

Bevezető fizika villamosmérnököknek – Oktatási segédlet (Vankó Péter, 2015.)

I. Általános megjegyzések

1. A Bevezető fizika gyakorlat célja nem a középiskolás tananyag egészének vagy meghatározott részének (újra) megtanítása, nem is a párhuzamosan folyó Fizika 1 előadás és gyakorlat átismétlése, hanem *alapvető problémamegoldó készségek* kialakítása és fejlesztése. Emiatt a gyakorlat anyaga nem követi szorosan a Fizika 1 tárgy tananyagát (bár témája, elsősorban a mechanika és kis részben a hőtan, igazodik ahhoz), nem törekszik „teljesség”-re, vállaltan csak a tananyag egy-egy kis részével foglalkozik.

Az egyes feladatsorok egy-egy alapvető fizikai fejezet (pl. tömegpont statikája, dinamikája, kinematikája) köré szerveződnek, de a feladatok eközben egy-egy matematikai eljárás (pl. vektorok felbontása, egyenletrendszerek megoldása, függvényvizsgálat) gyakorlására is alkalmat adnak. Alapvető célunk a problémamegoldást segítő gondolkozás kialakítása, ezért a feladatmegoldás fontos része a szöveges feladat értelmezése (lefordítása a matematika nyelvére), valamint az eredmények diszkutálása. Emiatt egy-egy feladat megoldására több időt kell szánnunk, és így a feladatsorok rövidebbek, kevesebb feladtból állnak. (De ha még ez is túl sok egy órára, akkor inkább kevesebb feladatot beszéljünk meg, de azokat rendesen, alaposan. A maradék pedig lehet „házi feladat”).

2. A gyakorlatok elején fontos néhány alapvető fogalom, módszer, matematikai eljárás ismertetése (ezek az egyes gyakorlatoknál szerepelnek). Ugyanakkor ez csak az óra kis része legyen, a lényeg a módszerek konkrét feladatokon való alkalmazása legyen.

Nagyon fontos a szemléletesség: a gyakorlatokon sokat rajzoljunk (vektorábrákat, időfüggvényeket és más grafikonokat). Ha van a teremben, használjunk színes krétát: például a különböző erőket más-más színnel jelölhetjük. Ennek hiányában is meg lehet különböztetni pl. erőt, gyorsulást stb. különböző nyilakkal (nyitott, zárt háromszög stb.). Ha ilyeneket használunk, legyünk következetesek, használjuk minden órán ugyanazt a jelölést.

A feladatok megoldását a nagy létszám miatt célszerű a gyakorlatvezetőnek megmutatnia, felírnia. A lehetőségekhez képest azonban próbáljuk aktivizálni a hallgatókat is (kérdésekkel, egy-egy rövid megállással: „Ki látja, hogy hogyan menjünk tovább?” stb.). Hívjuk fel a figyelmüket, hogy nyugodtan kérdezzenek az óra közben és az óra után is, illetve nyugodtan szóljanak, ha valamit nem értenek, vagy ha valamit rosszul írunk fel a táblára. (Táblánál dolgozva nehéz észrevenni az elírásokat, kisebb hibákat.)

3. A tanulás sokkal hatékonyabb, ha a hallgatók már előzetesen is foglalkoznak a feladatokkal, legalább megpróbálják azokat megoldani. Egy sikertelen otthoni próbálkozás és az azt követő órai megbeszélés sokkal többet ér, mintha valaki először az órán látja a feladatot. Ezért hívjuk fel a hallgatók figyelmét a következőre (ez a tanács a feladatsorok elején is szerepel):

A gyakorlat akkor igazán hasznos, ha előtte otthon megpróbálja megoldani a feladatokat. Az se baj, ha nem (mindegyik) sikerül, az a lényeg, hogy foglalkozzon velük!

Hívjuk fel a figyelmüket arra is, hogy a zárthelyikre is csak sok feladat megoldásával lehet eredményesen felkészülni, a gyakorlatokon való passzív részvétel kevés.

II. A hallgatóknak kiadott feladatsorok

A gyakorlatokra tíz feladatsor készült a következő témákról:

1. gyakorlat – tömegpontok statikája
2. gyakorlat – tömegpontok dinamikája
3. gyakorlat – tömegpontok kinematikája
4. gyakorlat – körmozgás
5. gyakorlat – munka, energia
6. gyakorlat – rezgőmozgás
7. gyakorlat – ütközések
8. gyakorlat – merev testek, perdület
9. gyakorlat – hullámok
10. gyakorlat – ideális gázok, halmazállapotok

A következő tizenegy oldalon (a 10. gyakorlat feladatlapja kétoldalas) a hallgatóknak kiadott – a gyakorlat előtt a Fizipédiára feltöltött – feladatlapok találhatók a kiadottal pontosan megegyező (oldalszámozás nélküli, külön-külön is kinyomtatható, kiosztható) formában.

Ezt követik a részletes útmutatók az egyes gyakorlatok feladatainak tanításához, amelyek minden esetben egy rövid, általános bevezetővel kezdődnek, majd a feladatok részletes megoldásával, diszkutálásával folytatódnak.

A segédlet az 2015/2016-os tanévben feladott zárthelyi feladatsorokkal és azok részletes javítási és pontozási útmutatójával zárul.

Bevezető fizika villamosmérnököknek

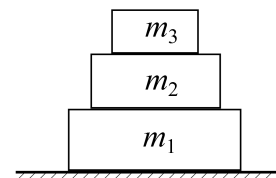
1. gyakorlat

A gyakorlat akkor igazán hasznos, ha előtte otthon megpróbálja megoldani a feladatokat. Az se baj, ha nem (mindegyik) sikerül, az a lényeg, hogy foglalkozzon velük!

1. Egy vízszintes asztalon három test nyugszik egymáson (lásd az ábrát). Tömegük $m_1 = 10\text{ kg}$, $m_2 = 6\text{ kg}$ és $m_3 = 2\text{ kg}$.

Rajzolja le külön-külön a testeket és rajzolja be az egyes testekre ható erőket!

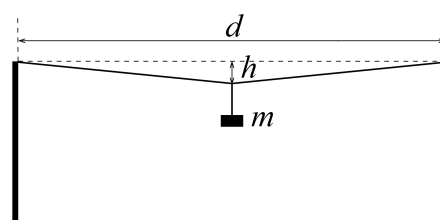
Adja meg paraméteresen és numerikusan az egyes erők nagyságát!



2. Egy könnyű kötel két, egymástól $d = 20\text{ m}$ távolságra lévő oszlop közé van kikötve. A kötel közepére $m = 50\text{ kg}$ tömegű testet akasztunk, ennek hatására a kötel közepe $h = 1\text{ m}$ mélyre belóg (lásd az ábrát).

Rajzolja be a csomópontban ható erőket!

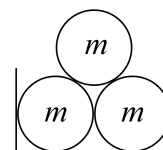
Mekkora erő feszíti a kötelet?



3. Egy függőleges falú dobozban éppen elfér (anélkül, hogy az oldalfalakat nyomnák) két egyforma, $m = 2\text{ kg}$ tömegű henger. A hengerekre egy harmadik, ugyanolyan hengert fektetünk (lásd az ábrát).

Rajzolja le külön-külön a hengereket, és rajzolja be az egyes hengerekre ható erőket!

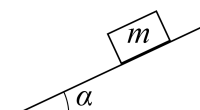
Mekkora erővel nyomják a hengerek egymást, valamint a doboz alsó és oldalsó falait?



4. Egy α hajlásszögű lejtőre m tömegű testet helyezünk (lásd az ábrát). A test a súrlódás miatt nyugalomban van.

Rajzolja be az m tömegű testre ható erőket!

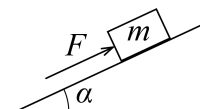
Legalább mekkora a lejtő és a test közti μ (tapadási) súrlódási együttható?



5. Az előző feladatban szereplő testet mekkora *lejtővel párhuzamos* F erővel lehet felfelé megmozdítani?

Rajzolja be most is az m tömegű testre ható erőket!

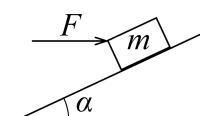
(Tegye fel, hogy a súrlódási együttható éppen az előző feladatban meghatározott minimális érték!)



6. Mekkora F erőre van szükség a test megmozdításához, ha az erő *vízszintesen* hat?

Rajzolja be most is az m tömegű testre ható erőket!

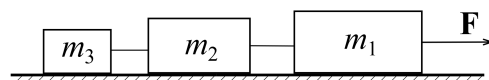
Diszkutálja a feladatot! Vizsgálja meg azt az esetet is, ha meredek a lejtő és a súrlódási együttható nagy!



Bevezető fizika villamosmérnököknek

2. gyakorlat

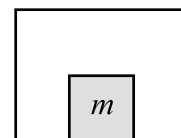
1. Egy vízszintes asztalon három test fekszik *vékony, nyújthatatlan* kötéllel összekötve. Tömegük $m_1 = 10\text{ kg}$, $m_2 = 6\text{ kg}$ és $m_3 = 2\text{ kg}$. Az m_1 tömegű testet $F = 80\text{ N}$ erővel húzzuk.



Mekkora a testek gyorsulása és az egyes köteleket feszítő erők, ha

- a testek és a talaj közt nincs súrlódás,
- a testek és a talaj közt $\mu = 0,3$ a csúszási súrlódási együttható?

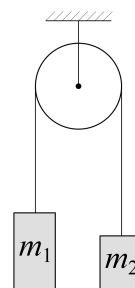
2. Egy $m = 10\text{ kg}$ tömegű kocka egy doboz belsejében, a doboz alján nyugszik (lásd az ábrát).



Mekkora erővel nyomja a kocka a doboz alját, ha

- a dobozt $a = 6\text{ m/s}^2$ gyorsulással függőlegesen felfelé gyorsítjuk,
- a doboz szabadon esik (g gyorsulással gyorsul lefelé)?

3. Egy *könnyű, súrlódásmentes* csigán *könnyű, nyújthatatlan* kötelet vetünk át (lásd az ábrát). A köté végére $m_1 = 10\text{ kg}$ és $m_2 = 6\text{ kg}$ tömegű testeket akasztunk, majd a rendszert nyugalmi állapotban magára hagyjuk.



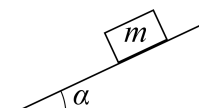
Értelmezzük a *dőlt* betűkkel írt szavakat!

Mekkora erő feszíti a kötelet?

Mekkora és milyen irányú lesz az egyes testek gyorsulása?

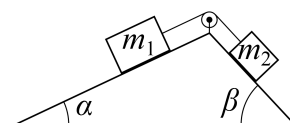
Mekkora erővel hat a felső köté a plafonra?

4. Egy $\alpha = 25^\circ$ hajlásszögű lejtőre $m = 1,5\text{ kg}$ tömegű testet helyezünk (lásd az ábrát). A test és a lejtő között $\mu = 0,3$ a csúszási súrlódási együttható.



Elindul-e a kezdetben nyugalomban lévő test, ha elengedjük? Ha igen, mekkora a gyorsulása?

5. Az ábrán látható kettős lejtőn a testeket egy *könnyű, súrlódásmentes* csigán átvett *ideális* köté köti össze. A testek kezdetben nyugalomban vannak.



Mekkora és milyen irányú lenne a testek gyorsulása, ha a testek és a lejtők közt nem lenne súrlódás? Oldjuk meg a feladatot paraméteresen, majd határozzuk meg a gyorsulás numerikus értékét is!

Adatok: $\alpha = 25^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $m_1 = 3\text{ kg}$, $m_2 = 2,5\text{ kg}$.

Mekkora a testek gyorsulása, ha a testek és a lejtő között mindkét oldalon $\mu = 0,1$ a súrlódási együttható? (Tegyük fel, hogy a tapadási és a csúszási súrlódási együttható megegyezik.) Oldjuk meg a feladatot paraméteresen, majd a fenti adatokkal határozzuk meg a gyorsulás numerikus értékét is!

Diszkutáljuk a feladatot! Mi történhet a rendszerrel a testek elengedése után? Rögzített α és β értékek mellett határozzuk meg, hogy az m_1/m_2 tömegarány és a μ súrlódási együttható függvényében mikor melyik „forgatókönyv” valósul meg!

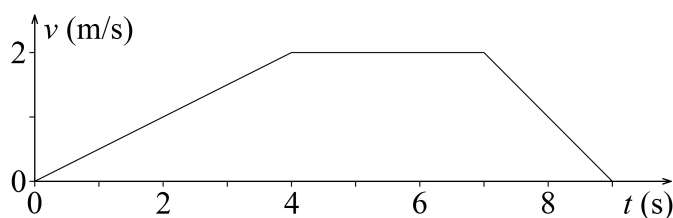
Bevezető fizika villamosmérnököknek

3. gyakorlat

1. Egy autó a 90 km-es út első felét 50 km/h sebességgel, a második felét 130 km/h sebességgel teszi meg.

Mekkora az átlagsebessége?

2. A grafikon egy test sebességét ábrázolja az idő függvényében.



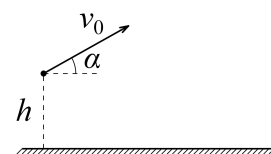
A grafikonról látszik, hogy a mozgás során a gyorsulás szakaszonként állandó. Határozza meg az egyes szakaszokon a gyorsulást! Ábrázolja a gyorsulást az idő függvényében!

Határozza meg a test által a mozgás folyamán megtett utat!

Ábrázolja a test elmozdulását az idő függvényében! (A $t = 0$ pillanatban a test az $x = 0$ helyen van.)

3. Egy testet a talajtól számított h magasságból, v_0 kezdősebességgel, a vízszintessel α szögben elhajítunk.

Tanulmányozza a mozgást! (Tegye fel, hogy a légellenállás elhanyagolható! Ez nem túl nagy sebességek és aránylag nehéz testek – például egy súlylökő golyó esetében – jogos közelítés.)



Adja meg és ábrázolja (két külön grafikonon) a test vízszintes és függőleges elmozdulását az idő függvényében! (A vízszintes elmozdulást az eldobás helyétől, a függőleges elmozdulást a talajtól mérje.)

Adja meg és ábrázolja (két külön grafikonon) a test sebességének vízszintes és függőleges komponensét az idő függvényében!

Adja meg és ábrázolja a test pályáját (azaz a függőleges elmozdulást a vízszintes elmozdulás függvényében)!

Milyen magasra jut a test a mozgása során?

Segítség: Először azt határozza meg, hogy *mikor* érkezik a pálya tetőpontjára! Hogyan fogalmazhatja meg matematikailag a „tetőre jutás”-t?

Hol és mekkora sebességgel érkezik a test a talajra?

Segítség: Először azt határozza meg, hogy *mikor* érkezik a talajra! Hogyan fogalmazhatja meg matematikailag a „földet érés”-t?

Legfeljebb milyen messze érhet talajt a test, ha $h = 2$ m és $v_0 = 8$ m/s (az α szöveget pedig tetszőlegesen megválaszthatjuk)?

Segítség: Ez sokkal nehezebb kérdés, mint az eddigiek. Megoldhatja numerikusan (számítógépes „próbálgatással”) is.

Bevezető fizika villamosmérnököknek
4. gyakorlat

1. Egy 400 m-es futópályán két futó edz. Mindketten állandó sebességgel futnak. Ha szembe futnak egymással, akkor percenként találkoznak, ha ugyanabba az irányba, akkor 6 percenként.

Mekkora a futók sebessége?

2. Egy régi lemezjátszó korongja $33\frac{1}{3}$ fordulatot tesz meg percenként, a „nagylemez” átmérője 30 cm. A forgó lemez legszéleire egy kis tárgyat teszünk.

Legalább mekkora a kis tárgy és a lemez között a tapadási súrlódási együttható, ha a test nem csúszik meg?

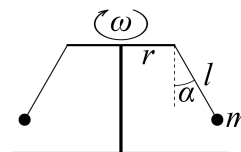
3. Egy autó $R = 120$ m sugarú kanyarban halad $v_0 = 90$ km/h sebességgel. A kerekek és a száraz aszfalt között $\mu = 0,6$ a tapadási súrlódási együttható.

Legfeljebb mekkora a_t pálya irányú gyorsulással fékezhet a kanyar közben a vezető?

Mekkora úton tud így megállni, ha a pálya irányú gyorsulása a fékezés közben állandó?

Ezekkel a gumikkal legfeljebb mekkora állandó $v_{\max}$ sebességgel lehetne „bevenni” ezt a kanyart? Miért veszélyes, ha az autó ezzel a maximális sebességgel érkezik a kanyarba?

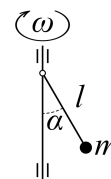
4. Egy körhintán a hinták $l = 8$ m hosszú kötelei egy $r = 5$ m sugarú forgó keretre vannak rögzítve. Amikor a körhinta egyenletes sebességgel forog, a hinták kötele a függőlegessel $\alpha = 30^\circ$ -os szöget zár be.



Mekkora a körhinta ω szögsebessége?

Mekkora a körhintában ülő $m = 60$ kg tömegű ember *súlya* (azaz mekkora erő feszíti a kötelet, ha a szék tömegét elhanyagoljuk)?

5. Az ábrán látható elrendezésben a függőleges rudat ω szögsebességgel forgatjuk. A rúdhoz egy csuklóval csatlakozik egy másik, l hosszúságú, könnyű rúd, amelynek a végén m tömegű, pontszerűnek tekinthető test van rögzítve. (A csukló ábra síkjára merőleges tengelye szabadon engedi „kilendülni” a testet, azaz az α szög szabadon változhat, de közben a ferde rúd a függőleges rúddal együtt forog.)



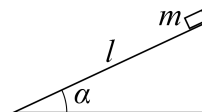
Ábrázolja a rúd függőlegessel bezárt α szögét az ω szögsebesség függvényében! (A szögsebességet nagyon lassan növeljük, a rúd nem „leng”, a forgó rendszerből nézve mindig egyensúlyban van.)

Figyelem! Bizonyos szögsebességeknél több lehetséges egyensúlyi helyzet is van. Vizsgálja meg ezeknek a helyzeteknek a *stabilitását*! (Stabil az egyensúly akkor, ha az egyensúlyi helyzetből kicsit kitérített és ott elengedett test visszatér az egyensúlyi helyzetbe.)

Bevezető fizika villamosmérnököknek

5. gyakorlat

1. Az l hosszúságú, α hajlásszögű lejtő tetejéről nyugalmi helyzetből lecsúszik egy m tömegű test. A súrlódási együttható μ .



Milyen erők hatnak a testre? Mekkora munkát végeznek az egyes erők, mialatt a test leér a lejtő aljára?

Határozza meg a munkatétel alapján a test sebességét a lejtő alján! Hasonlítsa össze az eredményt a dinamikai és kinematikai megfontolások alapján kapott eredménnyel.

2. Egy rugó erőtvénnye $F = Dy$, ahol F az összenyomásához vagy megnyújtáshoz szükséges erő, y a rugó hosszának megváltozása, D pedig a rugóra jellemző állandó.

Határozza meg, mekkora munkával lehet a rugót y távolsággal összenyomni vagy megnyújtani! Ne kész képletet keressen, hanem vezesse le az összefüggést a 3. gyakorlaton megismert „görbe alatti terület” módszerrel.

3. Egy $m = 0,1\text{ kg}$ tömegű testet $h = 2\text{ m}$ magasból a vízszinteshez képest $\alpha = 60^\circ$ -os szöggel felfelé egy rugós kilövővel indítunk el. A rugó kezdeti összenyomása $y = 4\text{ cm}$, a rugóállandó $D = 4000\text{ N/m}$. A légellenállástól eltekintünk.

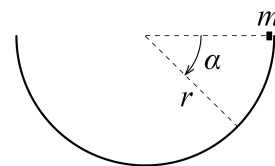
Határozza meg a mechanikai energia megmaradása alapján, hogy a test mekkora sebességgel csapódik a földre! Milyen magasan lesz a pályája tetőpontján?

4. Egy kerékpárosra, ha nagy sebességgel sima, vízszintes úton halad, elsősorban a légellenállás hat. A tekeréssel ezt az erőt kell leküzdenie. A légellenállás által kifejtett F erő (ilyen sebességeknél) a levegőhöz viszonyított v sebesség négyzetével arányos: $F = kv^2$, ahol k a test nagyságától, formájától és a levegő sűrűségétől függő állandó.

Hogyan függ a kerékpáros teljesítménye a sebességtől?

Hányszorosára nő a kerékpáros által kifejtett erő és a kerékpáros teljesítménye, ha a v sebességű kerékpáros v sebességű szembeszélben teker?

5. Az ábrán látható $r = 0,1\text{ m}$ sugarú félhenger alakú vályúban egy kicsiny, $m = 0,1\text{ kg}$ tömegű test súrlódás nélkül mozoghat. A testet a vályú pereméről kezdősebesség nélkül elengedjük.



Határozza meg és ábrázolja a test sebességét és a test által a vályú falára kifejtett nyomóerőt a test helyzetét jellemző α szög függvényében! ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ és most legyen $g = 10\text{ m/s}^2$.)

Szorgalmi feladat: Ha a test és a vályú között súrlódás is van, akkor a feladat nem oldható meg analitikusan, csak numerikusan (hiszen a gyorsulás függ a súrlódástól, az a nyomóerőtől, az pedig a sebességtől). Írjon programot (Excel táblázatkezelővel vagy bármely programnyelven), amely megadja a test helyzetét jellemző α szöget az idő függvényében! Legyen $\mu = 0,1$.

Segítség: Válasszon nagyon kicsi (például $\Delta t = 0,001\text{ s}$) időlépéseket. Ez alatt a test gyorsulása állandónak tekinthető. Ebből számolja ki az időlépés végén a test új helyzetét, új sebességét, majd ezekből az új gyorsulást. Ezt ismételve egészen addig, amíg a test meg nem áll. (Megálláskor vizsgálni kell, megcsúszik-e újra.) Végül az adatokat ábrázolja grafikonon.

Bevezető fizika villamosmérnököknek

6. gyakorlat

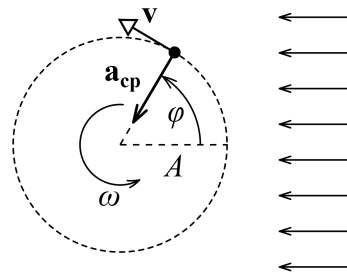
1. Egy pontszerű test A sugarú körpályán mozog ω állandó szögsebességgel.

Mekkora a test v kerületi sebessége és a_{cp} centripetális gyorsulása?

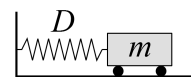
Adja meg a test helyzetét megadó $\varphi(t)$ függvényt, ha a forgásszög a $t = 0$ időpillanatban $\varphi(0) = 0$!

Ha a mozgó testet jobbról párhuzamos fénysugarakkal megvilágítjuk, akkor a test árnyéka a baloldalon lévő ernyőn rezgőmozgást fog végezni. Írja fel és ábrázolja a rezgőmozgás $x(t)$ kitérés-idő függvényét!

A rezgő árnyék sebessége és gyorsulása a körmozgást végző test sebesség- és gyorsulásvektorának függőleges komponense lesz. Írja fel és ábrázolja ennek alapján a rezgő árnyék $v(t)$ sebesség-idő és $a(t)$ gyorsulás-idő függvényét! Milyen kapcsolat van az árnyék $x(t)$ kitérése és $a(t)$ gyorsulása között?



2. Az ábrán látható m tömegű kiskocsit egy D rugóállandójú rugóval kötjük a falhoz. A kiskocsit az egyensúlyi helyzetéből x_0 távolsággal kitérítjük, és a $t = 0$ pillanatban elengedjük.



A rugó (lineáris) erőtvénnye és az előző feladat eredménye alapján mutassa meg, hogy a mozgás harmonikus rezgőmozgás! Határozza meg a rezgés körfrekvenciáját!

Írja le a mozgást! (Adja meg a kiskocsi kitérését, sebességét, gyorsulását az idő függvényében!)

3. Az előző feladatban szereplő kiskocsit most úgy indítjuk el, hogy az egyensúlyi helyzetében v_0 sebességgel meglökjük.

Mekkora lesz a rezgés amplitúdója?

Írja fel és ábrázolja egy-egy közös grafikonban a kiskocsi mozgási energiáját, a rugóenergiát és a rendszer teljes mechanikai energiáját az idő, illetve a kitérés függvényében!

4. Egy könnyű, nyújthatatlan fonálra lógatott pontszerű testet matematikai ingának vagy fonálingának nevezünk. Ha az inga kitérése kicsi, akkor a mozgása jól közelíthető harmonikus rezgőmozgással. A visszatérítő erő most a kötélerő vízszintes komponense.

Vezesse le az l hosszúságú fonálinga lengésidejét! (Felhasználhatja, hogy kis szögekre $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$.)

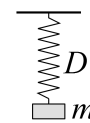
Milyen hosszú a *másodpercinga* fonala? (A másodpercinga fél lengése tart egy másodpercig! $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.)

5. Az ábrán látható rugó nyújthatatlan, amikor a ráakasztott, nyugalomban lévő testet elengedjük.

Írja le a mozgást! (Adja meg a test kitérését az idő függvényében!)

Hol lesz a test sebessége maximális?

A rendszernek most a mozgási energián és a rugóenergián kívül a helyzeti energiája is változik. Írja fel az egyes energiatagokat, és mutassa meg, hogy a teljes mechanikai energia most is állandó!



Bevezető fizika villamosmérnököknek

7. gyakorlat

1. Egy testet $F_1 = 10\text{ N}$ erővel $t_1 = 3\text{ s}$ alatt lehet felgyorsítani nyugalmi helyzetből $v = 15\text{ m/s}$ sebességre.

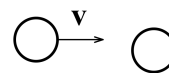
Mennyi ideig tart ugyanennek a testnek nyugalmi helyzetből ugyanerre a sebességre való felgyorsítása, ha az erő $F_2 = 2\text{ N}$?

2. Vízszintes légpárnás sínen két kis test mozoghat súrlódásmentesen. A testek tömege $m_1 = 0,2\text{ kg}$ és $m_2 = 0,3\text{ kg}$, sebessége $v_1 = 2\text{ m/s}$ illetve $v_2 = -1,5\text{ m/s}$.

Mekkora lesz a testek sebessége, ha

- a) tökéletesen rugalmatlanul,
- b) tökéletesen rugalmasan ütköznek?

3. Egy csúszó hokikorong nekiütközik egy másik, ugyanakkora tömegű, álló hokikorongnak. Az ütközés tökéletesen rugalmas, de nem centrális (lásd az ábrát).



Mekkora szöget zár be a testek sebességvektora az ütközés után?

A súrlódást a korong és a jég, valamint két korong között is hanyagolja el (azaz a testek forgásával ne foglalkozzon)!

4. Két m_1 és m_2 tömegű kiskocsi vízszintes talajon gurul elhanyagolható gördülési ellenállású kerekeken. Az egyik kiskocsira D rugóállandójú, könnyű rugó van erősítve. A kiskocsik sebessége v_1 illetve v_2 (értékük negatív is lehet). $v_1 > v_2$, így a kiskocsik ütköznek.



Mekkora a rugó legnagyobb összenyomódása az ütközés során?

Mekkora ekkor a kocsik sebessége? Mennyivel változott eddig a pillanatig a kezdeti állapothoz képest az egyes kiskocsik sebessége?

Ha a rugó teljesen rugalmatlan, akkor a kiskocsik összetapadva, evvel a sebességgel haladnak tovább. Ha a rugó rugalmas, akkor szétlöki őket.

