vagy vektortérrel. Ezzel a jelöléssel könnyen megjegyezhetővé válnak a vektoranalitikai azonosságok, mert a vektoroknál tanult szorzás szabályai általában érvényesek maradnak olyan szorzatban, amelynek első tényezője a $\vec{\nabla}$.

Skalártérre alkalmazva a nabla-operátort:

$$\vec{\nabla}\varphi = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \mathrm{grad}\varphi$$

Vektortérrel skalárisan szorozva:

$$\vec{\nabla}\cdot\mathbf{a} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \mathrm{div}\mathbf{a}$$

és vektoriálisan szorozva:

$$\vec{\nabla}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \mathrm{rot}\mathbf{a}$$

A nabla-operátor önmagával vett skalárszorzatát Laplace-operátornak nevezzük:

$$\Delta = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \text{tehát}$$

$$\Delta u = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}u\right) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Megjegyezzük, hogy a nabla-operátort lehetséges definiálni nemcsak Descartes-koordinátákkal, hanem általánosan is. Más koordinátákban az első- és másodrendű deriváltak kifejezése más, ugyanakkor az alábbi vektoranalitikai azonosságok minden koordinátarendszerben érvényesek.

A skalár- és vektorterek differenciálási szabályai származtathatók a közönséges differenciálás szabályaiból, amelyek felhasználásával könnyű igazolni Descartes-féle koordinátákban az alábbi vektoranalitikai azonosságokat:

Összeg differenciálása:

$$\mathrm{grad}(\varphi+\psi)=\mathrm{grad}\varphi+\mathrm{grad}\psi$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathrm{rot}\mathbf{a}+\mathrm{rot}\mathbf{b}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathrm{div}\mathbf{a}+\mathrm{div}\mathbf{b}$$

Szorzat differenciálása:

$$\mathrm{grad}(\varphi\cdot\psi)=\varphi\ \ \mathrm{grad}\psi+\psi\mathrm{grad}\varphi$$

$$\mathrm{rot}(\varphi\mathbf{a})=\varphi\mathrm{rot}\mathbf{a}+\mathrm{grad}\varphi\times\mathbf{a}$$

$$\mathrm{div}(\varphi\mathbf{a})=\varphi\mathrm{div}\mathbf{a}+\mathrm{grad}\varphi\cdot\mathbf{a}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=-\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a}$$

Közvetett függvény differenciálása:

$$\frac{d}{dt}\varphi(\mathbf{r}(t))=grad\ \varphi\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$grad\ f(\varphi(\mathbf{r}))=\frac{df}{d\varphi}\cdot grad\ \varphi$$

Magasabbrendű deriváltak:

$$div\ grad\varphi=\Delta\,\varphi$$

$$grad\ div\,\mathbf{a}=rot\ rot\ \mathbf{a}+\Delta\,\mathbf{a}$$

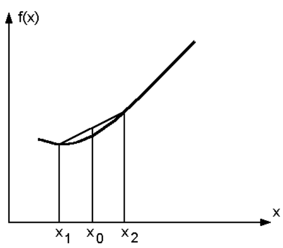
$$rot\ grad\ \varphi=0$$

$$div\ rot\ \mathbf{a}=0$$

Ezekben az összefüggésekben φ és ψ skalártereket, **a** és **b** vektortereket jelölnek, *t* skalárváltozó, *f* pedig skalár-skalár függvény.

Homogén vektortér divergenciája ill. rotációja nulla ill. nullvektor; homogén (azaz konstans) skalártér gradiense zérus. Az utóbbi állítás megfordítható: ha egy skalártér gradiense a tér egy összefüggő tartományában zérus, akkor a skalártér ebben a tartományban konstans.

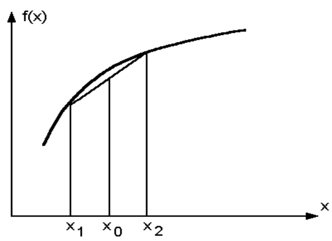
A fentiekben láttuk az első deriváltak ($\nabla\varphi$, $\nabla\cdot\mathbf{a}$, $\nabla\times\mathbf{a}$) "invariáns" (azaz koordinátarendszertől független) jelentését. A Δ Laplace-operátornak is van ilyen jelentése. Emlékeztetőül: ha az *f* egyváltozós függvény grafikonja alulról konvex (ill. konkáv), akkor az f'' második derivált negatív (ill. pozitív). Ezt a sajátságot többváltozós függvényekre a következőképpen általánosíthatjuk.



konvex függvény

$$f''>0$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$



konkáv függvény

$$f''<0$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

$\Delta\varphi > 0 \quad \Rightarrow$ a kérdéses pontban a φ értéke kisebb, mint a "környezeti átlag". Itt a környezeti átlagot a következőképpen értjük: vegyük körül az $\mathbf{r}_0$ pontot egy kis ε sugarú g_ε gömbbel; ekkor a környezeti átlag φ-nek a g_ε felületre vett átlaga:

$$\rangle\varphi\langle_\varepsilon = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{g_\varepsilon}\varphi(\mathbf{r})\cdot\mathbf{dA}$$

A gömbfelület pontjaiban

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \varphi(\mathbf{r}_0) + grad\,\varphi\big|_{\mathbf{r}_0}\cdot\mathbf{n}\varepsilon \approx \varphi(\mathbf{r}_0) + grad\,\varphi\big|_{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n}\varepsilon, \quad \text{ezért}$$

$$\rangle\varphi\langle_\varepsilon \approx \varphi(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{g_\varepsilon}\mathrm{grad}\varphi\cdot\varepsilon\mathbf{dA}$$

$$\int_{g_\varepsilon}\mathrm{grad}\varphi\mathrm{dA} = \int \mathrm{divgrad}\varphi\mathrm{dV} \approx \Delta\varphi\big|_{\mathbf{r}_0}\cdot\frac{4\pi}{3}\varepsilon^3$$

Ezen összefüggésekből

$$\Delta\varphi = 3\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\langle\varphi\rangle_\varepsilon - \varphi}{\varepsilon^2}$$

Tehát ha $\Delta\varphi > 0$, akkor a környezeti átlag -elég kis környezetben- nagyobb, mint a φ pontbeli értéke ($\langle\varphi\rangle_\varepsilon > \varphi$).