Mennyivel változik az egyes kiskocsik sebessége a szétlöködés során, ha a rugó *tökéletesen* rugalmas (azaz nincs energiavesztés)?

Ha a rugó *csak részben* rugalmas, akkor a szétlöködés során bekövetkező sebességváltozás a tökéletesen rugalmas esetben bekövetkező változás k -szorososa, ahol $0 \leq k \leq 1$ az *ütközési szám*.

Határozza meg a testek ütközés utáni végsebességét k ütközési szám esetén!

5. Egy gumilabdát $h_0 = 1\text{ m}$ magasságból leejtünk a vízszintes talajra. A labda részben rugalmas ütközéssel visszapattan a talajról, az ütközési szám k .

Milyen magasra emelkedik fel a labda az n -edik ütközés után?

Mennyi ideig repül a labda az n -edik és $n + 1$ -edik ütközés között?

Mennyi ideig pattog összesen?

Bevezető fizika villamosmérnököknek
8. gyakorlat

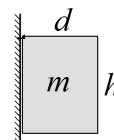
1. Egy l hosszúságú, m tömegű palló a két végén van alátámasztva. A pallón végigmegy egy m_1 tömegű ember.

Határozza meg az egyes alátámasztásokban fellépő erőket az embernek a palló egyik végétől mért x távolságának függvényében!

2. Egy m tömegű téglatest alakú, homogén tárgyat a felső élénél egy kampósszeggel akasztanak a függőleges falra (lásd az ábrát).

Rajzolja be a testre ható erőket, és határozza meg az erők nagyságát!

Segítség: A tárgy a szögön kívül csak az alsó élénél érintkezik a fallal.



3. Egy biciklin az éppen használt áttételben az első lánckerék $n_1 = 42$ fogú, a hátsó lánckerék $n_2 = 28$ fogú. A pedálkar hossza $l = 17$ cm, a kerék átmérője $d = 28'' \approx 71$ cm. A biciklis és a bicikli együttes tömege $m = 80$ kg.

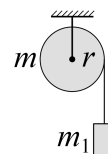
Mekkora erővel kell nyomnia a pedált a biciklisnek, ha egy 14%-os emelkedőn egyenletes sebességgel akar felfelé haladni?

Segítség: Egy α hajlásszögű lejtő $100 \cdot \tan \alpha$ %-os. A légellenállástól és a gördülési ellenállástól tekintsen el!

4. Egy tömör, homogén m tömegű és r sugarú henger a rögzített, vízszintes helyzetű tengelye körül szabadon foroghat. A henger palástjára vékony, nyújthatatlan fonalat tekerünk, amelynek egyik vége a henger palástjára van rögzítve, a másik végére pedig m_1 tömegű testet rögzítünk.

Mekkora gyorsulással mozog a test, ha elengedjük?

Segítség: A homogén henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$.



5. Egy forgószék függőleges tengelye körül szabadon foroghat. A széken egy ember ül, vízszintesen kinyújtott karjaival két, egyenként $m = 15$ kg tömegű súlyzót tart. Az ember és a szék együttes tehetetlenségi nyomatéka (a súlyzók nélkül) $\Theta_0 = 18 \text{ kgm}^2$. A pontszerűnek tekinthető súlyzók távolsága a forgástengelytől $r_1 = 0,9$ m. A széket $\omega_1 = 5 \text{ s}^{-1}$ szögsebességgel megforgatjuk.

Mekkora lesz a szék szögsebessége, ha a székben ülő ember a súlyzókat a forgástengelytől $r_2 = 0,3$ m távolságra behúzza?

Mekkora munkát végez eközben az ember?

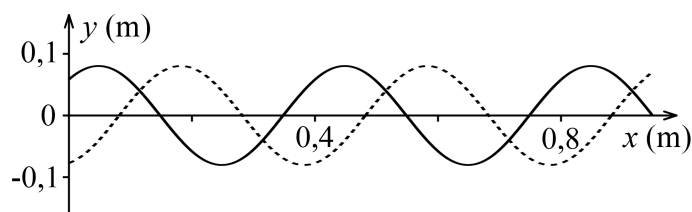
Segítség: A karját behúzó embernek megváltozik a tehetetlenségi nyomatéka, de azt a változást hanyagoljuk el a súlyzók tehetetlenségi nyomatékának változása mellett.

6. Egy pontszerű test $\mathbf{N}$ perdülete (vektoriális mennyiség!) egy tetszőleges O pontra vonatkoztatva $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, ahol $\mathbf{p}$ a test impulzusvektora, $\mathbf{r}$ az O pontból a testre mutató helyvektor, $\times$ pedig a vektoriális szorzat jele. A forgatónyomaték szintén vektoriális mennyiség: egy $\mathbf{F}$ erő O pontra vonatkoztatott forgatónyomatéka $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, ahol $\mathbf{r}$ az O pontból az erő támadáspontjába mutató helyvektor. Ha egy testre nem hat (külső) forgatónyomaték, akkor a test perdülete állandó.

Mutassa meg, hogy Kepler II. törvénye a perdületmegmaradás következménye!

Bevezető fizika villamosmérnököknek
9. gyakorlat

1. Az ábrán egy transzverzális hullám látható a $t = 0$ pillanatban (folytonos vonal) és a $t = \frac{1}{60}$ s pillanatban (szaggatott vonal).



Mekkora a hullám amplitúdója, hullámhossza, terjedési sebessége, frekvenciája, kezdőfázisa? Írja fel az $y(x, t)$ hullámfüggvényt!

2. Egy síkon két pontszerű hullámforrás található, egymástól d távolságra. A források azonos ν frekvenciával, azonos amplitúdóval és azonos fázisban bocsátanak ki hullámokat. A hullámok a forrásokat körülvevő (kétdimenziós) közegben c sebességgel terjednek.

Adja meg azokat a helyeket, ahol a két hullám maximálisan erősíti, illetve maximálisan gyengíti egymást!

Hol vannak az erősítési és gyengítési helyek, ha a hullámok térben (három dimenzióban) terjednek?

3. Egy egyik végén falhoz rögzített kötélén szinuszos hullám érkezik a rögzítési ponthoz, és onnan visszaverődik. Az érkező és visszaverődő hullám interferál egymással.

Írja fel és jellemezze a kialakuló hullámfüggvényt!

Segítség: A koordináta-rendszer kezdőpontja legyen a rögzítési pontnál, és a pozitív irány mutasson a kötélfelé. Így a beérkező hullám sebessége negatív, a hullámfüggvényt ennek alapján írja fel! A visszaverődéskor a hullámnak fázisugrása van. Ennek nagyságát abból kaphatja meg, hogy a rögzítési pontban a hullám kitérésének mindig nullának kell lennie.

4. Egy mindkét végén nyitott síp hossza $\ell = 19$ cm. A hang terjedési sebessége száraz, hideg (5°C -os) levegőben $c = 334,5$ m/s.

Milyen frekvenciájú hangok alakulhatnak ki a sípban? Mekkora az alaphang frekvenciája. Milyen zenei hang ez?

A sípban lévő levegő hőmérséklete a fűtés közben 35°C -ra, relatív páratartalma 80%-ra változik, így a hang sebessége $c' = 355,5$ m/s-ra nő. Mekkora lesz az alaphang frekvenciája? Mennyivel hangolódott el a síp?

5. Egy mentőautó szirénájának hangját az autó közeledésekor $\nu_1 = 583$ Hz frekvenciájúnak, távolodásakor $\nu_2 = 475$ Hz frekvenciájúnak halljuk.

Mekkora az autó sebessége? Milyen hangot hallanánk, ha az autó állna?

Segítség: A hőmérsékletadat hiányában a hang terjedési sebességét vegyük 340 m/s-nak!

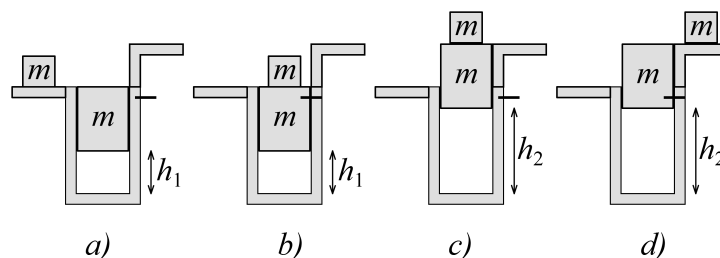
Bevezető fizika villamosmérnököknek
10. gyakorlat

1. Egy $V = 20 \text{ dm}^3$ térfogatú tartályban $n = 10 \text{ mol}$ nitrogéngáz van $T = 20^\circ\text{C}$ hőmérsékleten.

Mekkora a gáz nyomása és sűrűsége?

Segítség: A nitrogén moláris tömege $M = 28 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, az egyetemes gázállandó $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$.

2. Az ábrán egy egyszerű hőerőgép látható a működése néhány fázisában. A hengerben levegő van ($f = 5$), a henger belső keresztmetszete $A = 1 \text{ dm}^2$. A dugattyú és a teher tömege egyaránt $m = 100 \text{ kg}$, a külső légnyomás $p_0 = 100 \text{ kPa}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.



a) Kezdetben a teher az alsó polcon van, nincs rajta a dugattyún. A dugattyú nincs rögzítve, $h_1 = 1 \text{ dm}$ magasan egyensúlyban van. A bezárt gáz hőmérséklete $T_1 = 300 \text{ K}$.

Mekkora a bezárt gáz p_1 nyomása? Hány mól gáz van a hengerben?

b) Ezután a dugattyút rögzítjük, a terhet rátoljuk, majd a gázt melegíteni kezdjük.

Mekkora T_2 hőmérsékleten lesz a dugattyú ismét egyensúlyban, hogy a rögzítést megszüntethessük? Mekkora ekkor a gáz p_2 nyomása?

c) Ezután a gázt tovább melegítjük, aminek hatására a dugattyú $h_2 = 2 \text{ dm}$ magasra emelkedik.

Mekkora ekkor a gáz T_3 hőmérséklete és p_3 nyomása?

d) A dugattyút ebben a helyzetben rögzítjük, és a terhet áttoljuk a felső polcra. Ezután a gázt hűteni kezdjük, egész addig, amíg a nyomás annyira lecsökken, hogy a rögzítést újra kivehetjük.

Mekkora ekkor a gáz T_4 hőmérséklete és p_4 nyomása?

e) A rögzítés eltávolítása után a gázt tovább hűtjük, egészen addig, amíg a dugattyú visszakerül az a) ábrán látható eredeti állapotba.

Foglalja táblázatba a gáz nyomását, térfogatát, hőmérsékletét és belső energiáját az egyes állapotokban és ábrázolja a körfolyamatot p - V , p - T és V - T állapotsíkokon!

Határozza meg és foglalja táblázatba az egyes részfolyamatok során a belső energia megváltozását, a gáz által végzett munkát és a gázzal közölt (illetve a gáztól elvont) hőt!

Határozza meg a hőerőgép hatásfokát! Mire fordítódik a hasznos munka? Mi lesz a veszteséggel?

Folytatás a túloldalon!

3. A Carnot-ciklus egy olyan körfolyamat, amely két adiabatikus (hőközlés nélküli) és két izotermikus (állandó hőmérsékletű) folyamatból áll. Adott alsó és felső hőmérséklet esetén ennek a körfolyamatnak van a legnagyobb hatásfoka, ezért a hőtanban kitüntetett szerepe van.

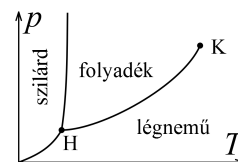
A ciklus az alacsonyabb, T_1 hőmérsékletről indul egy adiabatikus összenyomással. Ennek hatására a gáz T_2 hőmérsékletre melegszik. Ezután folyamatos hőfelvétel közben állandó hőmérsékleten tágul. A harmadik szakasz egy adiabatikus tágulás, aminek hatására a gáz lehűl az eredeti T_1 hőmérsékletre. Innen egy izotermikus összenyomással jut vissza a kezdeti állapotba, miközben hőt ad le.

Foglalja táblázatba az egyes állapotokban a gáz hőmérsékletét, belső energiáját és entrópiáját! Vázolja a folyamatot p - V és T - S állapotsíkon!

Foglalja táblázatba az egyes részfolyamatok során a belső energia és az entrópia megváltozását, a gáz által végzett munkát, valamint a gázzal közölt (illetve a gáztól elvont) hőt!

Vizsgálja meg a körfolyamat képét a p - V és T - S állapotsíkon! Mekkora a körfolyamat által körbefogott terület?

4. Az ábrán az egykomponensű anyagok tipikus fázisdiagramja látható. Ez alapján dönthető el, hogy az anyag egy adott T hőmérsékleten és p nyomáson milyen halmazállapotú. Az egyes fázisokat elválasztó vonalak által kijelölt T, p értékeken a két fázis (például folyadék és gőze) egyszerre lehet jelen. A H hármasponthoz tartozó T_h hőmérsékleten és p_h nyomáson mindhárom halmazállapot egyszerre lehet jelen. A K kritikus pontban (T_k hőmérséklet és p_k nyomás) eltűnik a különbség a folyadék és a légnemű halmazállapot között. Ennél nagyobb hőmérsékleten már nem lehet nagy nyomással cseppfolyósítani egy gázt.



A hármaspont és a kritikus pont a különböző anyagoknál nagyon eltérő, és ez határozza meg a viselkedésüket szobahőmérsékleten és normál légköri nyomáson. Az alábbi táblázatban néhány anyag hármaspontjához és kritikus pontjához tartozó hőmérsékletek és nyomások láthatók.

anyag	T_h (°C)	p_h (kPa)	T_k (°C)	p_k (MPa)
víz	0,01	0,6	373,8	22,06
nitrogén	-210,0	12,6	-146,9	339,6
bután	-138,6	0,00067	152,0	379,6
széndioxid	-56,56	518,7	30,98	7,377

Milyen halmazállapotúak az egyes anyagok szobahőmérsékleten ($T_0 = 25^\circ\text{C}$) és normál légköri nyomáson ($p_0 = 101,3\text{ kPa}$)?

Mi történik, ha az anyagot hűtjük vagy melegítjük, illetve ha összenyomjuk vagy csökkentjük a nyomását?

III. Útmutató a feladatsorok tanításához

1. gyakorlat – tömegpontok statikája

Bevezető:

Ismertessük a feladatok általános megoldási módját: 1. erők berajzolása, 2. erők komponensekre bontása, 3. egyenletek (erőegyensúly) és egyenlőtlenségek (tapadó súrlódás) felírása, 4. egyenletrendszer megoldása, 5. feladat diszkussziója (tapad? megcsúszik? stb.)

Beszéljük meg a jelöléseket! A vektorokat nyomtatott szövegben vastag (bold) betűkkel jelöljük ($\mathbf{F}$), kézzel (füzetbe, táblára) írott szövegben használjunk felül nyilat ($\vec{F}$). A skalár mennyiségek a nyomtatott szövegben dőlt (italic) betűvel vannak jelölve (kézírásban sima szöveg). Nagyon nem mindegy, hogy egy vektorról vagy a nagyságáról beszélünk! (Másképp kell vele műveleteket végeznünk!) Egy vektor nagysága vagy abszolút értéke skalár mennyiség: $|\mathbf{F}| = F$.

Vegyük sorra, hogy a mechanika feladatoknál milyen erők hathatnak!

Mindig hat a **nehézségi erő** (szabad erő). Nagysága mg , iránya (definíció szerint) függőleges, kiterjedt testnél a test tömegközéppontjában hat (térfogati erő).

A **kötélerő** egy kötélt két végén hat. Iránya mindig a kötéllel párhuzamos, nagysága a többi erőtől függ (kényszererő): akkora, hogy a testek ne távolodhassanak egymástól (a kötélt nem nyúlhat meg), csak nemnegatív lehet (csak húzóerő léphet fel, nem tolhatunk egy kötéllel egy testet). A feladatokban ezt a jelölést használjuk: $\mathbf{K}$.

A **nyomóerő** egymással érintkező testek felületén hat (felületi erő). Iránya mindig az érintkező felületekre merőleges, nagysága a többi erőtől függ (kényszererő): akkora, hogy a testek ne mozdulhassanak el egymás felé (nem hatolhatnak egymásba), csak nemnegatív lehet (csak nyomóerő léphet fel, nem húzhatja a másik testet). A feladatokban ezt a jelölést használjuk: $\mathbf{N}$.

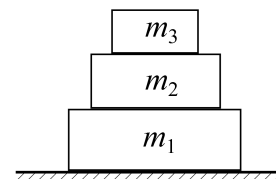
A **súrlódási erő** ($\mathbf{S}$) szintén egymással érintkező felületek mentén hat, de a felülettel párhuzamos irányban. Attól függően, hogy a testek egymáshoz képest nyugalomban vannak, vagy elmozdulnak egymáshoz képest, két esetet különböztetünk meg: A *tapadási* súrlódási erő iránya és nagysága is olyan, hogy a testek (egymáshoz viszonyított) nyugalma fennmaradjon, azonban az erő nagysága nem lehet bármekkora, teljesülnie kell a $0 \leq S \leq \mu N$ egyenlőtlenségnek, ahol N a felületek közt fellépő nyomóerő nagysága, μ pedig a felületekre jellemző (tapadási) súrlódási együttható. A *csúszási* súrlódási erő nagysága $S = \mu N$ (ahol μ most a csúszási súrlódási együttható, N ismét a felületek közt ható nyomóerő nagysága), iránya pedig a két test relatív elmozdulásával ellentétes (a relatív elmozdulást akadályozza).

Hangsúlyozzuk, hogy más fantáziaerők (például „centripetális erő”, stb.) nem hatnak. Inerciarendszerben (mi csak ilyen leírást csinálunk) tehetetlenségi erők sincsenek. A „valódi” erők könnyen felismerhetők arról, hogy egy *kölcsönhatás* következményei, így mindig megtalálható a kölcsönható másik test (a nehézségi erőnél a Föld).

1. Egy vízszintes asztalon három test nyugszik egymáson (lásd az ábrát). Tömegük $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 6$ kg és $m_3 = 2$ kg.

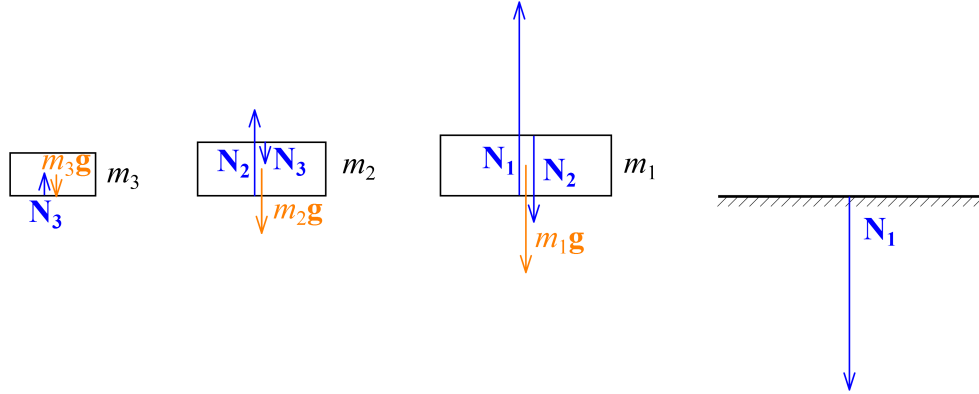
Rajzolja le külön-külön a testeket és rajzolja be az egyes testekre ható erőket!

Adja meg paraméteresen és numerikusan az egyes erők nagyságát!



Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Rajzoljuk be az erőket! (Ha van színes kréta, használjunk különböző színeket a nehézségi erőkre és a nyomóerőkre. A színválasztás, ha lehet, legyen következetes az egész órán, vagy akár a következő órákon is.) Ahhoz, hogy látszódjék, melyik erő melyik testre hat, a testeket külön-külön rajzoljuk le. Hangsúlyosan hívjuk fel a figyelmet a *hatás-ellenhatás törvényére* (Newton III. törvénye).



Ezután már könnyen felírhatjuk *minden testre külön-külön* az erőegyensúlyt (Newton I. törvénye). Minden vektor függőleges, így egyszerűen az erők (előjeles) nagyságát kell összeadni. (Ízlés kérdése, hogy valaki 0-ra rendezi az egyenletet, tehát az előjeles erőket adja össze, vagy pedig az egyik oldalra a felfelé, a másik oldalra a lefelé ható erők eredőjét írja.)

$$N_3 = m_3g$$

$$N_2 = N_3 + m_2g$$

$$N_1 = N_2 + m_1g$$

Ebből már közvetlenül adódik a megoldás:

$$N_1 = (m_1 + m_2 + m_3)g = 176,6 \text{ N}$$

$$N_2 = (m_2 + m_3)g = 78,5 \text{ N}$$

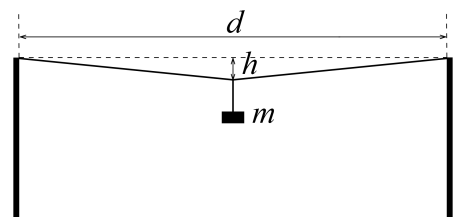
$$N_3 = m_3g = 19,6 \text{ N}$$

(Az eredményeket mindenhol $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ értékkel számoltam ki. A gyakorlatokon is ezt javaslom: számológéppel semmivel se bonyolultabb, mint $g = 10 \text{ m/s}^2$ -tel számolni, ami viszont alpból 2% hibát visz az eredménybe. Ha mégis 10-zel számolunk, akkor ennek megfelelően kerekítsünk: maximum 3 értékes jegyre!)

2. Egy könnyű kötel két, egymástól $d = 20 \text{ m}$ távolságra lévő oszlop közé van kikötve. A kötel közepére $m = 50 \text{ kg}$ tömegű testet akasztunk, ennek hatására a kötel közepe $h = 1 \text{ m}$ mélyre belóg (lásd az ábrát).

Rajzolja be a csomópontban ható erőket!

Mekkora erő feszíti a kötelet?



Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Beszéljünk pár szót a „könnyű” kötél jelentéséről: súlya elhanyagolható a feladatban fellépő más erők mellett, így a kötél egyenes lesz. Beszéljünk a feladat szimmetriájáról is: mivel az elrendezés szimmetrikus, mindkét ferde kötélben ugyanakkora erő hat.

Rajzoljuk be a csomópontra ható erőket: függőleges irányban a kis testre ható mg erő hat (egyelőre ne írjunk be számértékeket, dolgozzunk paraméteresen), a két kötélzárban pedig az egyelőre ismeretlen, de a két oldalon ugyanakkora K erő.

Bontsuk fel a kötélerőt vízszintes és függőleges komponensekre! (Ezt mutassuk meg részletesen!) A szimmetria miatt a vízszintes komponensek automatikusan kiejtik egymást, így csak a függőleges erők egyensúlyát írjuk fel:

$$mg = 2K \sin \alpha ,$$

ahol α a kötél vízszintessel bezárt szöge, amely a geometria alapján:

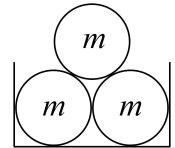
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{d} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 5,7^\circ .$$

K -t kifejezve

$$K = \frac{mg}{2 \sin \alpha} = 2465 \text{ N} .$$

Vegyük észre, hogy az erő (a „lapos” kötelek miatt) sokkal nagyobb a test súlyánál!

3. Egy függőleges falú dobozban éppen elfér (anélkül, hogy az oldalfalakat nyomnák) két egyforma, $m = 2 \text{ kg}$ tömegű henger. A hengerekre egy harmadik, ugyanolyan hengert fektetünk (lásd az ábrát).

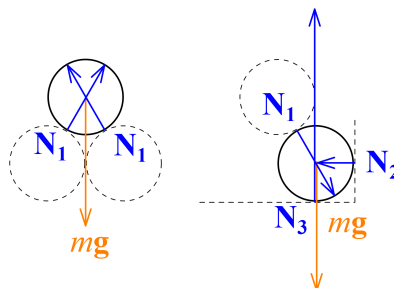


Rajzolja le külön-külön a hengereket, és rajzolja be az egyes hengerekre ható erőket!

Mekkora erővel nyomják a hengerek egymást, valamint a doboz alsó és oldalsó falait?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Használjuk ki itt is a szimmetriát! A két alsó hengerre ugyanakkora erők hatnak, és a középső hengerre ható erők is szimmetrikusak. Ennek alapján az ábrák (az áttekinthetőség kedvéért a hengerek most is széthúзва):



Bontsuk fel az erőket vízszintes és függőleges komponensekre! Használjuk fel, hogy a geometria miatt (a körök középpontjai egy szabályos háromszög csúcsai) a „ferde” erők a függőlegessel 30° -os szöget zárnak be. A középső hengerre a vízszintes erők eredője a

szimmetria miatt eleve nulla, csak a függőleges erők egyensúlyát kell felírunk. Az alsó hengerekre viszont külön-külön fel kell írunk a vízszintes erők és a függőleges erők egyensúlyát is. Az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}mg &= 2N_1 \cos 30^\circ \\N_1 \sin 30^\circ &= N_2 \\mg + N_1 \cos 30^\circ &= N_3\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

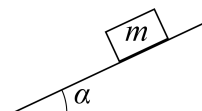
$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{mg}{2 \cos 30^\circ} = 11,33 \text{ N} \\N_2 &= \frac{mg \operatorname{tg} 30^\circ}{2} = 5,66 \text{ N} \\N_3 &= \frac{3mg}{2} = 29,43 \text{ N} .\end{aligned}$$

A hengerek egymást $N_1 = 11,3 \text{ N}$ erővel, a doboz mindkét oldalát $N_2 = 5,66 \text{ N}$ erővel, a doboz alját pedig összesen $2N_3 = 58,86 \text{ N}$ erővel (ami persze éppen a három henger teljes súlya) nyomják.

4. Egy α hajlásszögű lejtőre m tömegű testet helyezünk (lásd az ábrát). A test a súrlódás miatt nyugalomban van.

Rajzolja be az m tömegű testre ható erőket!

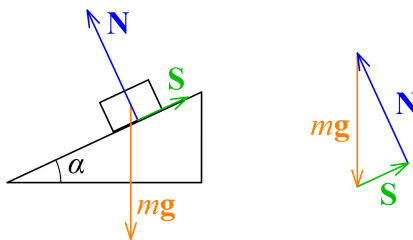
Legalább mekkora a lejtő és a test közti μ (tapadási) súrlódási együttható?



Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Rajzoljuk be a lejtőn lévő testre ható erőket: az mg nehézségi erőt, a lejtő síkjára merőleges N nyomóerőt és az S tapadási súrlódási erőt! Ha nem lenne súrlódás, a test lecsúszna, a súrlódási erő ezt akadályozza meg, így a lejtő síkjában felfelé mutat.

A három erő eredője épp nulla kell legyen (nyugalomban van a test), ezt grafikusán leellenőrizhetjük, ha megszerkesztjük az erők eredőjét: eltologatjuk a vektorokat, és egy zárt vektorháromszöget kell kapnunk. (Ha szükséges, magyarázzuk el, hogy több vektor eredőjét hogy lehet megszerkeszteni.)



Az erőket most ne vízszintes és függőleges, hanem lejtőre merőleges és lejtővel párhuzamos komponensekre bontsuk! (Ez azért előnyös, mert így csak az mg erőt kell felbontani.) Írjuk fel a lejtőre merőleges és lejtővel párhuzamos erők egyensúlyát:

$$\begin{aligned}N &= mg \cos \alpha \\S &= mg \sin \alpha .\end{aligned}$$

Tapadás esetén azonban teljesülnie kell az

$$S \leq \mu N$$

egyenlőtlenségnek. Behelyettesítve, majd megoldva:

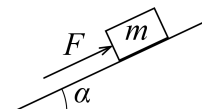
$$mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha$$

$$\mu \geq \operatorname{tg} \alpha .$$

5. Az előző feladatban szereplő testet mekkora *lejtővel párhuzamos* F erővel lehet felfelé megmozdítani?

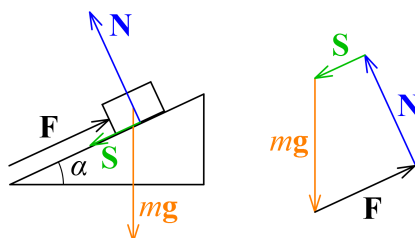
Rajzolja be most is az m tömegű testre ható erőket!

(Tegye fel, hogy a súrlódási együttható éppen az előző feladatban meghatározott minimális érték!)



Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Rajzoljuk be ismét az erőket! A legfontosabb, amit észre kell vennünk, hogy most a súrlódási erő ugyanakkora, mint az előző feladatban, de a lejtő síkjában *lefelé* mutat (hiszen ha nem lenne súrlódás, akkor felfelé mozdulna el a test). Most is leellenőrizhetjük az erők eredőjét (most négy erőt kell összeadni, és egy zárt vektornégyszöget kell kapnunk).



Ismét a lejtőre merőleges és a lejtővel párhuzamos komponensekkel dolgozunk. Az egyenletrendszer:

$$N = mg \cos \alpha$$

$$F = mg \sin \alpha + S$$

$$S = \mu N \quad (\text{mert a megcsúszás határán van})$$

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{az előző feladatból}).$$

Megoldva az egyenletrendszert:

$$S = \mu N = \operatorname{tg} \alpha \cdot mg \cos \alpha = mg \sin \alpha$$

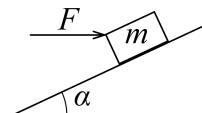
$$F = 2mg \sin \alpha .$$

Vegyük észre, hogy ez éppen az előző feladatban lévő súrlódási erő kétszerese, ami a két feladat vektorábráiból is kiolvasható!

6. Mekkora F erőre van szükség a test megmozdításához, ha az erő vízszintesen hat?

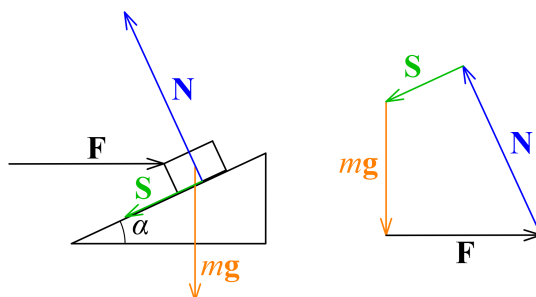
Rajzolja be most is az m tömegű testre ható erőket!

Diszkutálja a feladatot! Vizsgálja meg azt az esetet is, ha meredek a lejtő és a súrlódási együttható nagy!



Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Rajzoljuk be ismét az erőket! Az első, amit észre kell vennünk, hogy a nyomóerő most *nagyobb* lesz, mint az előző feladatban, mert az $\mathbf{F}$ erőnek lejtőre merőleges komponense is van („belenyomja” a testet a lejtőbe). A súrlódási erő most is a lejtő síkjában lefelé mutat (hiszen ha nem lenne súrlódás, akkor felfele mozdulna el a test), de a nagysága most a nagyobb nyomóerő miatt szintén nagyobb lesz! Most is leellenőrizhetjük az erők eredőjét (ismét zárt vektornégyszöget kell kapnunk).



Most két logikus választásunk is lehet: felbonthatjuk az erőket lejtőre merőleges és lejtővel párhuzamos komponensekre, vagy függőleges és vízszintes komponensekre is. (Mindkét esetben két-két erőt kell felbontani.) Válasszuk most az utóbbit (akkor a keresett $\mathbf{F}$ erőt nem kell felbontani)! Az egyenleteink:

$$\begin{aligned} mg + S \sin \alpha &= N \cos \alpha && \text{(függőleges erők egyensúlya)} \\ F &= N \sin \alpha + S \cos \alpha && \text{(vízszintes erők egyensúlya)} \\ S &= \mu N && \text{(mert a megcsúszás határán van).} \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} mg &= N \cos \alpha - S \sin \alpha = N (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) && \text{(az első és a harmadik egyenletből)} \\ N &= \frac{mg}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} && \text{(az előzőből átrendezve)} \\ F &= N (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} mg. \end{aligned}$$

Diszkusszió:

Vegyük észre, hogy az eredmény hányadosában egy kivonás van! (Már az egyenletrendezés közben ki kellett volna kötnünk, hogy $(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$ -val csak akkor oszthatunk át, ha az nem nulla.) Csak akkor kapunk *fizikailag értelmes* (pozitív) eredményt F -re, ha teljesül, hogy

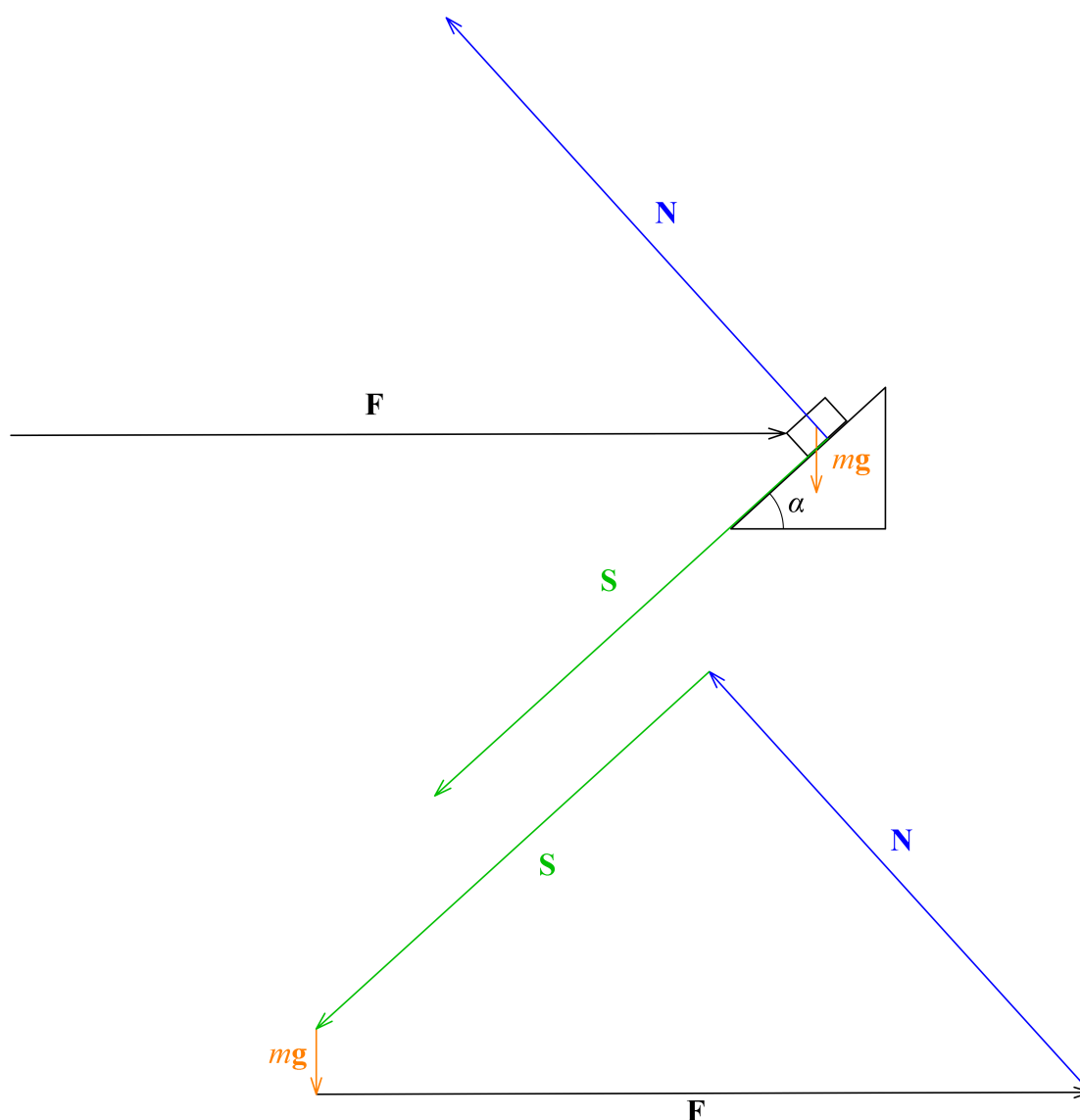
$$\begin{aligned} \cos \alpha - \mu \sin \alpha &> 0 \\ \mu &< \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Ha $\mu = \operatorname{ctg} \alpha$, akkor F -re formálisan végtelen nagy értéket kapunk. Ennek az a fizikai jelentése, hogy ha $\mu \geq \operatorname{ctg} \alpha$, akkor bármilyen nagy erővel se tudjuk megmozdítani a testet. Ez a *befeszülés* jelensége: minél nagyobb erővel nyomjuk, annál nagyobb lesz N , és így S is, ami miatt még nagyobb F kell, és így tovább. (Persze a valóságban az erő soha nem lehet végtelen nagy: egy bizonyos erő fölött széttörik a test, a lejtő, ...)

A továbbiakat csak akkor mondjuk el, ha van idő és érdeklődés!

Mikor következik ez be? Ha a μ tapadási súrlódási együttható nagy, vagy ha a lejtő meredek (α nagy, és így $\operatorname{ctg} \alpha$ kicsi). Ha ebben a feladatban is azt feltételezzük, hogy a súrlódási együttható a 4. feladatban meghatározott minimális érték, azaz $\mu = \operatorname{tg} \alpha$, akkor ez $\alpha \geq 45^\circ$ esetében valósul meg.

Az ábrán egy olyan eset látszik, ahol már közel járunk ehhez a határértékhez, N , S és F már nagyon nagy (pedig mg -t felére csökkentettük).



2. gyakorlat – tömegpontok dinamikája

Bevezető:

A dinamika alapegyenlete: $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (Newton II. törvénye), ezt fogjuk végig használni. $\sum \mathbf{F}$ az m tömegű testre ható *eredő* erő, azaz a rá ható erők *vektori* összege, $\mathbf{a}$ a test gyorsulásvektora.

Vektorok helyett most is koordinátákkal dolgozunk.

Több test esetén minden testre külön-külön fel kell írni az egyenleteket.

A testek mozgását különböző kényszerfeltételek korlátozhatják: például a lejtőre helyezett test csak a lejtővel párhuzamos irányban mozoghat, a „nyújthatatlan” kötéllel összekötött testek gyorsulása megegyezik.

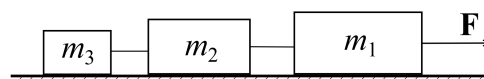
A feladatok általános megoldási módja: 1. Mi történik? Merre mozognak a testek?, 2. a pozitívnak tekintett irány kijelölése (ha el tudjuk dönteni, hogy merre gyorsul, célszerű azt választani), 3. erők berajzolása és komponensekre bontása (mint a statikánál), 4. egyenletek ($F = ma$ a mozgás irányában, erőegyensúly az erre merőleges irányban, súrlódás és nyomóerő kapcsolata) felírása, 4. egyenletrendszer megoldása, 5. feladat diszkussziója (merre mozog? mozog-e egyáltalán?)

Most csúszási súrlódási erő is lesz, ismételjük át a tapadási és csúszási súrlódás közti különbséget.

Múltkor nem beszéltünk a mértékegységekről. Célszerű az SI alapegységeket használni (ha az adatok másban vannak megadva, akkor rögtön az elején átszámolni SI alapegységbe), és akkor a mértékegységgel nem kell számolni (ellenkező esetben viszont igen). Nagyon gyorsan vegyük át az első néhány héten előforduló mennyiségeket:

- idő: s
- távolság: m
- sebesség: $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
- gyorsulás: $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- tömeg: kg
- erő: $\text{N} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$

1. Egy vízszintes asztalon három test fekszik *vékony, nyújthatatlan* kötéllel összekötve. Tömegük $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 6 \text{ kg}$ és $m_3 = 2 \text{ kg}$. Az m_1 tömegű testet $F = 80 \text{ N}$ erővel húzzuk.



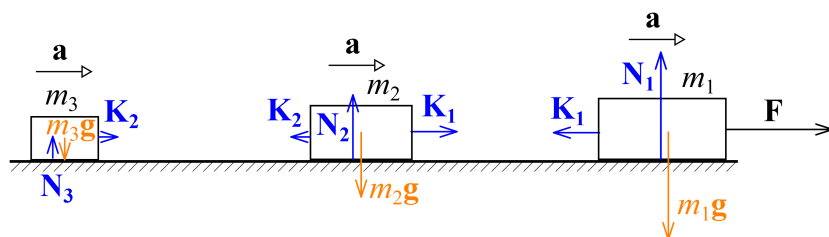
Mekkora a testek gyorsulása és az egyes köteleket feszítő erők, ha

- a) a testek és a talaj közt nincs súrlódás,
- b) a testek és a talaj közt $\mu = 0,3$ a csúszási súrlódási együttható?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Beszéljük meg, hogy a „vékony” kötél azt jelenti, hogy a kötelek tömege elhanyagolható, és a kötelek nem lógnak be, egyenesek. A „nyújthatatlanság” következménye pedig az, hogy a testek gyorsulása megegyezik.

a) rész



Jelöljük be a testek gyorsulásának irányát! (A gyorsulásokhoz használjunk másféle nyilakat, mint az erőkhöz.)

Rajzoljuk be az erőket! (Ha van színes kréta, használjunk a múltkor bevezetett különböző színeket a nehézségi erőkre, a nyomóerőkre és a súrlódási erőkre.) Ahhoz, hogy látszódjék, melyik erő melyik testre hat, a testeket külön-külön rajzoljuk le. Hangsúlyosan hívjuk fel a figyelmet a *hatás-ellenhatás törvényére* (Newton III. törvénye).

Ezután már könnyen felírhatjuk *minden testre külön-külön* a mozgásegyenleteket: vízszintes irányban a dinamika alapegyenletét (Newton II.), függőleges irányban az erőegyen-súlyt (Newton I.).

$$\begin{aligned} m_3 a &= K_2 & N_3 &= m_3 g \\ m_2 a &= K_1 - K_2 & N_2 &= m_2 g \\ m_1 a &= F - K_1 & N_1 &= m_1 g \end{aligned}$$

A jobb oldalon álló egyenletekre ebben a részben még nincs szükség, de azért írjuk fel. A baloldali egyenleteket összeadva:

$$(m_1 + m_2 + m_3) a = F,$$

amiből

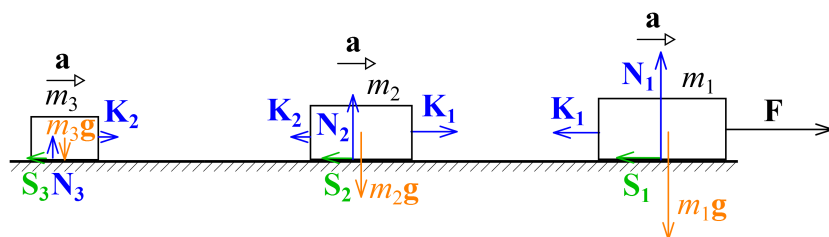
$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} = 4,44 \text{ m/s}^2.$$

A kötélerők megkaphatjuk, ha a értékét visszahelyettesítjük az egyenletekbe:

$$\begin{aligned} K_1 &= F - m_1 a = 35,6 \text{ N} \\ K_2 &= K_1 - m_2 a = m_3 a = 8,9 \text{ N}. \end{aligned}$$

Említsük meg, hogy a fizikában nincs értelme végtelen tizedes törtet írni! A mennyiségeket mindig csak valamekkora hibával ismerjük, soha nem „végtelen pontosan”. A numerikus eredményeket mindig megfelelően kerekített tizedes törtben adjuk meg! Az értékes jegyek számát a feladatban megadott adatok pontossága szabja meg. (Például, ha $g = 10 \text{ m/s}^2$ -tel számolunk, akkor semmiképp se adjunk meg háromnál több értékes jegyet.)

b) rész



Az előző ábrába rajzoljuk be a súrlódási erőket is. A vízszintes erőkhez most a súrlódási erők is hozzáadódnak, és az előző rész egyenletein kívül most a csúszási súrlódási erők $S_i = \mu N_i$ egyenleteit is fel kell írunk.

$$\begin{array}{lll} m_3 a = K_2 - S_3 & N_3 = m_3 g & S_3 = \mu N_3 \\ m_2 a = K_1 - K_2 - S_2 & N_2 = m_2 g & S_2 = \mu N_2 \\ m_1 a = F - K_1 - S_1 & N_1 = m_1 g & S_1 = \mu N_1 \end{array}$$

Az S -eket megadó összefüggésekbe írjuk be az N -eket megadó kifejezéseket, majd ezeket írjuk be a baloldali egyenletekbe, és adjuk össze őket:

$$(m_1 + m_2 + m_3) a = F - \mu (m_1 + m_2 + m_3) g,$$

amiből ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$ -tel számolva)

$$a = \frac{F - \mu (m_1 + m_2 + m_3) g}{m_1 + m_2 + m_3} = 1,50 \text{ m/s}^2.$$

A kötélerők az egyenletekbe visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned} K_1 &= F - S_1 - m_1 a = 35,6 \text{ N} \\ K_2 &= K_1 - S_2 - m_2 a = 8,9 \text{ N}. \end{aligned}$$

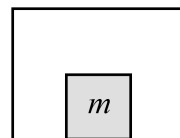
Vegyük észre, hogy a gyorsulás a súrlódás miatt most kisebb, mint az előző részben, de a kötélerők megegyeznek (mert minden testnél ugyanannyi a súrlódási együttható).

Mindenképp beszéljük meg azt is, hogy a gyorsulás paraméteres kifejezésében van egy *kivonás* is, és így nagy μ (vagy kis F) esetén a gyorsulásra negatív értéket kapnánk. Ez azonban nem azt jelenti, hogy a testek balra gyorsulnak, hanem azt, hogy meg se mozognak (tapadnak)! (Olyankor a múltórai statikai egyenleteket és a tapadási súrlódás egyenlőtlenségét kellene felírni.)

2. Egy $m = 10 \text{ kg}$ tömegű kocka egy doboz belsejében, a doboz alján nyugszik (lásd az ábrát).

Mekkora erővel nyomja a kocka a doboz alját, ha

- a) a dobozt $a = 6 \text{ m/s}^2$ gyorsulással függőlegesen felfelé gyorsítjuk,
b) a doboz szabadon esik (g gyorsulással gyorsul lefelé)?



Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A kockára az mg nehézségi erő és a doboz által kifejtett (függőlegesen felfelé mutató) N nyomóerő hat, ezek eredője hozza létre a kocka (dobozzal megegyező) a gyorsulását.

Ha a gyorsulást felfelé vesszük pozitívnak (ezt a rajzba is rajzoljuk be!), akkor a mozgásegyenlet:

$$ma = N - mg,$$

amiből a nyomóerő (amivel a láda a kockát, és így a kocka a ládát is nyomja):

$$N = m(g + a).$$

Az első esetben ebből $N = 160 \text{ N}$ adódik (most $g = 10 \text{ m/s}^2$ -tel számolva).

A második esetben $a = -g$, és így a nyomóerő *nulla*!

Említsük meg, hogy (legalábbis a magyar szóhasználatban) azt az erőt, amivel egy test az alátámasztását nyomja (vagy a felfüggesztését húzza), a test *súlyának* nevezzük. Jól látható, hogy a test súlya függ a gyorsulásától: ha felfelé gyorsul, akkor nagyobb, mint nyugalmi helyzetben, ha lefelé gyorsul, akkor pedig kisebb. A szabadon eső test *súlytalan*. (Ez persze nem azt jelenti, hogy nem hat rá a Föld vonzóereje, csak azt, hogy „nem nyomja az alátámasztását”).

A jelenséget mindenki kipróbálhatja, ha egy fürdőszobai mérleggel liftbe száll.

Figyelem! Nem a lift sebessége számít, hanem a gyorsulása! (Erre talán majd később visszatérünk.)

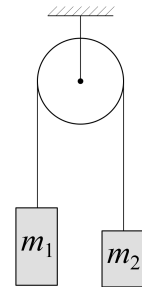
3. Egy könnyű, súrlódásmentes csigán könnyű, nyújthatatlan kötelet vetünk át (lásd az ábrát). A kötel végeire $m_1 = 10 \text{ kg}$ és $m_2 = 6 \text{ kg}$ tömegű testeket akasztunk, majd a rendszert nyugalmi állapotban magára hagyjuk.

Értelmezzük a *dőlt* betűkkel írt szavakat!

Mekkora erő feszíti a kötelet?

Mekkora és milyen irányú lesz az egyes testek gyorsulása?

Mekkora erővel hat a felső kötel a plafonra?

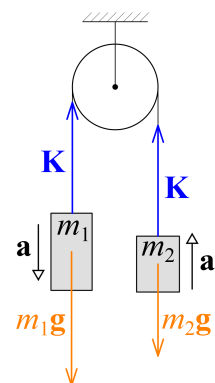


Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A „könnyű” és „súrlódásmentes” csiga következménye, hogy a két oldalon ugyanakkora a kötelerő. A „nyújthatatlan” kötélből pedig az következik, hogy a két test gyorsulásának nagysága megegyezik.

Válasszuk meg a *pozitív* irányt! Itt nyilván a nagyobb tömegű test indul lefelé, de bonyolultabb feladatoknál ezt nem mindig könnyű előre eldönteni. A feladat megoldása szempontjából mindegy, hogy mit választunk (az eredmény előjele majd megmutatja, merre mozognak valójában a testek).

Ezek után már felírhatjuk – a két testre külön-külön – a mozgásegyenleteket. Mindkét testre csak függőleges erők hatnak.



$$m_1 a = m_1 g - K$$

$$m_2 a = K - m_2 g.$$

Az egyenleteket összeadva és rendezve

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g = 2,45 \text{ m/s}^2,$$

amit valamelyik egyenletbe behelyettesítve

$$K = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g = 73,6 \text{ N}.$$

A plafonra ható erő a kötél erő kétszerese (hiszen a csiga „könnyű”).

$$2K = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}g = 147,2 \text{ N}.$$

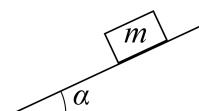
Vegyük észre, hogy ez kisebb, mint a két test (nyugalmában mérhető) súlyának az összege (157,0 N). Ezt paraméteresen is beláthatjuk (a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján):

$$\frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}g \leq (m_1 + m_2)g.$$

(Az okáról most nem feltétlen kell beszélni, csak ha megkérdezik: a tömegközéppont gyorsul lefelé, ezért lesz kisebb a rendszer súlya – lásd az előző feladatot.)

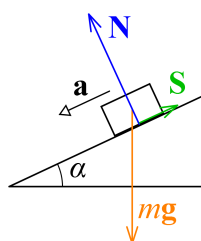
4. Egy $\alpha = 25^\circ$ hajlásszögű lejtőre $m = 1,5 \text{ kg}$ tömegű testet helyezünk (lásd az ábrát). A test és a lejtő között $\mu = 0,3$ a csúszási súrlódási együttható.

Elindul-e a kezdetben nyugalomban lévő test, ha elengedjük? Ha igen, mekkora a gyorsulása?



Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A múlt óra alapján a tapadás feltétele $\mu \geq \tan \alpha$, ez nem teljesül ($0,3 < \tan 25^\circ = 0,466$), tehát a test megcsúszik. A test nyilván lefelé fog gyorsulni, így *célszerű* a gyorsulás irányát lefelé pozitívnak választani.



A vektorok felbontása a múlt óraihoz hasonlóan történik. A lejtőre merőleges irányban a test nem mozoghat, így az ebben az irányban ható erőkomponensek eredője nulla (Newton I.). A lejtővel párhuzamos erőkomponensek eredője gyorsítja a testet (Newton II.). Ezen kívül fel kell írni a csúszási súrlódás összefüggését. Az egyenletrendszer:

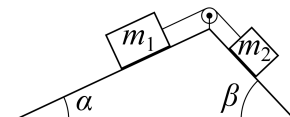
$$\begin{aligned} N &= mg \cos \alpha \\ ma &= mg \sin \alpha - S \\ S &= \mu N. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) g = 1,48 \text{ m/s}^2.$$

Észrevehetjük, hogy az eredmény független a test tömegétől (attól, hogy egy adat meg van adva, még nem biztos, hogy szükség van rá). A paraméteres eredményt lehetne diszkutálni (Mi van akkor, ha negatív eredményt kapunk? Akkor nem felfelé indul el, hanem akkor meg se csúszik, a múlt órai eset valósul meg!), de ezt majd a következő feladatnál tesszük meg.

5. Az ábrán látható kettős lejtőn a testeket egy könnyű, súrlódásmentes csigán átvetett ideális kötél köti össze. A testek kezdetben nyugalomban vannak.



Mekkora és milyen irányú lenne a testek gyorsulása, ha a testek és a lejtők közt nem lenne súrlódás? Oldjuk meg a feladatot paraméteresen, majd határozzuk meg a gyorsulás numerikus értékét is!

Adatok: $\alpha = 25^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 2,5 \text{ kg}$.

Mekkora a testek gyorsulása, ha a testek és a lejtő között mindkét oldalon $\mu = 0,1$ a súrlódási együttható? (Tegyük fel, hogy a tapadási és a csúszási súrlódási együttható megegyezik.) Oldjuk meg a feladatot paraméteresen, majd a fenti adatokkal határozzuk meg a gyorsulás numerikus értékét is!

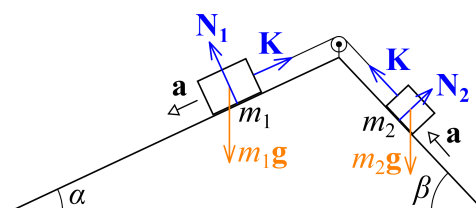
Diszkutáljuk a feladatot! Mi történhet a rendszerrel a testek elengedése után? Rögzített α és β értékek mellett határozzuk meg, hogy az m_1/m_2 tömegarány és a μ súrlódási együttható függvényében mikor melyik „forgatókönyv” valósul meg!

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A „könnyű”, „súrlódásmentes” csiga jelentését már megbeszéltük, az „ideális” kötél pedig ugyanazt jelenti, mint a „könnyű”, nyújthatatlan”. Tehát a kötél erő és a gyorsulás nagysága most is megegyezik a két oldalon.

Kezdjük a *súrlódásmentes* esettel!

A gyorsulás irányát nem könnyű számolás nélkül eldönteni: a bal oldalon lévő test nehezebb, de a jobb oldali lejtő meredekebb. Ebben a súrlódásmentes esetben mindegy, hogy melyik irányt feltételezzük, az eredmény előjele majd megmutatja, hogy valójában merre mozognak a testek. (De csak ebben a súrlódásmentes esetben, a súrlódásos esetben nem, ott bonyolultabb lesz!) Most javasoljuk azt a választást, hogy a testek balra gyorsulnak, tehát a bal oldali test csúszik lefelé. (Nem ez lesz, de legalább így gyakorolhatjuk az eredmény értelmezését.)



Használjunk megint lejtővel párhuzamos és lejtőre merőleges felbontást! Írjuk fel mindkét testre az egyenleteket (lejtővel párhuzamosan Newton II., lejtőre merőleges irányban Newton I. – bár az utóbbiakra ebben a részben még nem lesz szükség):

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g \sin \alpha - K & N_1 &= m_1 g \cos \alpha \\ m_2 a &= K - m_2 g \sin \beta & N_2 &= m_2 g \cos \beta . \end{aligned}$$

A bal oldalon álló egyenleteket összeadva és rendezve:

$$a = \frac{m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta}{m_1 + m_2} g = -0,89 \text{ m/s}^2 .$$

Láthatjuk, hogy az eredmény negatív, tehát a testek az előzetes elképzeléssel ellentétes irányban fognak gyorsulni. Az adatok olyanok, hogy a kisebb (de meredekebb lejtőn álló) test indul el lefelé $a = 0,89 \text{ m/s}^2$ gyorsulással.

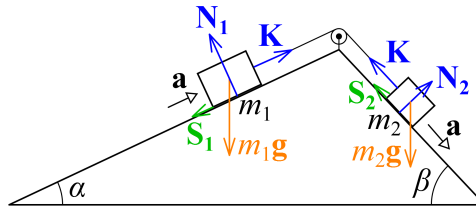
A paraméteres megoldást tanulmányozva azt láthatjuk, hogy a gyorsulás irányát az $m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta$ kifejezés előjele dönti el. Nyugalmában csak akkor maradhat a rendszer, ha ez a kifejezés éppen nulla.

Folytassuk a *súrlódásos* esettel!

Ha a testek és a lejtő között súrlódás van, de a többi adat változatlan, akkor a testek *biztosan* nem indulhatnak el balra, hiszen a súrlódás legfeljebb megakadályozhatja a mozgást, az irányát nem változtathatja meg. Tehát az előző rész alapján két lehetséges eset van: a testek jobbra kezdenek gyorsulni, vagy nyugalomban maradnak. (Ha nem vizsgáltuk volna meg a súrlódásmentes esetet, akkor három lehetőség lenne.)

Sajnos, ha súrlódás van, akkor attól függően, hogy melyik esetet feltételezünk, más-más egyenleteket kell felírni. Így csak azt tehetjük, hogy valamelyik esetet feltételezzük, megoldjuk a feladatot, és ha *ellentmondásra jutunk*, akkor újra kezdjük más feltételezéssel. Ezzel majd a harmadik részben, a diszkusszióban foglalkozunk. Most feltesszük, hogy a testek elkezdnek mozogni (az előző rész alapján jobbra).

Ennek megfelelően készítsük el a vektorábrát (a súrlódási erők a feltételezett gyorsulással ellentétes irányban hatnak).



Írjuk fel mindkét testre az egyenleteket (Newton II., Newton I. és csúszási súrlódás):

$$\begin{aligned} m_1 a &= K - m_1 g \sin \alpha - S_1 & N_1 &= m_1 g \cos \alpha & S_1 &= \mu N_1 \\ m_2 a &= m_2 g \sin \beta - K - S_2 & N_2 &= m_2 g \cos \beta & S_2 &= \mu N_2 . \end{aligned}$$

A súrlódási erők kifejezésébe beírjuk a nyomóerők kifejezéseit, ezeket beírjuk a mozgásegyenletekbe, majd a két egyenletet összeadjuk, és rendezzük:

$$a = \frac{m_2 \sin \beta - m_1 \sin \alpha - \mu (m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta)}{m_1 + m_2} g = 0,09 \text{ m/s}^2 .$$

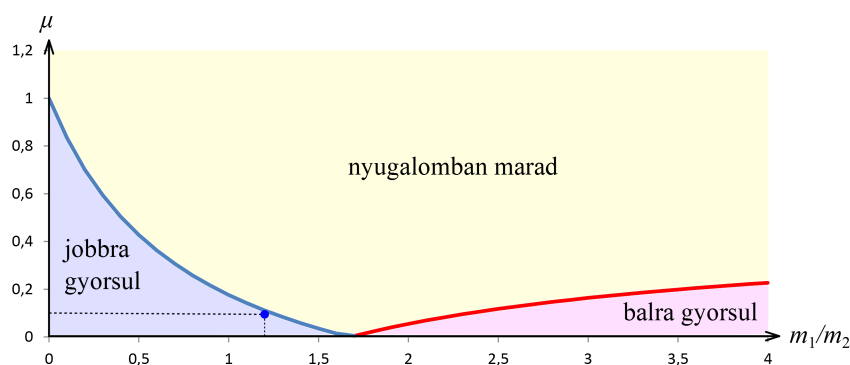
A numerikus eredmény azt mutatja, hogy a rendszer elindul („épphogy”, a gyorsulás nagyon kicsi).

A feladat *diszkussziója* (ezt csak akkor csináljuk, ha van rá idő és érdeklődés):

Vizsgáljuk a paraméteres megoldásunkat! Ha súrlódás kicsit nagyobb lenne ($\mu \geq 0,12$), de a többi adatot nem változtatnánk, akkor a numerikus eredmény negatív lenne. Mit jelent ez? Semmiképpen se azt, hogy a rendszer az ellentétes irányba, balra mozog! (Azt láttuk már a súrlódásmentes részben.) A negatív eredmény azt jelentené, hogy a *feltevésünk* hibás volt, és újra kell kezdenünk a megoldást: itt csak az a másik lehetőség van, hogy a rendszer nyugalomban marad. (Ezt leellenőrizhetjük, ha a múlt óraihoz hasonló módon felírjuk az erőegyensúlyokat, és ellenőrizzük a *tapadási* súrlódás egyenlőtlenségeit.)

Nézzük meg, hogy ha nem csak a súrlódási együttható értékét, hanem a tömegek arányát is változtathatjuk (a lejtők hajlásszögét változtatlanul hagyva), akkor mit tapasztalunk. (Az nyilvánvaló, hogy csak a tömegek *aránya* számít.) Háromféle „forgatókönyv” lehetséges: a testek balra indulnak el, jobbra indulnak el, vagy nyugalomban maradnak. Mi most azt az esetet számoltuk végig, amikor a feltételezésünk szerint a testek jobbra mozognak. Ha itt negatív eredményt kapunk, akkor ez a feltételezés hibásnak bizonyul, és – más tömegarányok, súrlódási együtthatók esetén – vagy balra indul el a rendszer, vagy nyugalomban marad. A „jobbra indulás” feltételezéshez hasonlóan végigszámolható a „balra indulás” eset is: csak az a különbség, hogy akkor a súrlódási erők az ellenkező irányba mutatnak. Ha itt pozitív gyorsulást kapunk, akkor ez a helyes feltételezés. Ha viszont itt is negatív eredmény jön ki, akkor a testek nyugalomban maradnak. (Negyedik lehetőség nincs.)

A gyorsulásra kapott képlet rendezésével kifejezhetjük *adott tömegarány* függvényében a kritikus súrlódási együtthatót, vagy adott súrlódási együttható függvényében a kritikus tömegarányokat (kétféle: a balra és a jobbra indulást). Itt most túl sok lenne a képletek megadása, de például Excel táblázatkezelővel bárki eljátszhat ezzel. Ez a grafikon is úgy készült (utána némileg csinosítva):



Látható, hogy egy bizonyos tömegarálynál mindenképp nyugalomban marad a rendszer. Ezt a tömegarányt könnyen kiszámolhatjuk:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 1,67.$$

Ha $\mu \geq \tan \beta = 1$, akkor egyáltalán nem mozoghat, ha $\mu \geq \tan \alpha = 0,466$, akkor csak jobbra indulhat el (vagy nyugalomban maradhat). Ha $\mu < \tan \alpha = 0,466$, akkor a tömegaránytól függően indul el balra vagy jobbra, illetve maradhat nyugalomban.

A kék pötty a feladat adataihoz ($\mu = 0,1$ és $m_1/m_2 = 1,2$) tartozó állapot: a testek jobbra gyorsulnak.

3. gyakorlat – tömegpontok kinematikája

Bevezető:

Tisztázzunk alapfogalmakat! A test *helyét* adjuk meg az *idő* függvényében. A helyet általános (térbeli) esetben a *helyvektor* adja meg, amit 1-, 2- és 3-dimenziós esetekben 1, 2, illetve 3 koordinátával adhatunk meg.

Könnyen összekeverhető fogalmak, amelyek között különbséget kell tenni: A *pálya* egy térgörbe, azon pontok halmaza, melyeken áthalad a test mozgása során. Az *elmozdulás* általában vektoriális mennyiség (egy dimenzióban előjeles skalár), amely a test helyének egy adott idő alatti megváltozását adja meg. Az *út* viszont skalár mennyiség: a test által befutott pályaszakasz hossza. (Egyenesvonalú és egyirányú mozgásnál megegyezik az elmozdulás nagyságával.)

Az *átlagsebesség* egy hosszabb mozgásnál a teljes megtett út és az összes idő hányadosa (és nem a sebességek átlaga, lásd az 1. feladatot).

A *pillanatnyi sebességhez* úgy jutunk el, hogy egy *megfelelően rövid* időtartamra kiszámoljuk a test elmozdulásának és a hozzá tartozó időnek a hányadosát:

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

(Azt, hogy mi a *megfelelően rövid* idő, a mozgás jellegétől függ. Minél gyorsabban változik a test sebessége, annál rövidebb idővel kell számolni.)

A sebesség vektoriális mennyiség: nagysága és iránya is van. Többdimenziós esetben külön-külön kiszámíthatjuk a sebességkomponenseket:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_y &= \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ v_z &= \frac{\Delta z}{\Delta t}. \end{aligned}$$

A sebesség az elmozdulás *változási sebessége*. Ehhez hasonlóan beszélhetünk a sebesség változási sebességéről, azaz a gyorsulásról:

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

A gyorsulás is vektoriális mennyiség, amit szintén koordinátáinként meghatározhatunk.

Használjunk függvényeket, erősítsük a függvényszemléletet (az $s = vt$ és hasonló kész képletek helyett)! Rajzoljunk és rajzoltassunk grafikonokat!

A 2. feladatban tárgyaljuk a görbe meredekségét és a görbe alatti területet – a deriválás és az integrálás fogalmának bevezetése nélkül. (Legfeljebb a legvégén lehet megemlíteni azoknak, akik tanulták, hogy itt erről van szó.)

A 3. feladatban lesz *nagyon szemléletesen* szó arról, hogy milyen kapcsolat van egy függvény szélsőértéke és a derivált zérushelye között – anélkül, hogy deriváltról, és általában szélsőértékről szó lenne.

1. Egy autó a 90 km-es út első felét 50 km/h sebességgel, a második felét 130 km/h sebességgel teszi meg.

Mekkora az átlagsebessége?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

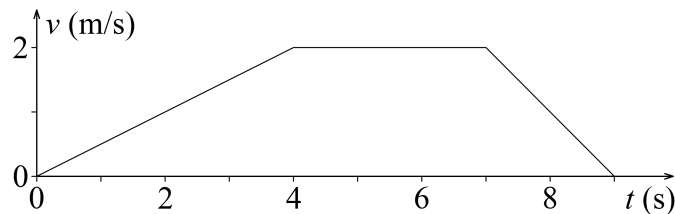
$$v_{\text{átl}} = \frac{s_{\text{össz}}}{t_{\text{össz}}} = \frac{s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = 72,2 \text{ km/h},$$

vagy

$$v_{\text{átl}} = \frac{s_{\text{össz}}}{t_{\text{össz}}} = \frac{90 \text{ km}}{\frac{45}{50} \text{ h} + \frac{45}{130} \text{ h}} = \frac{90 \text{ km}}{1,246 \text{ h}} = 72,2 \text{ km/h}.$$

Jegyezzük meg, hogy az eredmény *kisebb*, mint a sebességek számtani középértéke. (Az átlagsebesség súlyozott harmonikus közép.) Azt is megemlíthetjük, hogy az átlagot erősebben befolyásolja a kisebb sebesség: ha az első felén csak lassan megyünk, hiába szágulduink a második felén, azzal már csak kicsit javíthatjuk az átlagot.

2. A grafikon egy test sebességét ábrázolja az idő függvényében.



A grafikonról látszik, hogy a mozgás során a gyorsulás szakaszonként állandó. Határozza meg az egyes szakaszokon a gyorsulást! Ábrázolja a gyorsulást az idő függvényében!

Határozza meg a test által a mozgás folyamán megtett utat!

Ábrázolja a test elmozdulását az idő függvényében! (A $t = 0$ pillanatban a test az $x = 0$ helyen van.)

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A gyorsulást az egyes szakaszokon az

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

összefüggéssel számolhatjuk.

Hívjuk fel a figyelmet a Δ jel jelölésére: ez valaminek a megváltozása, amit úgy számolunk ki, hogy az új értékből kivonjuk a régit. Ez lehet pozitív, nulla vagy negatív is (ahol a sebesség csökken, a gyorsulás negatív):

$$a_1 = \frac{(2 - 0) \text{ m/s}}{(4 - 0) \text{ s}} = 0,5 \text{ m/s}^2$$

$$a_2 = \frac{(2 - 2) \text{ m/s}}{(7 - 4) \text{ s}} = 0 \text{ m/s}^2$$

$$a_3 = \frac{(0 - 2) \text{ m/s}}{(9 - 7) \text{ s}} = -1 \text{ m/s}^2$$

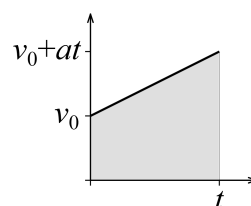
Vázoljuk fel a grafikont, ha lehet, akkor a sebesség–idő grafikon alá! (Megemlíthetjük, hogy a gyorsulás szakaszonként állandó, és közte ugrik, de a valóságban sosincs ugrás, legfeljebb nagyon gyors változás.)

A megtett út kiszámításához először beszéljünk arról, hogy ha a test állandó sebességgel mozog, akkor az elmozdulását a $\Delta x = v\Delta t$ összefüggéssel számolhatjuk ki. Ha ezt ábrázoljuk, akkor a sebesség–idő függvény egy vízszintes szakasz, az elmozdulás nagysága pedig éppen a szakasz alatti téglalap területe.

Mondjuk ki (minden levezetés nélkül), hogy ez a „szabály” más esetekben is igaz: a test elmozdulását egy adott idő alatt úgy határozhatjuk meg, hogy kiszámítjuk a sebesség–idő függvény alatti területet. (Megemlíthetjük, hogy ha a sebesség negatív, a függvény a t -tengely alatt megy, akkor az ehhez tartozó elmozdulás negatív, a test „visszafelé” megy, így ezt a területet a teljes elmozdulásból le kell vonni.) A terület kiszámítása persze általában bonyolult: erre „találták ki” az integrálást, de most itt könnyű, csak háromszögek területét kell kiszámítani.

Eszerint a teljes elmozdulás 12 m (két háromszög és egy téglalap területének összege).

Ahhoz hogy meghatározzuk a test elmozdulását az idő függvényében, meg kell határozni, hogy mekkora a görbe alatti terület, ha v_0 a kezdősebesség és a a gyorsulás. Ekkor t idő múlva a sebesség $v(t) = v_0 + at$ lesz, az ezalatt megtett út pedig a trapéz alatti terület:



$$x(t) = \frac{v_0 + v_0 + at}{2}t = v_0t + \frac{a}{2}t^2.$$

Ha a testnek már a $t = 0$ pillanatban is volt elmozdulása (x_1), akkor a test helyét megadó összefüggés:

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{a}{2}t^2.$$

Ezután már szakaszonként meghatározhatjuk az $x(t)$ függvényt. Az első (0-tól 4 s-ig tartó) szakaszon:

$$x(t) = 0 + 0 + \frac{0,5 \text{ m/s}^2}{2}t^2 = 0,25 \text{ m/s}^2 \cdot t^2,$$

ami egy parabolaív egyenlete. A szakasz végén az elmozdulás 4 m lesz.

A következő szakaszon a test egyenletes sebességgel mozog, a test helyét az idő függvényében egy lineáris összefüggés írja le:

$$x(t) = 4 \text{ m} + 2 \text{ m/s} \cdot (t - 4 \text{ s}) + 0 = 2 \text{ m/s} \cdot t - 4 \text{ m},$$

a szakasz végén a teljes elmozdulás 10 m lesz.

Az utolsó szakasz ismét gyorsuló mozgás:

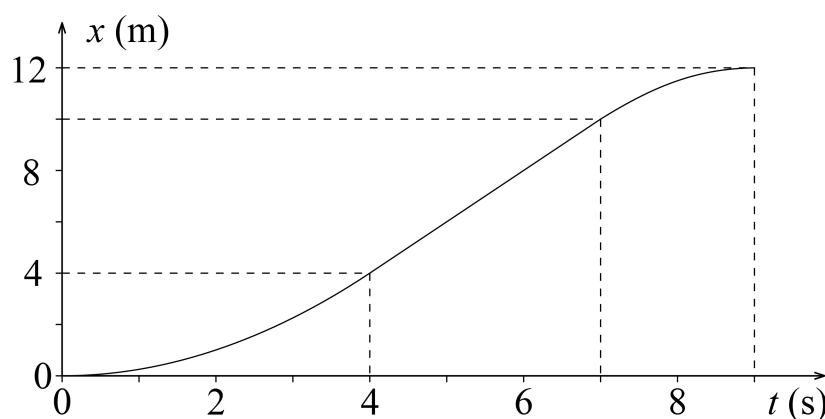
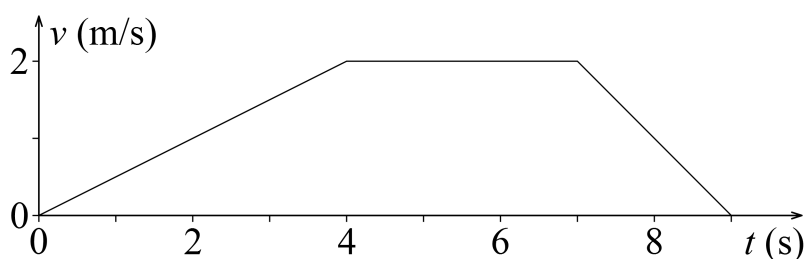
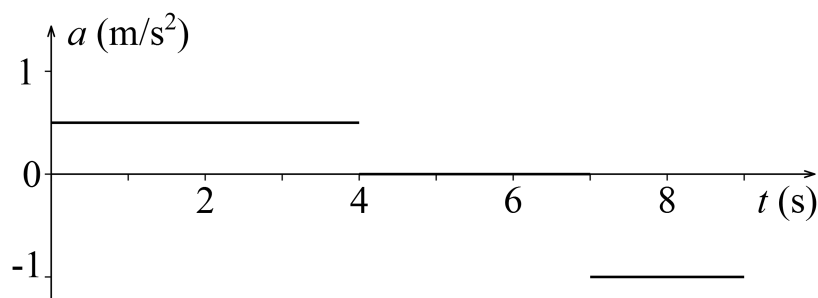
$$x(t) = 10 \text{ m} + 2 \text{ m/s} \cdot (t - 7 \text{ s}) + \frac{-1 \text{ m/s}^2}{2}(t - 7 \text{ s})^2 = -0,5 \text{ m/s}^2 \cdot t^2 + 9 \text{ m/s} \cdot t - 28,5 \text{ m},$$

amely ismét egy (most lefelé görbülő) parabolaív. A $t = 9 \text{ s}$ időpillanatban (a mozgás végén) az elmozdulásra valóban $x = 12 \text{ m}$ jön ki.

Az ábrázolás nem olyan nehéz, mint amilyennek látszik! Nem kell értéktáblázat, elég az a négy pont amit meghatároztunk, és utána csak a meredekségekre kell figyelni!

Rajzoljuk meg a koordináta-rendszert! Vízszintesen 9 s-ig, függőlegesen 12 m-ig. (Ha van annyi hely, hogy még a táblán van a sebesség–idő és a gyorsulás–idő grafikon, akkor nagyon jó, ha pont alájuk kerül!)

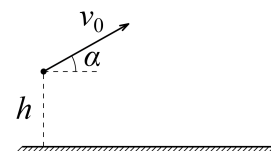
Vegyük fel a $(0;0)$, a $(4;4)$, a $(7;10)$ és a $(9;12)$ pontokat! A második és a harmadik pont között a mozgás egyenletes, itt rajzoljunk be egy egyenes szakaszt. A mozgás első részén a test nulla kezdősebességgel indul, az első pillanatokban „szinte áll”, és ezért a parabolaív *érintője* vízszintes lesz. Amikor befejeződik a gyorsulás, akkor a sebessége 2 m/s lesz, tehát az utolsó pillanatokban már szinte ugyanolyan gyorsan megy, mint az utána következő szakaszon, és ezért a parabolaív *érintője* ez a szakasz lesz! Ez alapján a „parabolaív” (egy ügyes görbe) már elég pontosan berajzolható! Ugyanígy járjunk el az utolsó szakaszon! Itt az elején az egyenes szakasz az *érintő*, a végén pedig megint vízszintes, mert a test a végére megáll.



Hívjuk rá fel a figyelmet, hogy ahol a sebesség nagyobb, ott az elmozdulás–idő függvény meredekebb. (Esetleg megemlíthetjük már itt is, hogy ha v negatív, akkor a test az ellenkező irányba mozog, és x - t lejt.)

3. Egy testet a talajtól számított h magasságból, v_0 kezdősebességgel, a vízszintessel α szögben elhajítunk.

Tanulmányozza a mozgást! (Tegye fel, hogy a légellenállás elhanyagolható! Ez nem túl nagy sebességek és aránylag nehéz testek – például egy súlylökő golyó esetében – jogos közelítés.)



Adja meg és ábrázolja (két külön grafikonon) a test vízszintes és függőleges elmozdulását az idő függvényében! (A vízszintes elmozdulást az eldobás helyétől, a függőleges elmozdulást a talajtól mérje.)

Adja meg és ábrázolja (két külön grafikonon) a test sebességének vízszintes és függőleges komponensét az idő függvényében!

Adja meg és ábrázolja a test pályáját (azaz a függőleges elmozdulást a vízszintes elmozdulás függvényében)!

Milyen magasra jut a test a mozgása során?

Segítség: Először azt határozza meg, hogy *mikor* érkezik a pálya tetőpontjára! Hogyan fogalmazhatja meg matematikailag a „tetőre jutás”-t?

Hol és mekkora sebességgel érkezik a test a talajra?

Segítség: Először azt határozza meg, hogy *mikor* érkezik a talajra! Hogyan fogalmazhatja meg matematikailag a „földet érés”-t?

Legfeljebb milyen messze érhet talajt a test, ha $h = 2\text{ m}$ és $v_0 = 8\text{ m/s}$ (az α szöget pedig tetszőlegesen megválaszthatjuk)?

Segítség: Ez sokkal nehezebb kérdés, mint az eddigiek. Megoldhatja numerikusan (számítógépes „próbálgatással”) is.

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A testre – légellenállás hiányában – csak a nehézségi erő hat, így gyorsulása g nagyságú lesz függőlegesen lefelé. A mozgás egy függőleges síkban történik, két dimenzióban, ezért a leírást vízszintes és függőleges komponensekre bontjuk, koordinátáinként írjuk le. A koordináta-rendszert úgy vesszük fel, hogy origója az eldobás helye alatt a talajon legyen, az x -tengely jobbra, az y -tengely felfelé mutasson.

A mozgás vízszintes irányban *egyenletes* mozgás lesz, mert a gyorsulásnak nincs vízszintes komponense. Függőleges irányban a test gyorsulása végig $a = -g$ (negatív).

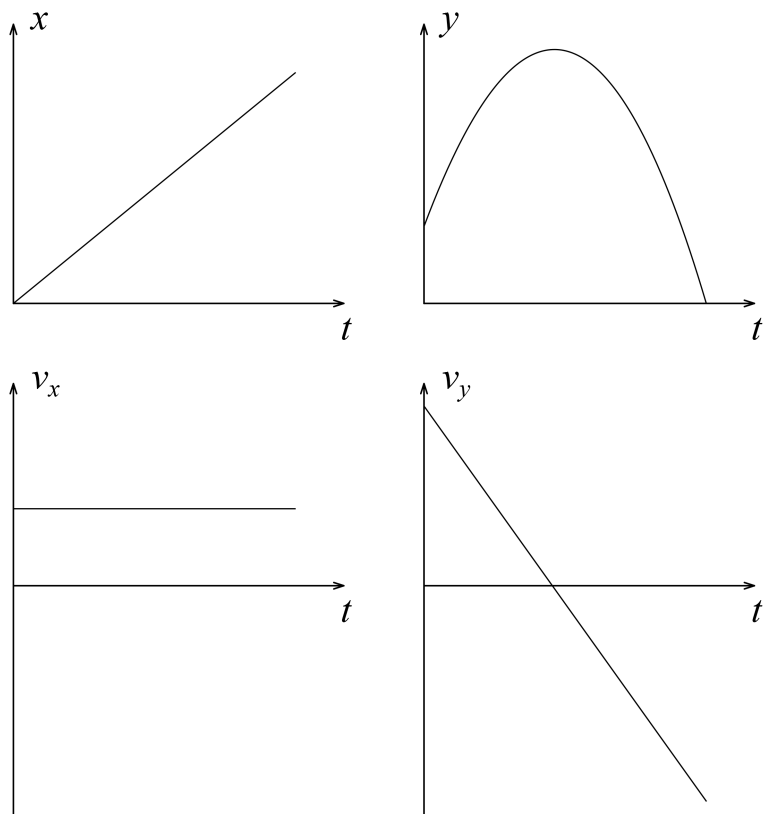
Ezután a test helyzetét megadó $x(t)$ és $y(t)$ függvényeket az előző feladat alapján már könnyen felírhatjuk. A test kezdősebessége vízszintes irányban $v_{x0} = v_0 \cos \alpha$, függőleges irányban $v_{y0} = v_0 \sin \alpha$. Kezdőhelyzete: $x = 0$ és $y = h$.

$$\begin{aligned}x(t) &= 0 + v_{x0}t + 0 = v_0 \cos \alpha \cdot t \\y(t) &= h + v_{y0}t + \frac{a}{2}t^2 = h + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2}t^2.\end{aligned}$$

Hasonlóan a sebességfüggvények:

$$\begin{aligned}v_x(t) &= v_{x0} + 0 = v_0 \cos \alpha = \text{állandó} \\v_y(t) &= v_{y0} + at = v_0 \sin \alpha - gt.\end{aligned}$$

$x(t)$ lineáris, $y(t)$ egy lefelé nyitott parabola, $v_x(t)$ konstansfüggvény, $v_y(t)$ lineáris függvény negatív meredekséggel. Most még ne mondjuk, de figyeljünk rá, hogy $v_y(t)$ ott legyen 0, ahol $y(t)$ -nek maximuma van!

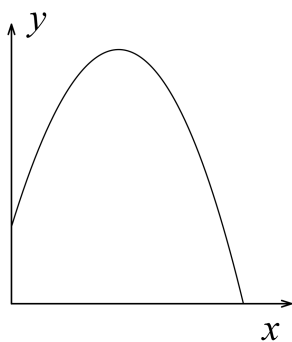


A pályát leíró egyenletet megkapjuk, ha $x(t)$ -ből kifejezzük t -t, és ezt behelyettesítjük $y(t)$ -be:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$y(x) = h + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 = h + \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

A pálya egy lefelé nyitott parabola. (Figyeljünk, hogy az y -tengelyen ugyanakkora legyen h és $y_{\max}$ is, mint az $y(t)$ grafikonon, x maximális értékét pedig az $x(t)$ grafikon határozza meg.)



Mikor ér a test a pálya tetejére? Amíg felfelé mozog, az y -irányú sebessége pozitív, amikor már lefelé mozog, akkor pedig negatív. A v_y sebesség folytonosan változik, így

közben – éppen akkor amikor a test a tetőpontra ér – egy „pillanatra” nulla lesz. Tehát a „tetőre jutás” matematikai feltétele: $v_y(t) = 0$. Ha már meghatároztuk ezt az időpontot, akkor behelyettesítve az $y(t)$ függvénybe megkapjuk, milyen magasra jut a test. ($x(t)$ -be helyettesítve pedig azt, hogy ekkor hol lesz vízszintes irányban.)

Ez alapján a tetőre jutás t_t időpontja és a pálya legmagasabb pontjának helye:

$$\begin{aligned}v_y(t_t) &= v_0 \sin \alpha - gt_t = 0 \\t_t &= \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \\y_{\max} = y_t = y(t_t) &= h + v_0 \sin \alpha \cdot t_t - \frac{g}{2} t_t^2 = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \\x_t = x(t_t) &= v_0 \cos \alpha \cdot t_t = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.\end{aligned}$$

Mikor érkezik a test a talajra? Akkor, amikor $y(t) = 0$. Tehát ez a „földet érés” matematikai feltétele. Ha már meghatároztuk ezt az időpontot, akkor behelyettesítve az $x(t)$ függvénybe megkapjuk, milyen messze ér talajt. $v_x(t)$ -be és $v_y(t)$ -be behelyettesítve pedig megkapjuk a sebességkomponenseket a földet éréskor, amiből a sebesség nagyságát és irányát már meghatározhatjuk.

A földet érés t_f időpontjára egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$y(t_f) = h + v_0 \sin \alpha \cdot t_f - \frac{g}{2} t_f^2 = 0$$

ennek *pozitív* gyöke lesz a keresett idő:

$$t_f = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}.$$

A földet érés helye, a sebességkomponensek, a sebesség nagysága és vízszintessel bezárt szöge ebből behelyettesítéssel megkapható:

$$\begin{aligned}x_f = x(t_f) &= v_0 \cos \alpha \cdot t_f = v_0 \cos \alpha \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g} \\v_{fx} = v_x(t_f) &= v_0 \cos \alpha \\v_{fy} = v_y(t_f) &= v_0 \sin \alpha - gt_f = -\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh} < 0 \\v_f &= \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \\\beta = \arctg \frac{v_{fy}}{v_{fx}} &= -\arctg \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{2gh}{v_0^2 \cos^2 \alpha}} < 0.\end{aligned}$$

(A földet érés sebessége persze egyből kijönne energiákból, de arról még nem beszélünk.) Ha a testet a talajról indítjuk ($h = 0$), a képletek lényegesen egyszerűsödnek:

$$\begin{aligned}x_t &= \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \\v_t &= v_0 \\\beta &= -\alpha\end{aligned}$$

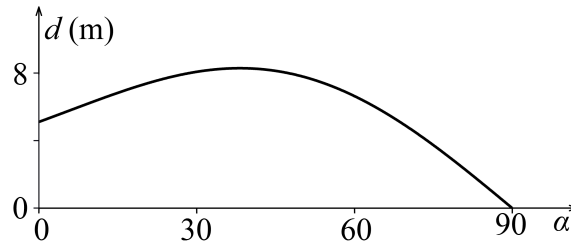
Nehéz kérdés (csak ha marad idő és kedv):

A rövidség kedvéért jelöljük a földet érés távolságát $x_f = d$ -vel! Keressük $d_{\max}$ -ot!

Numerikus megoldás: Készítsünk egy Excel táblázatot, ahol az egyik oszlopban α van tizedfokonként, a másik oszlopban pedig $d = x_f$ a fent levezetett

$$d = v_0 \cos \alpha \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}$$

képlet szerint, az első oszlopban álló α és a megadott $h = 2$ m, $v_0 = 8$ m/s, valamint $g = 9,81$ m/s² értékekkel kiszámolva. Ábrázoljuk grafikonvarázslóval az adatokat, és nézzük meg, mekkora a maximuma (és mekkora szögnél)!



A maximum helye és értéke a táblázatból is kikereshető: $\alpha_{\max} = 38,2^\circ$, $d_{\max} = 8,3$ m.

Egzakt megoldás (nehéz!): Azt, hogy *hol* ér földet a test az $y(x) = 0$ egyenlet megoldásával is megkaphatjuk. Írjuk fel a korábban levezetett $y(x)$ függvény alapján ezt az egyenletet:

$$-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} d^2 + \operatorname{tg} \alpha \cdot d + h = 0,$$

amit az $1/\cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ azonosság felhasználásával a következő alakra hozhatunk:

$$-\frac{g}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) d^2 + \operatorname{tg} \alpha \cdot d + h = 0.$$

Ez az egyenlet nem csak d -re másodfokú, hanem – átrendezve – $\operatorname{tg} \alpha$ -ra is:

$$d^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{2v_0^2 d}{g} \operatorname{tg} \alpha + \left(d^2 - \frac{2hv_0^2}{g} \right) = 0.$$

Az egyenletnek akkor van megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív:

$$\frac{4v_0^4 d^2}{g^2} - 4d^2 \left(d^2 - \frac{2hv_0^2}{g} \right) \geq 0,$$

amiből

$$d \leq \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

Ezek szerint a lehetséges legnagyobb távolság, ahová eljuthat a test

$$d_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 8,3 \text{ m}.$$

Az ehhez tartozó szög:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{\max} &= \frac{v_0^2}{gd_{\max}} = 0,787 \\ \alpha_{\max} &= 38,2^\circ. \end{aligned}$$

4. gyakorlat – körmozgás

Bevezető:

Körmozgás: a *pálya* kör, sugara r .

A test helyzetét a megtett s úton kívül a *forgásszöggel* is jellemezhetjük: φ előjeles, radiánban mérjük, 2π -nél nagyobb is lehet. Kapcsolatuk $s = r\varphi$.

Test sebessége: v_{ker} kerületi sebesség. De jellemezhető a forgásszög változási sebességével is, a *szögsebességgel*:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

a kettő közötti kapcsolat: $v_{\text{ker}} = r\omega$.

Egyenletes körmozgásnál $\omega =$ állandó, ilyenkor a mozgás periodikus. $T = \frac{2\pi}{\omega}$ a periódusidő (egy körbejárás, egy fordulat ideje), $n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ a fordulatszám (általában fordulat/perc – angolul rpm, revolution per minute – egységekben megadva).

Gyorsulások:

A testnek akkor is van gyorsulása, ha $|\mathbf{v}| = v_{\text{ker}} =$ állandó, mert változik a sebességvektor iránya. Levezetés nélkül: a centripetális gyorsulás a kör középpontja felé mutat, nagysága:

$$a_{\text{cp}} = \frac{v_{\text{ker}}^2}{r} = \omega^2 r = \omega v_{\text{ker}}.$$

Ha a sebesség nagysága is változik, akkor van pálya irányú (tangenciális) gyorsulás is:

$$a_t = \frac{\Delta v_{\text{ker}}}{\Delta t} = r\beta,$$

ahol

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

a szöggyorsulás (a szögsebesség változási sebessége).

A teljes gyorsulásvektor a két gyorsuláskomponens vektori összege.

1. Egy 400 m-es futópályán két futó edz. Mindketten állandó sebességgel futnak. Ha szembe futnak egymással, akkor percenként találkoznak, ha ugyanabba az irányba, akkor 6 percenként.

Mekkora a futók sebessége?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Az egyenletrendszer (v_1, v_2 a két sebesség, t_1, t_2 a találkozások közt eltelt idők, k a pálya kerülete):

$$(v_1 + v_2)t_1 = k$$

$$(v_1 - v_2)t_2 = k,$$

ebből rendezéssel és a numerikus adatok behelyettesítésével (a percek át kell váltani másodpercebe!):

$$v_1 = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) = 3,89 \text{ m/s} = 14 \text{ km/h}$$

$$v_2 = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} \right) = 2,78 \text{ m/s} = 10 \text{ km/h}.$$

2. Egy régi lemezjátszó korongja $33\frac{1}{3}$ fordulatot tesz meg percenként, a „nagylemez” átmérője 30 cm. A forgó lemez legszélére egy kis tárgyat teszünk.

Legalább mekkora a kis tárgy és a lemez között a tapadási súrlódási együttható, ha a test nem csúszik meg?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A kis test egyenletes körmozgást végez. A körpálya sugara $r = 0,15$ m, a körmozgás szögsebessége $\omega = 2\pi \frac{33\frac{1}{3}}{60} = 3,49 \text{ s}^{-1}$.

A kis testre függőleges irányban a nehézségi erő és a lemez által kifejtett nyomóerő hat, ezek eredője nulla.

Vízszintes irányban egyetlen erő hat, a tapadási súrlódási erő. Ez a forgástengely irányába (befelé) hat, és ez okozza a test (centripetális) gyorsulását. (Hangsúlyozzuk, hogy nincsen külön „centripetális erő”, a centripetális gyorsulást a testre ható erők eredője – itt most egyedül a tapadási súrlódási erő – okozza! Nincs *centrifugális erő* se, mert *inercia-rendszerben* írjuk le a mozgást. Csak azok az erők vannak, amelyekről az 1. gyakorlaton beszéltünk: nehézségi erő, kötélérő, nyomóerő, súrlódási erő.)

Ezen kívül teljesülnie kell a tapadási súrlódás egyenlőtlenségének. Az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} N &= mg \\ S &= ma_{\text{cp}} = m\omega^2 r \\ S &\leq \mu N, \end{aligned}$$

ebből pedig a súrlódási együttható:

$$\mu \geq \frac{\omega^2 r}{g} = 0,19.$$

3. Egy autó $R = 120$ m sugarú kanyarban halad $v_0 = 90$ km/h sebességgel. A kerekek és a száraz aszfalt között $\mu = 0,6$ a tapadási súrlódási együttható.

Legfeljebb mekkora a_t pálya irányú gyorsulással fékezhet a kanyar közben a vezető?

Mekkora úton tud így megállni, ha a pálya irányú gyorsulása a fékezés közben állandó?

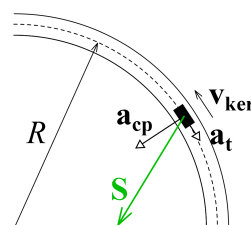
Ezekkel a gumikkal legfeljebb mekkora állandó v_{max} sebességgel lehetne „bevenni” ezt a kanyart? Miért veszélyes, ha az autó ezzel a maximális sebességgel érkezik a kanyarba?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Az autóra függőleges irányban a nehézségi erő és a talaj nyomóereje hat, ezek eredője nulla.

Vízszintes irányban csak a tapadási súrlódási erő hat, ez okozza az autó gyorsulását. A gyorsulásnak két komponense van: a centripetális gyorsulás, amely a körpálya középpontja felé mutat, és a tangenciális (pálya irányú) gyorsulás, amely most a sebességgel ellentétes irányú (fékez az autó).

A tapadási súrlódási erő és a nyomóerő között teljesülni kell az egyenlőtlenségnek.



Mindezek alapján:

$$\begin{aligned} N &= mg \\ S &= ma = m\sqrt{a_{\text{cp}}^2 + a_t^2} \\ a_{\text{cp}} &= \frac{v_0^2}{R} \\ S &\leq \mu N. \end{aligned}$$

Ebból rendezéssel (ne felejtsük el átváltani a sebességet km/h-ból m/s-ba!):

$$|a_t| \leq \sqrt{\mu^2 g^2 - a_{\text{cp}}^2} = \sqrt{\mu^2 g^2 - \frac{v_0^4}{R^2}} = 2,74 \text{ m/s}^2.$$

Az autó maximális lassulása tehát $2,74 \text{ m/s}^2$ (pálya irányú gyorsulása $-2,74 \text{ m/s}^2$).
Ha a pálya irányú gyorsulás állandó, akkor az autó

$$t = \frac{v_0}{|a_t|} = 9,12 \text{ s}$$

idő alatt áll meg, és ezalatt

$$s = \frac{|a_t|}{2} t^2 = \frac{v_0^2}{2|a_t|} = 114 \text{ m}$$

utat tesz meg.

Ha az autó nem fékez, akkor a súrlódási erő a körpálya középpontja felé mutat, ilyenkor az egyenletrendszer:

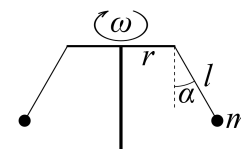
$$\begin{aligned} N &= mg \\ S &= ma = m \frac{v_{\text{max}}^2}{R} \\ S &\leq \mu N, \end{aligned}$$

amiből

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\mu g R} = 26,6 \text{ m/s} = 95,7 \text{ km/h}.$$

Ez azért veszélyes, mert így a kanyar közben nem tud fékezni. Ha mégis fékezésre kényszerül, akkor vagy nagyobb sugarú pályán kell haladnia, azaz kisodródik az útról, vagy megcsúszik (és szintén kisodródik az útról, valamint kormányozhatatlanná is válik).

4. Egy körhintán a hinták $l = 8 \text{ m}$ hosszú kötelei egy $r = 5 \text{ m}$ sugarú forgó keretre vannak rögzítve. Amikor a körhinta egyenletes sebességgel forog, a hinták kötele a függőlegessel $\alpha = 30^\circ$ -os szöget zár be.



Mekkora a körhinta ω szögsebessége?

Mekkora a körhintában ülő $m = 60 \text{ kg}$ tömegű ember *súlya* (azaz mekkora erő feszíti a kötelet, ha a szék tömegét elhanyagoljuk)?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A körhintában ülő emberre a nehézségi erő és a kötelerő hat. Ennek a két erőnek az eredője tartja körpályán, azaz ez az eredő erő okozza a centripetális gyorsulását.

A körpálya sugara az ábra alapján $r + l \sin \alpha$.

Az egyenletrendszer:

$$K \cos \alpha = mg$$

$$K \sin \alpha = ma_{cp} = m(r + l \sin \alpha)\omega^2,$$

amiből a keresett szögsebesség:

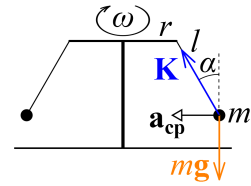
$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{r + l \sin \alpha}} = 0,79 \text{ s}^{-1}.$$

Ez $n = 60 \cdot \frac{0,79}{2\pi} = 7,6$ fordulat/perc-et és $v_{ker} = \omega(r + l \sin \alpha) = 7,14 \text{ m/s} = 25,7 \text{ km/h}$ kerületi sebességet jelent.

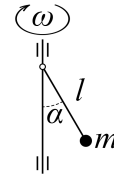
A kötelerő

$$K = \frac{mg}{\cos \alpha} = 680 \text{ N} > mg = 590 \text{ N},$$

tehát a forgó körhintában nagyobb a test súlya (nagyobb erővel nyomja az ülést), mint nyugalmi helyzetben.



5. Az ábrán látható elrendezésben a függőleges rudat ω szögsebességgel forgatjuk. A rúdhoz egy csuklóval csatlakozik egy másik, l hosszúságú, könnyű rúd, amelynek a végén m tömegű, pontszerűnek tekinthető test van rögzítve. (A csukló ábra síkjára merőleges tengelye szabadon engedi „kilendülni” a testet, azaz az α szög szabadon változhat, de közben a ferde rúd a függőleges rúddal együtt forog.)



Ábrázolja a rúd függőlegessel bezárt α szögét az ω szögsebesség függvényében! (A szögsebességet nagyon lassan növeljük, a rúd nem „leng”, a forgó rendszerből nézve mindig egyensúlyban van.)

Figyelem! Bizonyos szögsebességeknél több lehetséges egyensúlyi helyzet is van. Vizsgálja meg ezeknek a helyzeteknek a *stabilitását*! (Stabil az egyensúly akkor, ha az egyensúlyi helyzetből kicsit kitérített és ott elengedett test visszatér az egyensúlyi helyzetbe.)

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

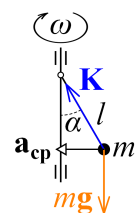
Először beszéljük meg, hogy az $\alpha = 0$ helyzet bármekkora szögsebességnél egy lehetséges megoldás. (Ilyenkor $K = mg$, mindkét erő függőleges, a tömegpont nyugalomban van, a saját maga körüli forgással tömegpontnál nem foglalkozunk.) Később térünk majd vissza ennek a megoldásnak a stabilitására.

Ezután térjünk át egy tetszőleges helyzet vizsgálatára. A megoldást (először) mindenképpen *inerciarendszerben* keressük (ezt hangsúlyozzuk is)! A test körpályán mozog, egyenletes körmozgást végez (mivel ω nagyon lassan változik csak). A körpálya sugara $r = l \sin \alpha$.

A mozgásegyenletek:

$$K \cos \alpha = mg$$

$$K \sin \alpha = ma_{cp} = ml\omega^2 \sin \alpha.$$



Ha $\alpha \neq 0$, akkor a második egyenletben $\sin \alpha$ -val egyszerűsíthetünk (az $\alpha = 0$ esetet már külön megvizsgáltuk), és $K = m l \omega^2$ -et behelyettesíthetjük az első egyenletbe. Áttrendezés után:

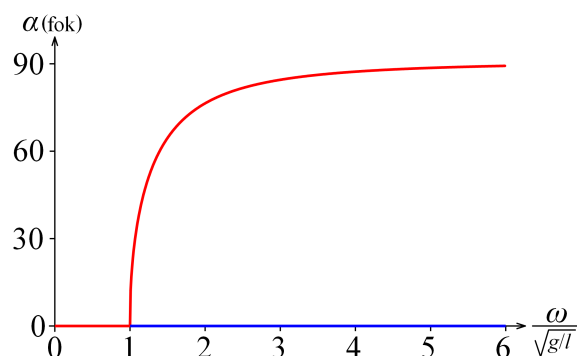
$$\cos \alpha = \frac{g}{l \omega^2}.$$

Vegyük észre, hogy ha ω (nagyon) kicsi, akkor a jobb oldalon álló tört (nagyon) nagy lesz, ha pedig 1-nél nagyobb, akkor α -ra nem kapunk megoldást ($\cos \alpha \leq 1$). Mi van ilyenkor? A testnek kell valahol lennie, a fizikában nem mondhatjuk azt, hogy ilyenkor „nincs megoldás”! Ebben az esetben *csak* a már korábban megbeszélt $\alpha = 0$ lehet a megoldás.

Ha a tört értéke nem nagyobb egynél, akkor létezik az $\alpha = 0$ megoldás *mellett* másik megoldás is. A teljes megoldás tehát:

$$\begin{aligned} \text{ha } \omega &\leq \sqrt{\frac{g}{l}} & \alpha &= 0 \\ \text{ha } \omega &> \sqrt{\frac{g}{l}} & \alpha &= \arccos \frac{g}{l \omega^2} \quad \text{vagy} \quad \alpha = 0. \end{aligned}$$

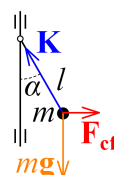
A kitérés szöge a szögsebesség függvényében a grafikonon látható. ω -t $\sqrt{g/l}$ egységekben mérjük. Azt, hogy $\omega > \sqrt{g/l}$ esetén melyik megoldás az „igazi”, a stabilitás vizsgálata mutatja majd meg.



A *stabilitás* vizsgálata szemléletesebb, ha a feladat megoldását megcsináljuk a rendszerrel együtt *forgó koordináta rendszerben* is. (Azt remélem, hogy ez így a gyakorlat végén nem okoz zavart.) Nagyon fontos, hogy mielőtt megemlíthetjük a *centrifugális erőt*, pontosan tisztázzuk, hogy mit csinálunk.

Inerciarendszerben a tömegpontra csak a nehézségi erő és a kényszererő hat, ennek hatására a test gyorsul a kör középpontja felé (centripetális gyorsulás), lásd az eddig bemutatott megoldást.

A rendszerrel együtt ω szögsebességgel *forgó vonatkoztatási rendszerben* a test „úgy érzi”, hogy a fentiekén kívül egy harmadik erő is hat rá, amely a forgástengelytől kifelé mutat, és nagysága $F_{cf} = m r \omega^2$, ahol r az m tömegű tömegpont távolsága a forgástengelytől. Ez a *centrifugális erő*, amely nem egy valódi erő, mert nem egy másik testtel való kölcsönhatásból származik, de a forgó rendszerben úgy kapunk helyes eredményt, ha ezt is figyelembe vesszük.



Ebben a vonatkoztatási rendszerben a test áll, így a rá ható erők eredője nulla:

$$K \cos \alpha = mg$$

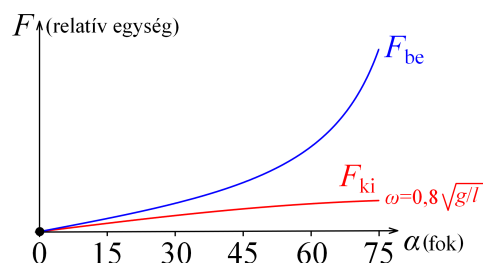
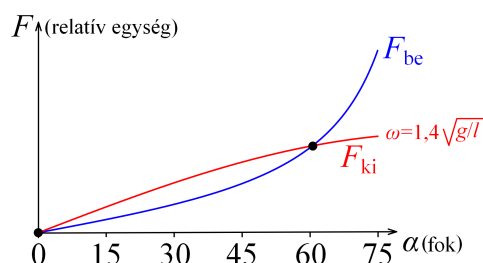
$$K \sin \alpha = F_{\text{cf}} = mr\omega^2 = ml\omega^2 \sin \alpha.$$

Természetesen ugyanazt az egyenletrendszert kaptuk, és így a megoldása is ugyanaz (a megoldás nem függ attól, hogy milyen vonatkoztatási rendszerben dolgoztunk).

A stabilitás vizsgálatához írjuk fel (természetesen most is a forgó vonatkoztatási rendszerből nézve) és ábrázoljuk a tömegpontra ható két vízszintes erőt egy adott ω szögsebesség esetében az α szög függvényében! *Befelé* a kényszererő vízszintes komponense, *kifelé* pedig a centrifugális erő „húzza” a testet.

$$F_{\text{be}} = K \sin \alpha = \frac{mg}{\cos \alpha} \sin \alpha = mg \tan \alpha \quad (\text{mert } K = \frac{mg}{\cos \alpha})$$

$$F_{\text{ki}} = F_{\text{cf}} = mr\omega^2 = ml\omega^2 \sin \alpha.$$



Az első grafikonon $\omega = 1,4\sqrt{g/l}$ esetén látható a két erő. Egyensúly ott van, ahol a két erő egyenlő. Ahogy a megoldásunkból korábban láttuk, két ilyen helyzet van: az egyik $\alpha = 0$ -nál, a másik $\alpha \approx 60^\circ$ -nál, ezeket jelölik a fekete pöttyök.

Vizsgáljuk először az $\alpha = 0$ -nál lévő egyensúlyt. Ha a tömegpontot egy *kicsit* kimozdítjuk ebből az egyensúlyból (α nő), akkor a kifelé ható erő gyorsabban nő, mint a befelé ható erő, így a tömegpontra kifelé ható eredő erő fog hatni, és ennek hatására még jobban eltávolodik az egyensúlyi helyzettől. Ez egy *instabil* egyensúlyi helyzet, ebben legfeljebb rövid ideig maradhat a test, a legkisebb zavar hatására is kimozdul belőle.

Nézzük meg ugyanezt az $\alpha \approx 60^\circ$ -nál lévő egyensúlynál. Ha a tömegpontot ismét *kifelé* mozdítjuk ki az egyensúlyi helyzetből (α nő), akkor a kifelé ható erő lassabban nő, mint a befelé ható erő, így a tömegpontra befelé ható eredő erő fog hatni, és ennek hatására visszatér az egyensúlyi helyzetébe. Ha viszont a tömegpontot *befelé* mozdítjuk ki az egyensúlyi helyzetből (α csökken), akkor a kifelé ható erő lassabban csökken, mint a befelé ható erő, így a tömegpontra kifelé ható eredő erő fog hatni, és ennek hatására ismét visszatér az egyensúlyi helyzetébe. Ez az egyensúlyi helyzet *stabil*.

A második grafikonon $\omega = 0,8\sqrt{g/l}$ esetén látható a két erő. Látható, hogy most csak $\alpha = 0$ -nál van egyensúly (ahogy a megoldásunkból korábban is láttuk). A stabilitást az előző gondolatmenet alapján megvizsgálva láthatjuk, hogy most ez egy stabil egyensúlyi helyzet: Ha a tömegpontot egy kicsit kimozdítjuk ebből az egyensúlyból, akkor a kifelé ható erő lassabban nő, mint a befelé ható erő, így a tömegpontra befelé ható eredő erő fog hatni, és ennek hatására visszatér az egyensúlyi helyzetébe. (Persze, ha ez az egyetlen egyensúlyi helyzet, akkor nem is lehet másképp.)

5. gyakorlat – munka, energia

Bevezető:

Az elemi munka az erő és az elmozdulásvektor *skalárszorzata*:

$$\Delta W = \mathbf{F} \Delta \mathbf{s},$$

a teljes munka pedig az elemi munkák összege a teljes elmozduláson.

Ha az elmozdulás egyenesvonalú és az erő állandó, akkor

$$W = \mathbf{F} \mathbf{s} = F s \cos \alpha.$$

Teljesítmény (időegység alatt végzett munka):

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \mathbf{F} \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \mathbf{F} \mathbf{v}.$$

Mozgási energia:

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2} m v^2.$$

Munkatétel (a mozgási energia megváltozása egyenlő a testen végzett munkával):

$$\Delta E_{\text{m}} = W$$

Konzervatív erők (például nehézségi erő) munkája nem függ az útvonaltól. Ekkor bevezethető a helyzeti energia. (Nem konzervatív erőknél, mint például a súrlódási erő, nem lehet.)

(Gravitációs) helyzeti energia (homogén gravitációs térben):

$$E_{\text{h}} = mgh.$$

Rugalmas energia (E_{r}) majd a 2. feladat kapcsán.

Mechanikai energia:

$$E = E_{\text{m}} + E_{\text{h}} + E_{\text{r}}.$$

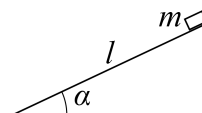
Mechanikai energia megmaradás tétele: Ha nincsenek nem konzervatív erők, vagy a nem konzervatív erők munkája nulla, akkor a mechanikai energia állandó:

$$W_{\text{nk}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E = \text{állandó}.$$

Hangsúlyozzuk, hogy ha nem konzervatív erők is vannak, akkor a mechanikai energia nem állandó, például a csúszási súrlódás, a közegellenállás csökkenti a mechanikai energiát (a mechanikai energia egy része más „energiaformákká”, például belső energiává alakul, azaz a testek felmelegsznek).

Mértékegységek: munka, energia Nm = J, teljesítmény J/s = W.

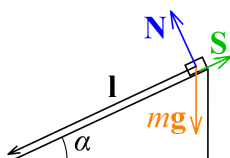
1. Az l hosszúságú, α hajlásszögű lejtő tetejéről nyugalmi helyzetből lecsúszik egy m tömegű test. A súrlódási együttható μ .



Milyen erők hatnak a testre? Mekkora munkát végeznek az egyes erők, mialatt a test leér a lejtő aljára?

Határozza meg a munkatétel alapján a test sebességét a lejtő alján! Hasonlítsa össze az eredményt a dinamikai és kinematikai megfontolások alapján kapott eredménnyel.

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:



$$W_{\text{mg}} = m\mathbf{g}\mathbf{l} = mgl \cos(90^\circ - \alpha) = mgl \sin \alpha = mgh$$

$$W_N = \mathbf{N}\mathbf{l} = 0 \quad (\text{mert merőlegesek})$$

$$W_S = \mathbf{S}\mathbf{l} = -Sl = -\mu Nl = -\mu mgl \cos \alpha < 0.$$

A test sebessége a munkatételből:

$$\Delta E_m = W_{\text{mg}} + W_N + W_S$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl \sin \alpha + 0 - \mu mgl \cos \alpha$$

$$v = \sqrt{2gl(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}.$$

A dinamika és kinematika (a korábbi gyakorlatok vagy a zh eredmények) alapján:

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$l = \frac{a}{2}t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2l}{a}}$$

$$v = at = \sqrt{2la} = \sqrt{2gl(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)},$$

ami megegyezik a most kapott eredményünkkel.

2. Egy rugó erőtvénnye $F = Dy$, ahol F az összenyomásához vagy megnyújtáshoz szükséges erő, y a rugó hosszának megváltozása, D pedig a rugóra jellemző állandó.

Határozza meg, mekkora munkával lehet a rugót y távolsággal összenyomni vagy megnyújtani! Ne kész képletet keressen, hanem vezesse le az összefüggést a 3. gyakorlaton megismert „görbe alatti terület” módszerrel.

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A kinematikában láttuk, hogy

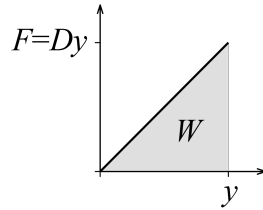
$$\Delta x = v\Delta t,$$

és ha v nem állandó, akkor az elmozdulást úgy tudjuk kiszámolni, hogy meghatározzuk a $v(t)$ görbe alatti területet.

Most azt látjuk, hogy

$$\Delta W = F\Delta y,$$

tehát ha F nem állandó, akkor a munka meghatározható az $F(y)$ görbe alatti területből.



Az ábráról leolvasható, hogy a rugó összenyomásához vagy megnyújtásához szükséges munka:

$$W = \frac{1}{2} Fy = \frac{1}{2} Dy^2.$$

Ha a rugó visszanyeri eredeti alakját, akkor a rugó végez ennyi munkát. Ezt a „munkavégző képesség”-ét rugóenergiának nevezzük.

$$E_r = \frac{1}{2} Dy^2.$$

A rugóenergia az $E_h = mgh$ gravitációs energiához hasonlóan *helyzeti* (idegen szóval *potenciális*) energia.

3. Egy $m = 0,1\text{ kg}$ tömegű testet $h = 2\text{ m}$ magasból a vízszinteshez képest $\alpha = 60^\circ$ -os szöggel felfelé egy rugós kilövővel indítunk el. A rugó kezdeti összenyomása $y = 4\text{ cm}$, a rugóállandó $D = 4000\text{ N/m}$. A légellenállástól eltekintünk.

Határozza meg a mechanikai energia megmaradása alapján, hogy a test mekkora sebességgel csapódik a földre! Milyen magasan lesz a pályája tetőpontján?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A rendszer konzervatív (nincs súrlódás, légellenállás), alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradását, azaz a mozgási, helyzeti és rugalmas energiák összege a mozgás során végig állandó.

Kezdetben a rugó összenyomott, a test áll és h magasságban van. Becsapódáskor a rugó már nem tárol energiát, a test magassága nulla, így csak mozgási energia van. Ebből az egyenlet (a kezdeti állapotra és a végállapotra felírva az energiákat):

$$\frac{1}{2} Dy^2 + mgh = \frac{1}{2} mv^2,$$

amiből rendezéssel

$$v = \sqrt{\frac{Dy^2}{m} + 2gh} = \sqrt{\frac{4000 \cdot 0,04^2}{0,1} + 2 \cdot 9,81 \cdot 2} = 10,2\text{ m/s}.$$

A tetőpont magassága kicsit bonyolultabb! Ekkor a testnek lesz mozgási energiája is, de csak vízszintes irányban fog mozogni. A vízszintes sebesség végig állandó, így először azt kell meghatározni.

A kilövés után *közvetlenül* a sebességet szintén a mechanikai energia megmaradásból számolhatjuk ki. A test gravitációs helyzeti energiája a kilövés közben elhanyagolható mértékben változik, ezért

$$\frac{1}{2} Dy^2 = \frac{1}{2} mv_0^2,$$

amiből

$$v_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}y = 8 \text{ m/s}.$$

A sebesség vízszintes komponense

$$v_x = v_0 \cos \alpha = \sqrt{\frac{D}{m}}y \cos \alpha = 4 \text{ m/s}.$$

Ezután a mechanikai energia megmaradás a kezdeti állapotra és a tetőpontra:

$$\frac{1}{2}Dy^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_x^2 + mgh_{\max},$$

amiből

$$h_{\max} = \frac{Dy^2}{2mg} - \frac{v_x^2}{2g} + h = \frac{Dy^2}{2mg}(1 - \cos^2 \alpha) + h = \frac{Dy^2}{2mg} \sin^2 \alpha + h = 4,45 \text{ m}.$$

4. Egy kerékpárosra, ha nagy sebességgel sima, vízszintes úton halad, elsősorban a légellenállás hat. A tekeréssel ezt az erőt kell leküzdenie. A légellenállás által kifejtett F erő (ilyen sebességeknél) a levegőhöz viszonyított v sebesség négyzetével arányos: $F = kv^2$, ahol k a test nagyságától, formájától és a levegő sűrűségétől függő állandó.

Hogyan függ a kerékpáros teljesítménye a sebességtől?

Hányszorosára nő a kerékpáros által kifejtett erő és a kerékpáros teljesítménye, ha a v sebességű kerékpáros v sebességű szembeszélben teker?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Mutassuk meg, hogy a teljesítmény:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = F \frac{\Delta s}{\Delta t} = Fv,$$

amiből

$$P = kv^3,$$

tehát a teljesítmény a sebesség köbével arányos.

A biciklinél az erő kifejtés optimális, így a versenyzőt a *teljesítménye* korlátozza (és nem az ereje). A teljesítmény pedig az izmok oxigénellátásától, azaz a szívtől és a tüdőtől függ (és a vér oxigénszállító képességétől – ezért szednek EPO-t). A v^3 -ös sebességfüggés kis sebességnöveléshez is nagy teljesítménynövelést követel, emiatt a sebességrekordok csak nagyon lassan nőnek.

Ha fúj a szembeszél, akkor $v_{\text{rel}} = v_{\text{bicikli}} + v_{\text{szél}}$, esetünkben $v_{\text{rel}} = 2v$.

Emiatt az erő, amit a kerékpárosnak ki kell fejtenie

$$F_{\text{szembeszél}} = kv_{\text{rel}}^2 = 4kv^2 = 4F_{\text{szélcsend}},$$

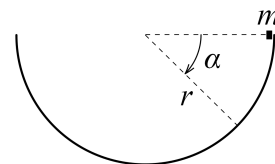
tehát a szélcsendben szükséges erő négyszerese! (Ezért nehéz szembeszélben biciklizni.)

A teljesítményigény azonban nem lesz nyolcszoros! A test elmozdulása Δt idő alatt csak $\Delta s = v\Delta t$, így a teljesítmény

$$P_{\text{szembeszél}} = F_{\text{szembeszél}}v = 4kv^3 = 4P_{\text{szélcsend}}.$$

(Persze ez is épp elég!)

5. Az ábrán látható $r = 0,1$ m sugarú félhenger alakú vályúban egy kicsiny, $m = 0,1$ kg tömegű test súrlódás nélkül mozoghat. A testet a vályú pereméről kezdősebesség nélkül elengedjük.



Határozza meg és ábrázolja a test sebességét és a test által a vályú falára kifejtett nyomóerőt a test helyzetét jellemző α szög függvényében! ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ és most legyen $g = 10 \text{ m/s}^2$.)

Szorgalmi feladat: Ha a test és a vályú között súrlódás is van, akkor a feladat nem oldható meg analitikusan, csak numerikusan (hiszen a gyorsulás függ a súrlódástól, az a nyomóerőtől, az pedig a sebességtől). Írjon programot (Excel táblázatkezelővel vagy bármely programnyelven), amely megadja a test helyzetét jellemző α szöget az idő függvényében! Legyen $\mu = 0,1$.

Segítség: Válasszon nagyon kicsi (például $\Delta t = 0,001 \text{ s}$) időlépéseket. Ez alatt a test gyorsulása állandónak tekinthető. Ebből számolja ki az időlépés végén a test új helyzetét, új sebességét, majd ezekből az új gyorsulást. Ezt ismétlje egészen addig, amíg a test meg nem áll. (Megálláskor vizsgálni kell, megcsúszik-e újra.) Végül az adatokat ábrázolja grafikonon.

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Súrlódásmentes esetben a test sebességét a *hely függvényében* könnyen megadhatjuk a mechanikai energia megmaradása alapján. Amennyivel csökken a test helyzeti energiája, annyival nő a mozgási energiája:

$$mgr \sin \alpha = \frac{1}{2}mv^2,$$

amiből a sebesség az α szög függvényében:

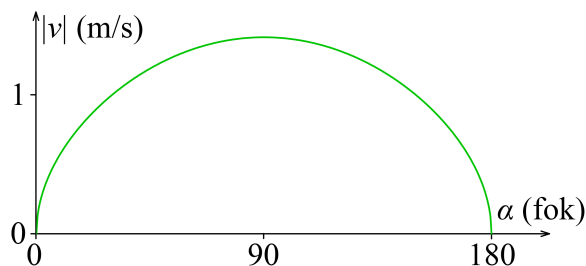
$$v = \pm \sqrt{2gr \sin \alpha} = \pm \sqrt{2 \sin \alpha} \text{ m/s}.$$

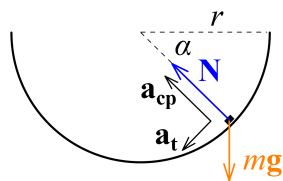
A sebesség értelemszerűen a vályú legalján a legnagyobb, itt

$$v = \pm \sqrt{2gr} = \pm 1,41 \text{ m/s}.$$

Szintén várható eredmény, hogy a sebesség $\alpha = 180^\circ$ -nál lesz 0, a test a vályú túlsó peremén fordul vissza. (Ha nincs energiavesztés, akkor periodikusan mozog ide-oda.)

Vegyük észre, hogy itt – szemben a lejtővel – *csak* energiákkal tudunk dolgozni! Nem tudnánk gyorsulásból sebességet számolni, mint a lejtőnél, mert a gyorsulás nem állandó. Az $\alpha(t)$ és $v(t)$ függvényeket nem is tudjuk *zárt alakban* felírni, csak a $v(\alpha)$ függvényt. (Az időfüggvények csak numerikus módszerekkel kaphatók meg, lásd a szorgalmi),





A nyomóerőt a sebesség ismeretében már könnyen kiszámíthatjuk. A rajz alapján a mozgásegyenlet:

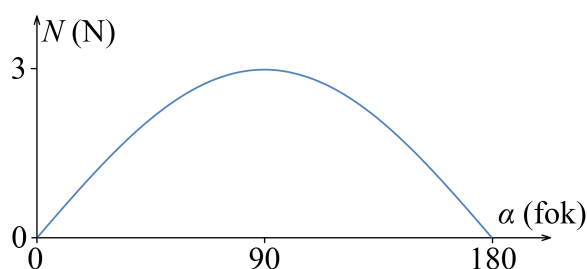
$$ma_t = mg \cos \alpha$$

$$ma_{cp} = N - mg \sin \alpha ,$$

amiből

$$N = mg \sin \alpha + ma_{cp} = mg \sin \alpha + m \frac{v^2}{r} = mg \sin \alpha + 2mg \sin \alpha = 3mg \sin \alpha = 3 \sin \alpha N .$$

Vegyük észre, hogy a nyomóerő a vályú alján a test súlyának a háromszorosa!

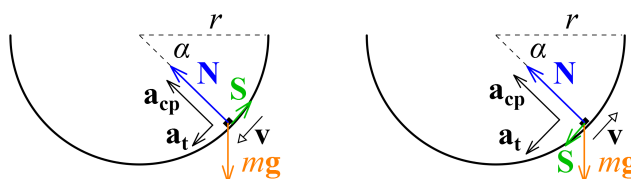


Szorgalmi feladat

Csak akkor mutassuk meg, ha van rá idő és kedv! Én egy Excel táblázatkezelős megoldást mutatok, mert azt mindenki ismeri. (Természetesen más programokkal elegánsabban megoldható.) A feladat nem kapcsolódik szorosan a gyakorlat témájához, hiszen nem tudjuk használni se az energiamegmaradást, se a munkatételt. Viszont azt gondolom, egy ilyen numerikus feladatmegoldás tanulságos lehet, és más esetekben is használni tudják majd a hallgatók.

A feladat jó példa arra is, hogy egy *kis változás* (van súrlódás) mennyire megnehezít egy feladatot.

Az erők ábrája kétféle: attól függően, hogy merre mozog a test, a súrlódási erő iránya is változik.



A mozgásegyenletek az ábra alapján:

$$\begin{aligned}ma_t &= mg \cos \alpha \pm S \\ma_{cp} &= N - mg \sin \alpha \\S &= \mu N,\end{aligned}$$

amiből

$$a_t = g \cos \alpha \pm \mu(g \sin \alpha + a_{cp}) = g \cos \alpha \pm \mu \left(g \sin \alpha + \frac{v^2}{r} \right).$$

Ezután nekikezdhethetünk az Excel táblázat elkészítésének. A táblázatban változtatható adatok: Δt lépésköz, μ súrlódási együttható (esetleg g , m és r).

A táblázat oszlopai: A – t idő, B – α szög (radiánban), C – v sebesség, D – a_t tangenciális (érintőirányú) gyorsulás és E – egy logikai érték, amely azt vizsgálja, hogy megálláskor megtapad-e a test (1, ha megtapadt, és 0, ha nem).

A fejlécek alatti első sorban (nálam a 4. sor) megadjuk a kezdőértékeket: $t = 0$, $\alpha = 0$, $v = 0$. A gyorsulás ezekből már meghatározható a fenti képlet alapján. A $\pm$ előjelből annak alapján kell választani, hogy milyen a sebesség iránya. Ez a képlet azonban csak akkor igaz, ha a test nem tapad, így ezt is vizsgálni kell minden olyan esetben, amikor a test megáll. Mindezek alapján a D4 cellában a következő képlet áll:

$$=HA(E4=1;0;C\$2*COS(B4)-ELŰJEL(C4)*B\$2*(C\$2*SIN(B4)+C4*C4/D\$2))$$

A C\\$2 cellában g értéke, a B\\$2 cellában μ értéke, a D\\$2 cellában r értéke van, B4 és C4 α és v pillanatnyi értéke, az E4 cellában pedig a tapadás logikai értéke található. Ha ez utóbbi értéke 1, akkor a gyorsulás 0.

A következő sorban meghatározzuk t , α , v új értékét.

$$\begin{aligned}t_{új} &= t_{régi} + \Delta t \\ \alpha_{új} &= \alpha_{régi} + \frac{v_{régi} + v_{új}}{2r} \Delta t \\ v_{új} &= v_{régi} + a_{t,régi} \Delta t.\end{aligned}$$

A sor (nálam az 5. sor) celláiban álló képletek:

A5 cellában: =A4+A\\$2 (Az A\\$2 cellában Δt értéke van.)

B5 cellában: =B4+(C4+C5)/2/D\\$2*A\\$2

C5 cellában: =HA(E4=1;0;C4+D4*A\\$2) (Ha a logikai változó 1, akkor a sebesség 0.)

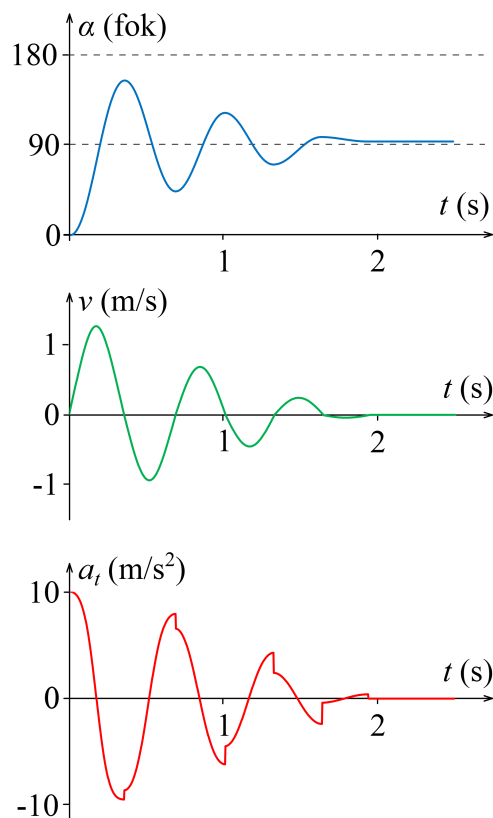
D5 cella ugyanaz, mint a D4 cella („lehúzva”, így B4, C4 és E4 helyett B5, C5 és E5 áll)

E4 cellában: =HA(ÉS(C5*C4<0;ABS(1/TAN(B5))<B\\$2);1;HA(E4=1;1;0))

Az utolsó képlet értelme: ha a sebesség előjelet vált, akkor a test megállt egy pillanatra. Ha ekkor $\text{ctg} \alpha < \mu$, akkor a test megtapad. Ha egyszer már megtapadt, és így az előző sorban 1 az érték, akkor már mindenképp az is marad.

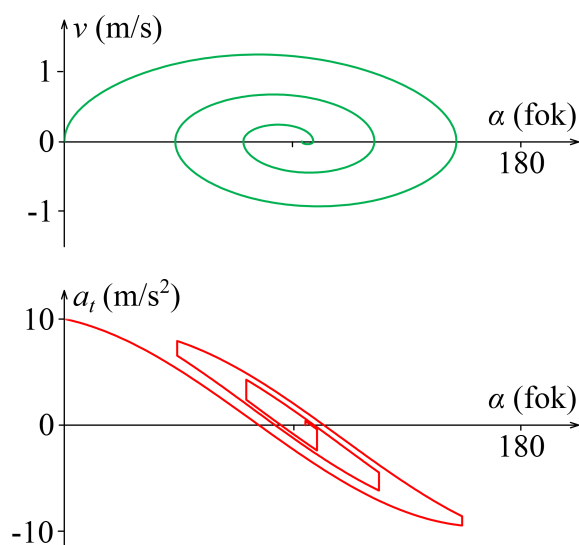
Természetesen nem szükséges minden Excel képlet felírása a gyakorlaton. Ha lesz érdeklődés, akkor el lehet küldeni a fájlt.

Ezután ezt a sort „le kell húzni” sok-sok soron át (nálam 1000 sor), és utána a grafikon-varázslóval tetszőleges grafikonokat készíthetünk. Változtathatjuk μ értékét is. Érdekes megnézni, hogy mi lesz $\mu = 0$ -nál: a közelítő számolás kis pontatlanságai miatt az energia lassan nő, a test túllendül a vályú peremén – ez mutatja a módszer korlátait. (Persze a lépésköz csökkentésével ez a hiba is csökken.)



Az ábrán $\alpha(t)$, $v(t)$ és $a_t(t)$ grafikon látható ($\mu = 0,1$). Jól látható, hogy a test nem pont legalul áll meg: az utolsó „visszafordulásnál” már olyan lapos a vályú, hogy nem indul el újra. Azt is vegyük észre, hogy a gyorsulásfüggvénynek szakadásai (ugrásai) vannak, mert az irányváltáskor a súrlódási erő iránya is hirtelen megváltozik.

A súrlódás nélküli esethez hasonlóan az α szög függvényében is megadhatjuk a sebességet és a tangenciális gyorsulást. Az ábrán $v(\alpha)$ és $a_t(\alpha)$ látható.



A $v(\alpha)$ grafikon spirálisan közelít a végső állapotig (ahol $v = 0$, de $\alpha \neq 90^\circ$ az előbb tárgyalt okból). A gyorsulás grafikonon itt is szakadások (ugrások) vannak.

6. gyakorlat – rezgőmozgás

Bevezető:

Rezgés: egy szakaszon való „ide-oda” mozgás.

Ha a mozgás periodikus, akkor jellemezhető a T periódusidővel vagy az $f = 1/T$ frekvenciával. Az utóbbi mértékegysége a herz (Hz), $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

Kiemelkedően fontos mozgásforma a természetben a *harmonikus rezgőmozgás*, amelynek leíró függvénye szinuszos:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin \omega t, \\ \text{vagy} \quad x(t) &= A \cos \omega t, \\ \text{vagy általános esetben} \quad x(t) &= A \sin(\omega t + \varphi_0), \end{aligned}$$

ahol A a rezgés amplitúdója (szokás használni az $A_{\text{pp}} = 2A$ peak-to-peak amplitúdót is), $\omega = 2\pi f$ a rezgés *körfrekvenciája* (mértékegysége $1/\text{s}$, hogy megkülönböztessük a frekvenciától) és φ_0 a kezdőfázis (a rezgés fázisa a $t = 0$ pillanatban).

A rezgés sebességét és gyorsulását az 1. feladatban fogjuk levezetni deriválás nélkül. Szintén ott mutatjuk meg, hogy $a(t) = -\omega^2 x(t)$.

A rezgés dinamikai feltételét a 2. feladatban tárgyaljuk. Megmutatjuk, hogy a harmonikus rezgéshez lineáris visszatérítő erő szükséges.

A rezgő rendszer energiaviszonyait a 3. feladatban tekintjük át.

A fonálingáról a 4. feladatban lesz szó, az 5. feladat pedig egy függőleges rezgés vizsgálata, ahol a helyzeti energia is változik (de jó 0-pont választással a leírás ott is egyszerű lesz).

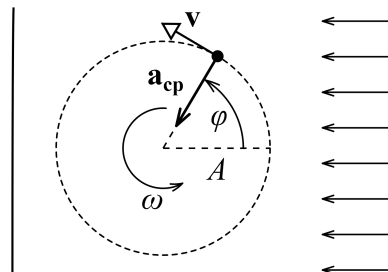
1. Egy pontszerű test A sugarú körpályán mozog ω állandó szögsebességgel.

Mekkora a test v kerületi sebessége és a_{cp} centripetális gyorsulása?

Adja meg a test helyzetét megadó $\varphi(t)$ függvényt, ha a forgásszög a $t = 0$ időpillanatban $\varphi(0) = 0$!

Ha a mozgó testet jobbról párhuzamos fénysugarakkal megvilágítjuk, akkor a test árnyéka a baloldalon lévő ernyőn rezgőmozgást fog végezni. Írja fel és ábrázolja a rezgőmozgás $x(t)$ kitérés-idő függvényét!

A rezgő árnyék sebessége és gyorsulása a körmozgást végző test sebesség- és gyorsulásvektorának függőleges komponense lesz. Írja fel és ábrázolja ennek alapján a rezgő árnyék $v(t)$ sebesség-idő és $a(t)$ gyorsulás-idő függvényét! Milyen kapcsolat van az árnyék $x(t)$ kitérése és $a(t)$ gyorsulása között?



Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A test sebessége a 4. gyakorlat alapján:

$$v = A\omega,$$

a sebesség iránya érintőirányú.

A centripetális gyorsulás a kör középpontja felé mutat, nagysága

$$a_{\text{cp}} = A\omega^2.$$

Az érintőirányú gyorsulás nulla (mert egyenletes körmozgás), így a test teljes gyorsulása megegyezik a centripetális gyorsulással.

Az egyenletes forgás (és a kezdőpillanat választása miatt)

$$\varphi(t) = \omega t.$$

Az árnyék kitérése megegyezik a test függőleges koordinátájával, ami a szinuszfüggvény definíciója alapján:

$$x(t) = A \sin[\varphi(t)] = A \sin(\omega t) = A \sin \omega t.$$

(A kitérést a kör középpontjának árnyékától mérjük, a rajzon felfelé pozitív.)

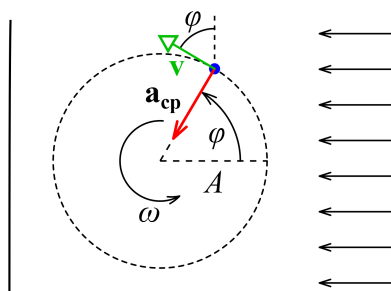
Látható, hogy a rezgés egy harmonikus rezgés, amplitúdója a körmozgás sugara, *kör-frekvenciája* a körmozgás *szögsebességével* egyezik meg, ezért is használjuk ugyanazt a jelölést. (De természetesen a rezgésnél már nem beszélhetünk szögsebességről!)

Megemlíthetjük, hogy általános esetben, ha a test a $t = 0$ pillanatban nem a $\varphi = 0$ helyzetben van, akkor a test fázisa:

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0,$$

ilyenkor a kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$



Az árnyék sebessége és gyorsulása a sebességvektor illetve a gyorsulásvektor függőleges komponense. A merőleges állású szögek miatt $\mathbf{v}$ függőlegessel bezárt szöge lesz φ .

Ez alapján

$$v(t) = v \cos[\varphi(t)] = A\omega \cos(\omega t) = A\omega \cos \omega t,$$

a rezgés maximális sebessége

$$v_{\max} = A\omega.$$

A gyorsulás ehhez hasonlóan (a negatív előjel a vektor iránya miatt van):

$$a(t) = -a_{\text{cp}} \sin[\varphi(t)] = -A\omega^2 \sin(\omega t) = -A\omega^2 \sin \omega t$$

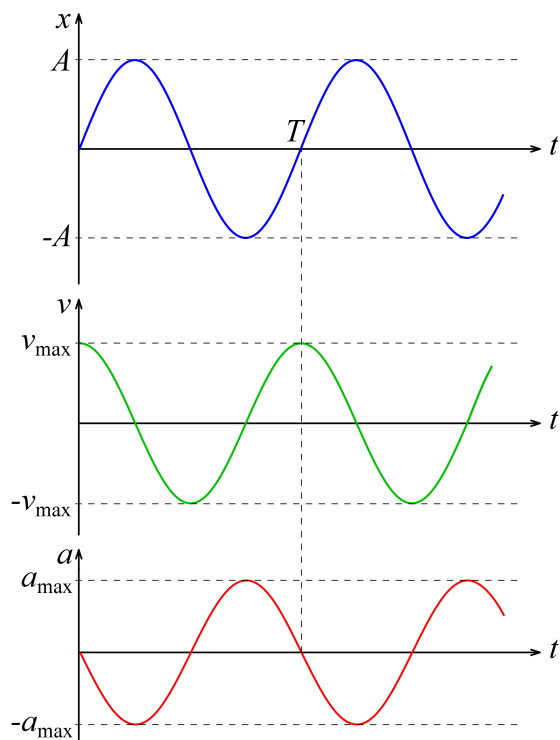
a rezgés maximális gyorsulása

$$a_{\max} = A\omega^2.$$

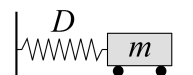
A gyorsulás és a kitérés között *minden pillanatban* fennáll az

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

kapcsolat. (A két függvény egymással arányos, az arányossági tényező negatív.)



2. Az ábrán látható m tömegű kiskocsit egy D rugóállandójú rugóval kötjük a falhoz. A kiskocsit az egyensúlyi helyzetéből x_0 távolsággal kitérítjük, és a $t = 0$ pillanatban elengedjük.



A rugó (lineáris) erőtvénnye és az előző feladat eredménye alapján mutassa meg, hogy a mozgás harmonikus rezgőmozgás! Határozza meg a rezgés körfrekvenciáját!

Írja le a mozgást! (Adja meg a kiskocsi kitérését, sebességét, gyorsulását az idő függvényében!)

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Az erőtvénny:

$$F = -Dx,$$

ahol a mínusz előjel arra utal, hogy a rugó által kifejtett erő a kitéréssel ellentétes irányú („visszatérítő erő”).

A kiskocsira felírva a mozgásegyenletet:

$$ma = F = -Dx,$$

majd ezt rendezve:

$$a = -\frac{D}{m}x.$$

Az előző feladat szerint viszont egy harmonikus rezgőmozgásnál:

$$a = -\omega^2 x.$$

A két eredményt összevetve látható, hogy a kiskocsi mozgása valóban harmonikus rezgőmozgás, körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

A rezgés kitérése a $t = 0$ pillanatban maximális ($x(0) = x_0$, $v(0) = 0$), így a kitérést, sebességet és gyorsulást leíró függvények:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \sin(\omega t + \pi/2) = x_0 \cos \omega t \\v(t) &= x_0 \omega \cos(\omega t + \pi/2) = -x_0 \omega \sin \omega t \\a(t) &= -x_0 \omega^2 \sin(\omega t + \pi/2) = -x_0 \omega^2 \cos \omega t.\end{aligned}$$

3. Az előző feladatban szereplő kiskocsit most úgy indítjuk el, hogy az egyensúlyi helyzetében v_0 sebességgel meglökjük.

Mekkora lesz a rezgés amplitúdója?

Írja fel és ábrázolja egy-egy közös grafikonban a kiskocsi mozgási energiáját, a rugóenergiát és a rendszer teljes mechanikai energiáját az idő, illetve a kitérés függvényében!

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A rezgés kitérése a $t = 0$ pillanatban $x(0) = 0$, sebessége $v(0) = v_0$. A test sebessége akkor maximális, amikor kitérése nulla, így

$$\begin{aligned}v_{\max} &= v_0 \\A &= \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{v_0}{\omega},\end{aligned}$$

a kitérés-idő és sebesség-idő függvények:

$$\begin{aligned}x(t) &= A \sin \omega t \\v(t) &= v_0 \cos \omega t.\end{aligned}$$

A kiskocsi mozgási, rugalmas és teljes mechanikai energiája az idő függvényében:

$$\begin{aligned}E_m(t) &= \frac{1}{2}m[v(t)]^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2 \omega t \\E_r(t) &= \frac{1}{2}D[x(t)]^2 = \frac{1}{2}DA^2 \sin^2 \omega t \\E(t) &= E_m(t) + E_r(t) = \frac{1}{2}mv_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}DA^2 \sin^2 \omega t = \\&= \frac{1}{2}mv_0^2(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}DA^2 = \text{állandó}.\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk, hogy

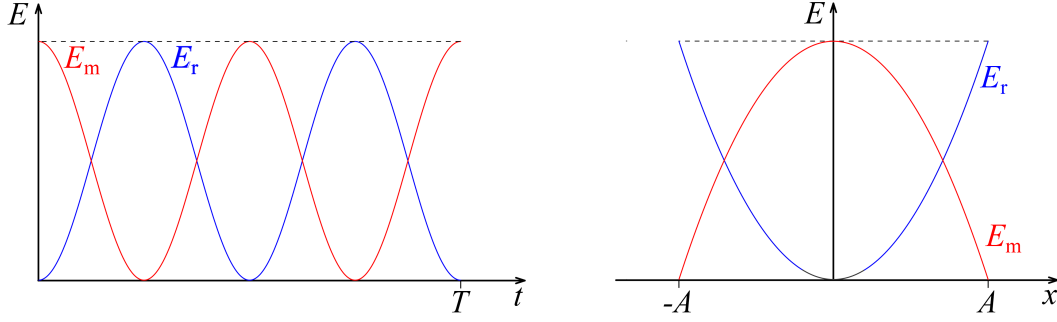
$$DA^2 = D \frac{v_0^2}{\omega^2} = \frac{D}{\omega^2} v_0^2 = mv_0^2.$$

Láthatjuk, hogy a rendszer teljes mechanikai energiája állandó.

Az energiák hely függvényében való felírásában ezt már felhasználjuk:

$$\begin{aligned}E_r(x) &= \frac{1}{2}Dx^2 \\E_m(x) &= \frac{1}{2}DA^2 - \frac{1}{2}Dx^2 = \frac{1}{2}D(A^2 - x^2).\end{aligned}$$

A függvények képe grafikonon látható. Figyeljük meg a részleteket! A bal oldali ábrán látható, hogy a rendszer mechanikai energiája a mozgási energia és a rugóenergia között ide-oda átadódik (miközben összegük állandó). Egy periódus (T idő) alatt kétszer történik ez meg (tehát $2f$ frekvenciával).



4. Egy könnyű, nyújthatatlan fonálra lógatott pontszerű testet matematikai ingának vagy fonálingának nevezünk. Ha az inga kitérése kicsi, akkor a mozgása jól közelíthető harmonikus rezgőmozgással. A visszatérítő erő most a kötélerő vízszintes komponense.

Vezesse le az l hosszúságú fonálinga lengésidejét! (Felhasználhatja, hogy kis szögekre $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \alpha$.)

Milyen hosszú a *másodpercinga* fonala? (A másodpercinga fél lengése tart egy másodpercig! $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.)

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A fonál végére rögzített pontszerű test körpályán mozog, de kis kitérés esetén a körív (vízszintes) szakasszal közelíthető. A test kitérése így:

$$x \approx l\varphi.$$

A test vízszintes gyorsulása közelíthető az érintőirányú (tangenciális) gyorsulással, amely az erőábra alapján:

$$a_x \approx a_t = -g \sin \varphi \approx -g\varphi,$$

vagy (a centripetális gyorsulást elhanyagolva és a test gyorsulását vízszintesnek közelítve):

$$a_x \approx -g \text{tg } \varphi \approx -g\varphi.$$

A két összefüggést egybevetve a test gyorsulása és kitérése közötti kapcsolatot:

$$a \approx -\frac{g}{l}x,$$

amely megegyezik a harmonikus rezgőmozgást leíró összefüggéssel. Ez alapján a körfrekvencia és a periódusidő:

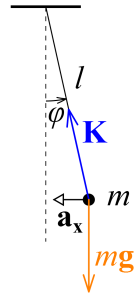
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

A másodpercinga esetében a fonálinga hosszát kifejezve és az adatokat behelyettesítve:

$$l = \frac{T^2}{4\pi^2}g = \frac{9,81}{\pi^2} = 0,994 \text{ m} \approx 1 \text{ m},$$

azaz nagyon jó közelítéssel egy méter.

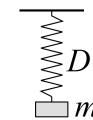


5. Az ábrán látható rugó nyújtatlan, amikor a ráakasztott, nyugalomban lévő testet elengedjük.

Írja le a mozgást! (Adja meg a test kitérését az idő függvényében!)

Hol lesz a test sebessége maximális?

A rendszernek most a mozgási energián és a rugóenergián kívül a helyzeti energiája is változik. Írja fel az egyes energiatagokat, és mutassa meg, hogy a teljes mechanikai energia most is állandó!



Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A testre most a rugóerő és a nehézségi erő is mozgással párhuzamos irányban hat.

Válasszuk a lefelé irányt pozitívnak! Ekkor a mozgásegyenlet:

$$ma = mg - Dy,$$

ahol y a rugó megnyúlása.

Ez az egyenlet első ránézésre nem egyezik meg a harmonikus rezgőmozgás mozgásegyenletével. Ha azonban a függőleges kitérés kezdőpontját az

$$y_0 = \frac{mg}{D}$$

helyen választjuk, azaz

$$x = y - y_0,$$

akkor a mozgásegyenlet

$$a = g - \frac{D}{m}y = \frac{D}{m}y_0 - \frac{D}{m}y = \frac{D}{m}(y_0 - y) = -\frac{D}{m}x,$$

amely már valóban megegyezik a harmonikus rezgés egyenletével.

Ez alapján a körfrekvencia (a vízszintes esethez hasonlóan):

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

A $t = 0$ pillanatban a test sebessége $v(0) = 0$, kitérése $x(0) = -y_0$. Ez alapján a test kitérése, sebessége és gyorsulása az idő függvényében:

$$\begin{aligned} x(t) &= -y_0 \cos \omega t = -\frac{mg}{D} \cos \omega t = -A \cos \omega t \\ v(t) &= A\omega \sin \omega t = \frac{mg}{D} \omega \sin \omega t = g \sqrt{\frac{m}{D}} \sin \omega t = v_{\max} \sin \omega t \\ a(t) &= A\omega^2 \cos \omega t = \frac{mg}{D} \omega^2 \cos \omega t = g \cos \omega t = a_{\max} \cos \omega t, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} A &= y_0 = \frac{mg}{D} \\ v_{\max} &= g \sqrt{\frac{m}{D}} \\ a_{\max} &= g. \end{aligned}$$

A test az elengedés pillanatában maximális (g) gyorsulással indul lefelé, azaz az első pillanatban szabadon esik (hiszen a rugó nyújtatlan, a rugóerő nulla).

A sebessége akkor lesz maximális, amikor a gyorsulása nulla (hiszen addig gyorsul, onnantól lassul). Ez akkor teljesül, ha

$$mg = Dy,$$

azaz

$$y = \frac{mg}{D} = y_0$$

$$x = y - y_0 = 0.$$

Természetesen ezt is vártuk: a sebesség ott maximális, ahol a kitérés (és a gyorsulás is) nulla. A választott $x = 0$ hely az a pont, ahol a nehézségi erő és a rugóerő kiegyenlíti egymást, azaz ahol a rugóra akasztott test nyugalmi egyensúlyban lenne, ha nem rezegne.

A rendszer teljes mechanikai energiája (egyelőre v -vel és y -nal kifejezve, és a helyzeti energia nullpontját a nyújtatlan rugó végén választva):

$$E = E_m + E_r + E_h = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dy^2 - mgy.$$

Ha y helyére behelyettesítjük az $y = x + y_0$ értéket, akkor a kifejezés:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}D(x + y_0)^2 - mg(x + y_0) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 + (Dy_0 - mg)x + \frac{1}{2}Dy_0^2 - mgy_0.$$

A kifejezés első két tagja most már ugyanúgy néz ki, mint a vízszintes rezgésnél, ahol beláttuk, hogy ennek a két tagnak az összege állandó.

A harmadik tag nulla, mert $Dy_0 = mg$.

A negyedik és ötödik tag állandók, ezek némi átalakítással egyszerűbb alakra is hozhatók:

$$\frac{1}{2}Dy_0^2 - mgy_0 = \frac{1}{2}mgy_0 - mgy_0 = -\frac{1}{2}mgy_0.$$

(Ez a tag a helyzeti energia nullpontjának ügyes megválasztásával el is tüntethető. A helyzeti energia nullpontjának megválasztása önkényes, így a teljes mechanikai energia értéke is a választásunktól függ. Mi nem is az energia értékét szeretnénk felírni, hanem az állandóságát bizonyítani. Ha a nullpontot $y_0/2$ -vel lejjebb választanánk, akkor ez a tag éppen kiesne.)

A teljes mechanika energia:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 - \frac{1}{2}mgy_0 = \text{állandó},$$

ahogy azt a rendszer konzervativitása alapján vártuk is.

7. gyakorlat – ütközések

Bevezető:

A test tömegének és sebességvektorának szorzata az impulzus (vagy lendület), szintén vektoriális mennyiség:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

(A középiskolában a lendület a szokásos név, és $\mathbf{I}$ a jele, de itt térjünk át a $\mathbf{p}$ -re!)

A fogalom hasznosságát az első feladat mutatja. Ebben mutatjuk meg, hogy az impulzusváltozás egyenlő az erőlkéssel:

$$\Delta\mathbf{p} = m\Delta\mathbf{v} = \mathbf{F}\Delta t.$$

Ezután lényegében pontrendszerekkel foglalkozunk, de nincs idő, és talán nem is fontos definiálni a pontrendszer fogalmát. Arról viszont kell beszélni, hogy ha a két test csak egymásra hat („külső” erők nincsenek, más erők nem hatnak), akkor a hatás-ellenhatás törvénye (Newton III. törvénye) miatt a rendszer teljes impulzusváltozása nulla lesz (hiszen az erő és az ellenerő erőlkése azonos nagyságú, de ellentétes irányú), azaz a rendszer teljes impulzusa állandó.

$$\mathbf{F}_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum \mathbf{p} = \text{állandó}.$$

Ez az *impulzusmegmaradás törvénye*.

Hangsúlyozzuk, hogy a megmaradási törvényekben a megmaradásnak feltételei vannak: itt az, hogy nincsenek külső erők (vagy a külső erők eredője nulla). A korábban tárgyalt mechanikai energia megmaradás törvényében pedig az, hogy csak konzervatív erők hatnak (vagy ha vannak is nem konzervatív, disszipatív erők, azok összes munkája nulla).

A megmaradási törvényeket használjuk fel *ütközések* leírásakor. Az ütközés egy gyors folyamat, ahol nagy erők hatnak rövid ideig. Az ütközés részletes leírásával nem foglalkozunk, csak a kezdeti és a végállapotot vizsgáljuk (kivéve a 4. feladatot, ahol egy harmadik, közbülső állapotot is megnézünk).

Minden esetben vizsgálni kell, hogy melyik megmaradási törvény teljesül. Ezután lehet felírni az adott megmaradó mennyiség kezdeti és végállapotának egyenlőségét, majd az egyenlet(ek)et megoldva kiszámítani a végső állapot jellemzőit.

A 4. feladatban azt vizsgáljuk, mi történik egy ütközés közben (amikor a deformáció maximális), bevezetjük az ütközési szám fogalmát. Ezt használjuk aztán az 5. feladatban, ahol egy érdekes, könnyen kipróbálható jelenséget vizsgálunk.

1. Egy testet $F_1 = 10\text{ N}$ erővel $t_1 = 3\text{ s}$ alatt lehet felgyorsítani nyugalmi helyzetből $v = 15\text{ m/s}$ sebességre.

Mennyi ideig tart ugyanennek a testnek nyugalmi helyzetből ugyanerre a sebességre való felgyorsítása, ha az erő $F_2 = 2\text{ N}$?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Ha a test tömege m , akkor a gyorsulása

$$a = \frac{F}{m},$$

a végsebessége

$$v = at = \frac{Ft}{m}.$$

(Kiszámítható ebből a tömege is: $m = 2 \text{ kg}$, de erre nincs szükségünk.)

Látható, hogy adott test esetén a végsebesség csak az Ft szorzattól függ. Ebből következően

$$F_1 t_1 = F_2 t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{F_1}{F_2} t_1 = \frac{10}{2} 3 = 15 \text{ s}.$$

Ha egy $\mathbf{F}$ erő (vektor!) Δt ideig hat, akkor az $\mathbf{F}\Delta t$ szorzatot erőlökhöz nevezük. Láthatjuk, hogy az erőlökhöz megegyezik a test tömegének és sebességváltozásának szorzatával:

$$\mathbf{F}\Delta t = m\Delta \mathbf{v}.$$

A tömeg és a sebesség szorzatát *impulzusnak* nevezzük:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v},$$

az erőlökhöz egyenlő az impulzus megváltozásával:

$$\mathbf{F}\Delta t = \Delta \mathbf{p}.$$

2. Vízszintes légpárnás sínen két kis test mozoghat súrlódásmentesen. A testek tömege $m_1 = 0,2 \text{ kg}$ és $m_2 = 0,3 \text{ kg}$, sebessége $v_1 = 2 \text{ m/s}$ illetve $v_2 = -1,5 \text{ m/s}$.

Mekkora lesz a testek sebessége, ha

- a) tökéletesen rugalmatlanul,
- b) tökéletesen rugalmasan ütköznek?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A vízszintes légpárnás sínen a testekre ható erő nulla (hiszen a függőleges nyomóerő és a nehézségi erő kiegyenlíti egymást, a súrlódás elhanyagolható). Így a testek – az ütközéstől eltekintve – egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek.

Az ütközéskor a testek közt (rövid ideig, de nagy) erőhatás lép fel, azonban ez a „belső” erő nem tudja megváltoztatni a két test eredő impulzusát. Tehát a két test impulzusának (előjeles) összege végig állandó.

a) A rugalmatlan ütközés után a két test „összetapad”, együtt mozog. Legyen közös sebességük u . Az impulzusmegmaradás felírva:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u,$$

amiből

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{0,2 \cdot 2 + 0,3 \cdot (-1,5)}{0,2 + 0,3} = -0,1 \text{ m/s}.$$

b) Rugalmas ütközésnél az ütközés után a két test szétlökődik, a sebességük legyen u_1 és u_2 . Az impulzusmegmaradáson kívül most teljesül a mechanikai energia megmaradása is, hiszen nincs energiavesztés. A vízszintes pályán a helyzeti energia állandó, így a mozgási energia megmaradására is kapunk egy egyenletet. A kétismeretlenes egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer paraméteres megoldásához egyszerűsítsünk a második egyenletben $1/2$ -del, rendezzük át mindkét egyenletet úgy, hogy az m_1 -es illetve m_2 -es tagok külön oldalon legyenek, majd a másodiknál használjuk a nevezetes szorzatot a felbontásra:

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 - v_2) \\ m_1(v_1^2 - u_1^2) &= m_2(u_2^2 - v_2^2) \\ m_1(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) &= m_2(u_2 - v_2)(u_2 + v_2). \end{aligned}$$

A harmadik egyenletben az első két tényező az első egyenlet alapján megegyezik a két oldalon, így ezzel egyszerűsíthetünk. (Említsük meg, hogy *csak akkor* egyszerűsíthetünk, ha ezek a tényezők nem nullák. A tényezők akkor lennének nullák, ha $u_1 = v_1$ és $u_2 = v_2$, ami a kezdeti állapot. A megmaradási egyenletek mindig visszaadják a kezdeti állapotot is. De most nem erre a *triviális* megoldásra vagyunk kíváncsiak, így valóban egyszerűsíthetünk.) Ebből:

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = v_1 + u_1 - v_2,$$

amit behelyettesítünk az első egyenletbe:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(v_1 + u_1 - 2v_2).$$

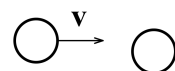
Ezt rendezve:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} = -2,2 \text{ m/s},$$

majd ezt behelyettesítve u_2 kifejezésébe (vagy a szimmetria miatt egyszerű indexcserével):

$$u_2 = v_1 + u_1 - v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} = 1,3 \text{ m/s}.$$

3. Egy csúszó hokikorong nekiütközik egy másik, ugyanakkora tömegű, álló hokikorongnak. Az ütközés tökéletesen rugalmas, de nem centrális (lásd az ábrát).



Mekkora szöget zár be a testek sebességvektora az ütközés után?

A súrlódást a korong és a jég, valamint a két korong között is hanyagolja el (azaz a testek forgásával ne foglalkozzon)!

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A függőleges erők eredője nulla, a vízszintes külső erők (súrlódás) elhanyagolhatók, így a rendszer teljes impulzusa (vektoriális mennyiség!) állandó. Ezen kívül az ütközés tökéletesen rugalmas, és a korongok súrlódásmentes érintkezése miatt a korongok forgása se visz el energiát, így a testek mozgási energiájának összege is állandó. Az egyenletek ez alapján:

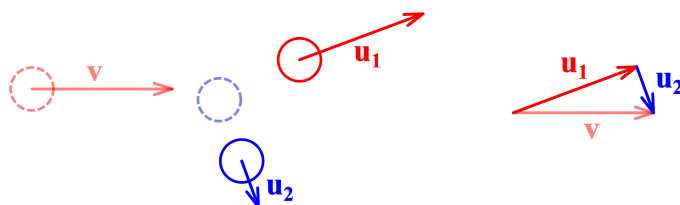
$$\begin{aligned} m\mathbf{v} &= m\mathbf{u}_1 + m\mathbf{u}_2 \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2. \end{aligned}$$

Hangsúlyozzuk, hogy az első egyenlet az impulzusvektorokra, és nem az impulzusok nagyságára vonatkozik!

Az egyenleteket a tömeggel és $1/2$ -del egyszerűsítve a sebességvektorokra kapunk két egyenletet:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

$$v^2 = u_1^2 + u_2^2.$$



A rajz bal oldalán láthatók a korongok az ütközés előtt és után, valamint a sebességvektorok. A jobb oldalon az első egyenletnek megfelelően megrajzoltunk egy vektorháromszöget: a $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ vektorok összege. A második egyenlet alapján viszont a háromszög oldalaira teljesül, hogy a leghosszabb oldal négyzete a másik két oldal négyzetének összege, amiből következik, hogy $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ derékszöget zár be (Püthagorasz-tétel megfordítása).

A korongok tehát egymásra merőleges sebességvektorral fognak mozogni az ütközés után.

Megjegyzés: Ha az ütközés éppen centrális, akkor a mozgó korong megáll, az álló pedig $\mathbf{v}$ sebességgel kezd mozogni (sebességet cserélnek). Ekkor tehát $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. A *nullvektor* viszont definíció szerint bármely vektorra merőleges, így az eredményünk ilyenkor is igaz.

4. Két m_1 és m_2 tömegű kiskocsi vízszintes talajon gurul elhanyagolható gördülési ellenállású kerekeken. Az egyik kiskocsira D rugóállandójú, könnyű rugó van erősítve. A kiskocsi sebessége v_1 illetve v_2 (értékük negatív is lehet). $v_1 > v_2$, így a kiskocsik ütköznek.



Mekkora a rugó legnagyobb összenyomódása az ütközés során?

Mekkora ekkor a kocsi sebessége? Mennyivel változott eddig a pillanatig a kezdeti állapothoz képest az egyes kiskocsik sebessége?

Ha a rugó teljesen rugalmatlan, akkor a kiskocsik összetapadva, evvel a sebességgel haladnak tovább. Ha a rugó rugalmas, akkor szétlöki őket.

Mennyivel változik az egyes kiskocsik sebessége a szétlöködés során, ha a rugó *tökéletesen* rugalmas (azaz nincs energiavesztés)?

Ha a rugó *csak részben* rugalmas, akkor a szétlöködés során bekövetkező sebességváltozás a tökéletesen rugalmas esetben bekövetkező változás k -szorososa, ahol $0 \leq k \leq 1$ az *ütközési szám*.

Határozza meg a testek ütközés utáni végsebességét k ütközési szám esetén!

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A két kiskocsi állandó sebességgel (egyenletesen) halad, és közeledik egymáshoz. Amikor a rugó vége eléri a másik kiskocsit, elkezd összenyomódni. Az összenyomódás hatására

a rugóban fellépő erő a gyorsabb kocsit fékezi, a lassabbat gyorsítja, így a sebességkülönbségük folyamatosan csökkenni fog. A kocsik addig közelednek egymáshoz, amíg a sebességkülönbség nem lesz nulla, azaz a két kocsi sebessége meg nem egyezik – ettől kezdve távolodni kezdenek egymástól. A rugó tehát akkor lesz legjobban összenyomva, amikor a két kiskocsi sebessége éppen megegyezik.

Ezt a sebességet a 2. feladat a) részében már meghatároztuk (a feltételek most is ugyanazok: a két kiskocsi impulzusának összege mindvégig állandó):

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

A rugó keresett y összenyomódását a mechanikai energia megmaradása alapján számíthatjuk ki. A kiskocsik kezdeti mozgási energiája részben a rugóban tárolt rugalmas energiává alakul:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 + \frac{1}{2}Dy^2,$$

az egyenletet rendezve, és felhasználva az u -ra kapott eredményt:

$$\begin{aligned} Dy^2 &= m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \\ &= \frac{(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)(m_1 + m_2) - (m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{m_1 + m_2}, \end{aligned}$$

amiből

$$y = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{D(m_1 + m_2)}} (v_1 - v_2).$$

Az egyes kiskocsik sebességváltozása eddig a pillanatig:

$$\begin{aligned} \Delta v_1 &= u - v_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_1 = \frac{m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} < 0 \\ \Delta v_2 &= u - v_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - v_2 = \frac{m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} > 0. \end{aligned}$$

Ezután, ha a rugó nem teljesen rugalmatlan, szétlöki a kiskocsikat. Ha a rugó tökéletesen rugalmas, akkor a teljes rugóenergia visszaalakul mozgási energiává. A kiskocsik végső sebessége meg fog egyezni a 2. feladat b) részében kiszámolt ütközés utáni sebességekkel.

A szétlökődés közbeni sebességváltozásokat ebből is kiszámíthatnánk, de most gondolkozunk másképp! Képzeljünk el egy harmadik kiskocsit, amely egy párhuzamos pályán mindvégig u sebességgel halad, és figyeljük a kiskocsik ütközését ebből a kiskocsiból (ebből a vonatkoztatási rendszerből).

Innen nézve a rugó legnagyobb összenyomódásakor a két test megáll, majd utána újból szétlökődik, mintha egy falról pattanna vissza. Ebből következően – tökéletesen rugalmas rugó esetén – a szétlökődés során ugyanakkora lesz az egyes kiskocsik sebességváltozása, mint a rugó összenyomódása közben.

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \Delta v_1 = \frac{m_2 (v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \\ \Delta u_2 &= \Delta v_2 = \frac{m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Megjegyzés: Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a 2. feladat b) részének u_1 és u_2 eredményét felhasználjuk:

$$\Delta u_1 = u_1 - u = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta u_2 = u_2 - u = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} - \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}.$$

Ha az ütközés nem tökéletesen rugalmas, akkor az ütközés utáni végsebességek a feladat szövege szerint:

$$u_1(k) = u + k\Delta u_1 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} + k\frac{m_2(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} = (1 + k)\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - kv_1$$

$$u_2(k) = u + k\Delta u_2 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} + k\frac{m_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2} = (1 + k)\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - kv_2.$$

Leellenőrizhetjük, hogy $k = 0$ behelyettesítéssel visszkapjuk a teljesen rugalmatlan ütközés eredményét, $k = 1$ behelyettesítésével pedig a tökéletesen rugalmas ütközés végsebességeit.

5. Egy gumilabdát $h_0 = 1$ m magasságból leejtünk a vízszintes talajra. A labda részben rugalmas ütközéssel visszapattan a talajról, az ütközési szám k .

Milyen magasra emelkedik fel a labda az n -edik ütközés után?

Mennyi ideig repül a labda az n -edik és $n + 1$ -edik ütközés között?

Mennyi ideig pattog összesen?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A labda t_0 leesési idejét és v_0 leérkezési sebességét könnyen meghatározhatjuk (a feladat szövegében nem szerepel, de a légellenállást elhanyagoljuk):

$$h_0 = \frac{1}{2}gt_0^2 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}},$$

illetve

$$v_0 = gt_0 = \sqrt{2gh_0}.$$

Utóbbi eredmény természetesen megkapható közvetlenül az energiamegmaradásból is:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gh_0}.$$

Az ütközés után a test visszapattan, sebességének nagysága:

$$v_1 = kv_0.$$

Ezt megkaphatjuk az előző feladatban megkapott eredményből is, ha felhasználjuk, hogy a labda tömege elhanyagolható a talaj tömege mellett (és annak 0 a sebessége), de beláthatjuk egyszerűbben is: Tökéletesen rugalmas ütközés esetén a labda először megáll (sebességváltozása $-v_0$), majd ugyanakkora sebességgel visszapattan (sebességváltozása újra $-v_0$). Részben rugalmas ütközésnél a második sebességváltozás csak $-kv_0$ lesz, a labda végsebessége $-kv_0$.

Ezután a labda teljes repülési ideje (fel a tetőpontig, majd vissza le a talajra)

$$t_1 = 2\frac{v_1}{g} = 2\frac{kv_0}{g} = 2k\frac{v_0}{g} = 2kt_0$$

emelkedési magassága (kinematika vagy energiamegmaradás alapján):

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(kv_0)^2}{2g} = k^2\frac{v_0^2}{2g} = k^2h_0.$$

A labda v_1 sebességgel ér újra a talajhoz, majd az ütközés után a sebességének nagysága az előző megfontolás alapján:

$$v_2 = kv_1 = k^2v_0.$$

Az ütközés után a repülési ideje a következő ütközésig az előzőhöz hasonlóan:

$$t_2 = 2k^2t_0,$$

emelkedési magassága pedig

$$h_2 = k^4h_0.$$

Hasonlóan, az n -edik ütközés után a sebességének nagysága:

$$v_n = k^n v_0,$$

teljes (oda-vissza) repülési ideje:

$$t_n = 2k^n t_0,$$

emelkedési magassága:

$$h_n = k^{2n} h_0.$$

A pattogás teljes ideje

$$t = t_0 + t_1 + t_2 + \dots = t_0 + \sum_{i=1}^{\infty} t_i = t_0 \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} k^i \right) = t_0 \left(1 + \frac{2k}{1-k} \right).$$

Matematikailag végtelen sokszor pattan vissza, de a teljes idő véges (végtelen mértani sor). Fizikailag természetesen nincs értelme végtelen sok visszapattanásról beszélni, hiszen ha az emelkedés nagysága az atomi méretskálán van, akkor már nincs értelme pattogásról beszélni (nem különbözik a hőmozgástól).

A jelenség könnyen bemutatható egy pingponglabdával, ha kemény asztalra esik. (Persze ott a légellenállás nem elhanyagolható, de az a jelenség lényegét ez nem befolyásolja.) Jól hallható, hogy az ütközések egyre szaporábban követik egymást. Csak véges sok koppanást hallunk, mert amikor a koppanások frekvenciája 16 fölé emelkedik, akkor a fülünk azt már nem különálló koppanásnak, hanem (egyre magasabbá váló) hangnak hallja.

8. gyakorlat – merev testek, perdület

Bevezető:

Kiterjedt testek közül a merev testekkel foglalkozunk: ezek alakja nem változik, de – szemben a pontszerű testekkel – a haladó mozgáson kívül foroghatnak is. A merev testek statikájával foglalkozik az első három feladat. Ehhez szükség van a forgatónyomatéokra, amit egyelőre középiskolás módon, előjeles skalár mennyiségként vezetünk be:

$$M = Fk,$$

ahol k az *erőkar*, a kiválasztott O pontnak (amire vonatkoztatva felírjuk a forgatónyomatékot) és az erő hatásvonalának a távolsága (O-ból a hatásvonalra állított merőleges szakasz hossza). A forgatónyomaték lehet pozitív vagy negatív (a pozitívnak választott forgatási iránnyal megegyező vagy ellentétes).

A merev test egyensúlyának feltétele:

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} &= 0 \\ \sum M &= 0.\end{aligned}$$

Hívjuk fel a figyelmet arra, hogy ha az erők (természetesen vektoriális) eredője nulla, akkor (de csak akkor) teljesen mindegy, hogy melyik pontra írjuk fel a forgatónyomatékok egyensúlyát. Célszerű azt a pontot választani, amire a legkönnyebb felírni.

A 4. feladatban gyorsuló forgás szerepel. Ehhez ismertessük a forgómozgás alapegyenletét:

$$\Theta\beta = M.$$

Hívjuk fel a figyelmet a Newton II. törvénnyel való analógiára. A tehetetlenségi nyomatékról csak annyit mondjunk, hogy mindig egy adott tengelyre vonatkozik, pontszerű test esetében $\Theta = mr^2$, más esetekben táblázatokból kikereshető.

Az 5. és a 6. feladat a perdületmegmaradás törvényével foglalkozik. Az 5. feladatban merev testek perdülete szerepel. Itt a középiskolában megszokott (előjeles) skalár perdületet használjuk:

$$N = \Theta\omega.$$

(Csak szimmetrikus testek főtehetetlenségi tengelyeivel foglalkozunk, de erről nem is beszélünk külön.)

Ha a testre nem hat (külső) forgatónyomaték, akkor a perdülete állandó. Ez a perdületmegmaradás törvénye.

Az impulzusmegmaradás törvényéhez hasonlóan itt is feltétele van a megmaradásnak: a külső forgatónyomatékok eredője nulla.

A munka kiszámolásához szükség van a forgó test mozgási energiájára, amit levezetés nélkül adjunk meg:

$$E_m = \frac{1}{2}\Theta\omega^2.$$

Az utolsó feladat lehetőséget ad a vektoriális szorzat bemutatására. Mutassuk meg, hogy kell kiszámítani!

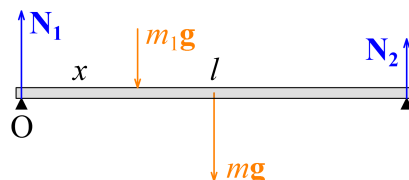
A tömegpont perdületét legtöbb iskolában nem tanítják, a perdület és a forgatónyomaték vektor jellege hasonlóképp legtöbb hallgatónak új lesz.

Ez a feladat idő hiányában természetesen elhagyható.

1. Egy l hosszúságú, m tömegű palló a két végén van alátámasztva. A pallón végigmegy egy m_1 tömegű ember.

Határozza meg az egyes alátámasztásokban fellépő erőket az embernek a palló egyik végétől mért x távolságának függvényében!

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:



A palló egyensúlyát írjuk fel. Csak függőleges erők hatnak, ezek eredője nulla. A forgatónyomatékokat írjuk fel az egyik alátámasztási pontra (O). Az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= mg + m_1g \\ N_2 l &= mg \frac{l}{2} + m_1gx. \end{aligned}$$

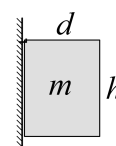
Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}mg + m_1g \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ N_2 &= \frac{1}{2}mg + m_1g \frac{x}{l}. \end{aligned}$$

A palló súlya egyformán oszlik el a két alátámasztás között, az ember súlya viszont attól függően, hogy mekkora x : értelemszerűen $x = 0$ esetében teljesen a bal oldali alátámasztásra, $x = l$ esetén pedig a jobb oldali alátámasztásra nehezedik.

2. Egy m tömegű téglatest alakú, homogén tárgyat a felső élénél egy kampósszeggel akasztanak a függőleges falra (lásd az ábrát).

Rajzolja be a testre ható erőket, és határozza meg az erők nagyságát! *Segítség:* A tárgy a szögön kívül csak az alsó élénél érintkezik a fallal.

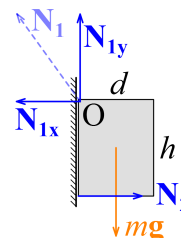


Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A testre ható mg nehézségi erővel a kampósszeg által kifejtett $\mathbf{N}_1$ erő $\mathbf{N}_{1y}$ függőleges komponense tart egyensúlyt. A két erőnek azonban nem esik egybe a hatásvonala, így forgatónyomatékaik eredője nem nulla: az eredő forgatónyomaték a testet az óramutatóval egyező irányba forgatná.

Ezt csak egy másik erőpár akadályozhatja meg: a szög által kifejtett $\mathbf{N}_1$ erőnek a függőleges $\mathbf{N}_{1y}$ erőkomponensen kívül egy $\mathbf{N}_{1x}$ vízszintes („húzó”) komponense is lesz, amivel a test alsó élénél fellépő $\mathbf{N}_2$ nyomóerő tart egyensúlyt.

Három egyenletet kell felírunk: a függőleges és a vízszintes erőkomponensek, valamint a forgatónyomatékok egyensúlyát. A forgatónyomatékok egyensúlyát érdemes a szögre (O)



pontra) felírni, mert azon két erőkomponens is átmegy (és így azok forgatónyomatéka nulla). Az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} N_{1y} &= mg \\ N_{1x} &= N_2 \\ N_2 h &= mg \frac{d}{2}. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$N_{1x} = N_2 = mg \frac{d}{2h}.$$

Szereléskor legkritikusabb az N_{1x} húzóerő, ami nem elég erős tiplizés esetén kihúzza a szöveget a falból. Látható, hogy ez az erő akkor nagy, ha a test széles, de nem magas.

3. Egy biciklin az éppen használt áttételben az első lánckerék $n_1 = 42$ fogú, a hátsó lánckerék $n_2 = 28$ fogú. A pedálkar hossza $l = 17$ cm, a kerék átmérője $d = 28'' \approx 71$ cm. A biciklis és a bicikli együttes tömege $m = 80$ kg.

Mekkora erővel kell nyomnia a pedált a biciklisnek, ha egy 14%-os emelkedőn egyenletes sebességgel akar felfelé haladni?

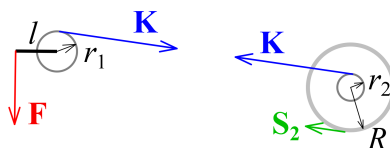
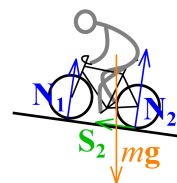
Segítség: Egy α hajlásszögű lejtő $100 \cdot \tan \alpha$ %-os. A légellenállástól és a gördülési ellenállástól tekintsen el!

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A 14%-os lejtő hajlásszöge $\alpha = \arctan 0,14 \approx 8^\circ$.

A biciklit a hátsó kerékre ható tapadási súrlódási erő mozgatja előre, ez egyenlíti ki a nehézségi erő lejtőirányú komponensét:

$$S = mg \sin \alpha = 109 \text{ N}.$$



A forgatónyomatékok egyensúlyát a főtengelyre (pedálra) és a hátsó kerékre is fel kell írni. Az ábra bal oldali részén az első lánckerékre ható, forgatónyomatékot adó erők láthatók. (Ezen kívül a tengelyben hat egy reakcióerő, de annak nincs forgatónyomatéka.) Az ábra jobb oldali részén ugyanez a hátsó kerékre. A forgatónyomaték-egyenletek:

$$\begin{aligned} Fl &= Kr_1 \\ Kr_2 &= SR = S \frac{d}{2}, \end{aligned}$$

ahol r_1 és r_2 a két lánckerék sugara.

Mivel a fogak távolsága mindkét keréken ugyanakkora (megegyezik a láncszemek távolságával), a sugarak aránya megegyezik a fogak számának arányával:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Az egyenletekből rendezéssel:

$$F = \frac{r_1}{l} K = \frac{dr_1}{2lr_2} S = \frac{dn_1}{2ln_2} mg \sin \alpha = 341 \text{ N}.$$

4. Egy tömör, homogén m tömegű és r sugarú henger a rögzített, vízszintes helyzetű tengelye körül szabadon foroghat. A henger palástjára vékony, nyújthatatlan fonalat tekerünk, amelynek egyik vége a henger palástjára van rögzítve, a másik végére pedig m_1 tömegű testet rögzítünk.

Mekkora gyorsulással mozog a test, ha elengedjük?

Segítség: A homogén henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$.

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Az ábrán láthatók a hengerre és a testre ható erők, valamint a gyorsulás és a szöggyorsulás iránya. A test függőleges irányban (lefelé) gyorsuló mozgást végez, erre Newton II. törvényét írjuk fel.

A henger tömegközéppontja nyugalomban van, a rá ható erők eredője nulla. (Ezt az egyenletet nem írjuk most fel, ebből megkapható lenne a tengelyben ható $\mathbf{N}$ erő.) A henger a tömegközéppontján átmenő tengely körül gyorsuló forgómozgást végez, erre a forgómozgás alapegyenletét írjuk fel. Az O pontra vonatkoztatva csak a $\mathbf{K}$ erőnek van forgatónyomatéka.

Ezen kívül további fontos egyenlet a gyorsulás és a szöggyorsulás kapcsolatát megadó *kényszerfeltétel*: a kötel vége rögzítve van a hengeren, így a test gyorsulása megegyezik a henger palástjának érintőirányú (tangenciális) gyorsulásával.

Mindezek alapján az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - K \\ \Theta \beta &= K r \\ a &= \beta r. \end{aligned}$$

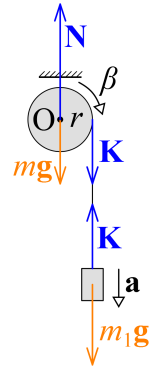
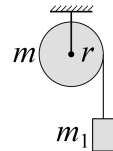
Az egyenletrendszert megoldva a test keresett gyorsulása (felhasználva a tehetetlenségi nyomaték megadott kifejezését is):

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + \frac{\Theta}{r^2}} = \frac{m_1 g}{m_1 + \frac{1}{2}m}.$$

Ebből már kifejezhető a szöggyorsulás és a kötélerő is:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{a}{r} = \frac{m_1 g}{(m_1 + \frac{1}{2}m) r} \\ K &= m_1(g - a) = \frac{m m_1 g}{m + 2m_1}. \end{aligned}$$

Jegyezzük meg, hogy a kötélerő nem $m_1 g$, hanem annál kisebb (hiszen a két erő különbsége gyorsítja a testet lefelé).



5. Egy forgószék függőleges tengelye körül szabadon foroghat. A széken egy ember ül, vízszintesen kinyújtott karjaival két, egyenként $m = 15 \text{ kg}$ tömegű súlyzót tart. Az ember és a szék együttes tehetetlenségi nyomatéka (a súlyzók nélkül) $\Theta_0 = 18 \text{ kgm}^2$. A pontszerűnek tekinthető súlyzók távolsága a forgástengelytől $r_1 = 0,9 \text{ m}$. A széket $\omega_1 = 5 \text{ s}^{-1}$ szögsebességgel megforgatjuk.

Mekkora lesz a szék szögsebessége, ha a székben ülő ember a súlyzókat a forgástengelytől $r_2 = 0,3 \text{ m}$ távolságra behúzza?

Mekkora munkát végez eközben az ember?

Segítség: A karját behúzó embernek megváltozik a tehetetlenségi nyomatéka, de azt a változást hanyagoljuk el a súlyzók tehetetlenségi nyomatékának változása mellett.

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A szék szabadon foroghat, így az emberből, székből és súlyzókból álló rendszerre nem hat külső forgatónyomaték. Ebből következően a rendszer teljes perdülete időben állandó:

$$\Theta_1 \omega_1 = \Theta_2 \omega_2,$$

ahol Θ_1 és Θ_2 a rendszer teljes tehetetlenségi nyomatéka, ω_1 és ω_2 pedig a szögsebessége a vizsgált jelenség előtt és után.

A tehetetlenségi nyomatékok:

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \Theta_0 + 2mr_1^2 = 42,3 \text{ kgm}^2 \\ \Theta_2 &= \Theta_0 + 2mr_2^2 = 20,7 \text{ kgm}^2,\end{aligned}$$

amiből a végső szögsebesség:

$$\omega_2 = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \omega_1 = 10,2 \text{ s}^{-1}.$$

Ehhez a jelenséghez hasonló a műkorcsolyázók piruettje is, és ezzel magyarázhatjuk meg azt is, hogy a Naprendszer születésekor a gravitációs összehúzó hatására a kezdetben lassan forgó porfelhő egyre gyorsabban forgott (és ennek hatására ellapult).

A rendszer perdülete állandó, de mozgási energiája változik: a mechanikai energia megmaradásának feltételei nem teljesülnek, mert az ember munkát végez.

Jegyezzük meg, hogy a rendszer perdületét „belső” erők (és forgatónyomatékok) nem tudják megváltoztatni (csak „külsők”), de mechanikai energiáját „belső” (nem konzervatív) erők munkája is megváltoztathatja.

A munkát épp a mechanikai energia megváltozásából számítjuk ki a munkatétel alapján (felhasználjuk a forgó merev test mozgási energiájára megismert összefüggést):

$$W = \Delta E_m = \frac{1}{2} \Theta_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} \Theta_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta_1}{\Theta_2} - 1 \right) \Theta_1 \omega_1^2 = 552 \text{ J}.$$

Mit érez a széken ülő ember? Ő tartja körpályán a súlyzókat, így azokra befelé ható erőt kell kifejtenie. Ennek a (behúzás közben változó nagyságú) erőnek a munkája az, amit most kiszámítottunk.

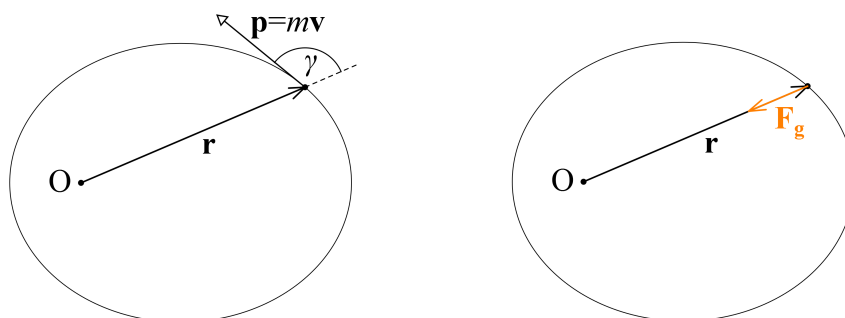
6. Egy pontszerű test $\mathbf{N}$ perdülete (vektoriális mennyiség!) egy tetszőleges O pontra vonatkoztatva $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, ahol $\mathbf{p}$ a test impulzusvektora, $\mathbf{r}$ az O pontból a testre mutató helyvektor, $\times$ pedig a vektoriális szorzat jele. A forgatónyomaték szintén vektoriális mennyiség: egy $\mathbf{F}$ erő O pontra vonatkoztatott forgatónyomatéka $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, ahol $\mathbf{r}$ az O pontból az erő támadáspontjába mutató helyvektor. Ha egy testre nem hat (külső) forgatónyomaték, akkor a test perdülete állandó.

Mutassa meg, hogy Kepler II. törvénye a perdületmegmaradás következménye!

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Mutassuk meg a vektoriális szorzat meghatározását: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ nagysága $ab \sin \gamma$, ahol γ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög, iránya a két vektor által kifeszített síkra merőleges, irányítottságát pedig a „jobbkekszabály” határozza meg. Két párhuzamos (vagy ellentétes) vektor vektoriális szorzata ($\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$ miatt) nulla. (Megemlíthetjük azt is, hogy a vektoriális szorzat nem kommutatív: a tényezőket felcserélve a szorzat előjelet vált, ellentétes irányú lesz.)

Vizsgáljuk meg a csillag (O pont) körül ellipszis pályán keringő bolygót!



A perdületét a megadott definíció alapján határozhatjuk meg. Az ábra bal oldalán berajzoltuk a bolygóhoz mutató $\mathbf{r}$ helyvektort és a bolygó $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ impulzusvektorát, ez utóbbi a pálya érintőjének irányába mutat. Az $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ perdületvektor nagysága a vektoriális szorzat definíciója alapján

$$N = rp \sin \gamma = mrv \sin \gamma,$$

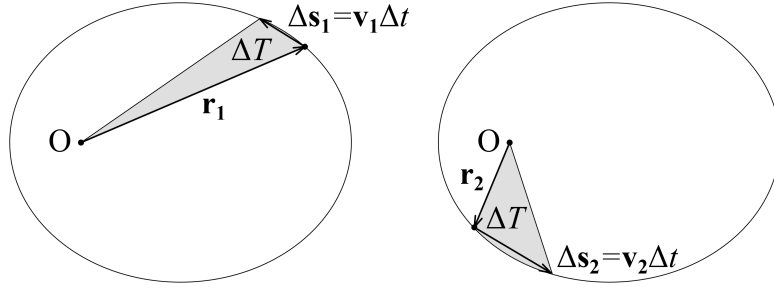
iránya pedig a papír síkjára merőleges, felénk mutat. (Megemlíthetjük, hogy ha a jobb kezünk nagy ujjja a perdületvektor irányába mutat, akkor a többi behajlított ujj mutatja a keringés vagy a forgás irányát, ami most a rajzunkon óramutatóval ellentétes.)

Az ábra jobb oldalán berajzoltuk a bolygóra ható egyetlen erőt: a csillag által kifejtett gravitációs vonzóerőt. Ez az erő mindig a csillag (O pont) felé mutat (*centrális erő*). A bolygóra ható forgatónyomaték (az O pontra vonatkoztatva) $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_g$, ami a vektoriális szorzat definíciója alapján (az erő nagyságától függetlenül) nulla. Ebből viszont az következik, hogy a bolygó perdületvektora állandó:

$$\mathbf{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} = \text{állandó}.$$

Mi köze ennek Kepler II. törvényéhez?

Kepler II. törvénye szerint a csillagtól a bolygóhoz húzott szakasz (a „vezérsugár”) azonos idő alatt azonos területet „súrol”.



A bolygó egy rövid Δt idő alatt $\Delta s = v\Delta t$ utat tesz meg. (Ha a Δt idő kicsi, akkor a mozgás egyenesvonalú egyenletes mozgással közelíthető.) A vezérsugár által sűrt terület egy ellipsziscikk, amit – kis Δt esetén – egy háromszöggel közelíthetünk. A háromszög területe meghatározható két szomszédos oldalának (r és Δs), valamint az oldalak által közbezárt γ' szögnek a segítségével:

$$\Delta T = \frac{1}{2}r\Delta s \sin \gamma' = \frac{1}{2}rv\Delta t \sin \gamma.$$

Felhasználjuk, hogy γ' az $\mathbf{r}$ és $\mathbf{v}$ vektorok által bezárt γ szög kiegészítő szöge, így a két szög szinusza megegyezik, valamint azt, hogy ha a Δt idő kicsi, akkor a kis húr közel ugyanakkora szöget zár be a vezérsugárral, mint az érintő.

Az *időben állandó* perdület nagyságára korábban felírt képlet alapján (átrendezéssel):

$$rv \sin \gamma = \frac{N}{m},$$

amit behelyettesítve a sűrt terület kifejezésébe:

$$\Delta T = \frac{\Delta t}{2m}N = \text{állandó} \quad (\text{ha } \Delta t = \text{állandó}).$$

Kepler II. törvénye tehát a perdületmegmaradás következménye, annak egy speciális esetre vonatkozó (tapasztalati) megfogalmazása.

9. gyakorlat – hullámok

Bevezető:

A hullámok a mechanikán kívül a fizika (és a villamosmérnöki tudományok) sok területén fontosak, ezért pár alapvető dologgal foglalkozunk itt.

A hullámjelenség egy közeg valamilyen jellemzőjének (kitérés, nyomás, sűrűség, térerősség, stb.) térben és időben periodikus változása. A vizsgált mennyiséget (a mi esetünkben a kitérést) a hely és az idő függvényében a hullámfüggvény adja meg. Egydimenziós hullámok (egydimenziós közegben terjedő hullám vagy térben terjedő síkhullám) esetén a hullámfüggvény egy *kétváltozós* függvény.

A hullámfüggvény transzverzális hullámnál az x terjedési irányra merőleges y kitérést adja meg:

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0),$$

ahol A a hullám amplitúdója, $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ a hullám körfrekvenciája (ν a frekvencia, T a periódusidő), $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ a hullámszám (λ a hullámhossz), φ_0 a kezdőfázis. (Ezek közül a hullámszámot nem tanítják a középiskolában. Megemlíthetjük, hogy a hullámszám lehetne az egységnyi távolságra eső hullámok száma, azaz $1/\lambda$ is, mint ahogy a frekvencia az egységnyi időre eső rezgések száma, $1/T$. Praktikus okokból – így egyszerűbb a hullámfüggvény – ennek 2π -szeresét használjuk, ugyanúgy, mint ahogy a körfrekvencia is a frekvencia 2π -szerese.)

A hullámfüggvénnyel leírt *haladó hullám* azt fejezi ki, hogy a hullám az x helyre $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$ idővel később érkezik, ahol c a hullám terjedési sebessége. (Jegyezzük meg, hogy a c sebesség a hullám „alakjának”, fázisának *állandó* sebessége, és azért nem v -vel jelöljük, hogy megkülönböztessük a rezgő közeg egyes részeinek *időben változó* – rezgőmozgásból adódó – sebességétől!)

A hullámfüggvényből meghatározható a fázissebesség: a fázis akkor nem változik, ha $\omega\Delta t - k\Delta x = 0$, amiből

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu.$$

Az *interferencia* a hullámok szuperpozíciójakor (összegződésekor) fellépő, nagyon fontos jelenség: a hullámok összegződése a fáziskülönbségtől függően erősítő és gyengítő (esetleg kioltó) is lehet. A 2. feladatban két pontforrás interferenciájával foglalkozunk.

A 3. feladatban egy egydimenziós hullám visszaverődésével és interferenciájával kialakuló állóhullámot írunk le.

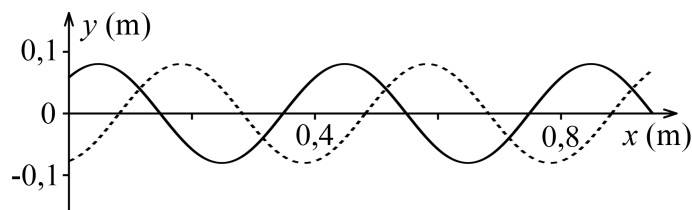
A 4. feladatban egy sípban kialakuló állóhullámot, és az ehhez kapcsolódó zenei hangot vizsgáljuk. Itt érdekességgépp megmutatjuk a fizikai leírás és a zenei hangok kapcsolatát: 440 Hz a „normál zenei a hang”, a 12-fokú temperált skálán pedig két szomszédos félhang frekvenciájának aránya $\sqrt[12]{2}$.

Az utolsó feladatban a Doppler-effektusra látunk (hallunk) egy példát. Itt levezetés nélkül megadjuk a (klasszikus, egydimenziós) Doppler-eltolódás képletét (mozgó forrásra és mozgó megfigyelőre):

$$\nu' = \frac{c - v_m}{c + v_f} \nu,$$

ahol ν a forrás frekvenciája, ν' a megfigyelő által észlelt frekvencia, c a hullám terjedési sebessége a közegben, v_f a forrás, v_m pedig a megfigyelő sebessége a közeghez képest. Mindkét sebesség akkor pozitív, ha a forrás és a megfigyelő távolodik egymástól.

1. Az ábrán egy transzverzális hullám látható a $t = 0$ pillanatban (folytonos vonal) és a $t = \frac{1}{60}$ s pillanatban (szaggatott vonal).



Mekkora a hullám amplitúdója, hullámhossza, terjedési sebessége, frekvenciája, kezdőfázisa? Írja fel az $y(x, t)$ hullámfüggvényt!

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A grafikonról könnyen leolvasható az amplitúdó: $A = 0,08$ m és a hullámhossz (például két maximum, vagy két azonos fázisú zérushely távolsága): $\lambda = 0,4$ m. Ezen kívül leolvasható a $\Delta t = \frac{1}{60}$ s alatti (minimális) elmozdulás: $\Delta s = \frac{\lambda}{3} = \frac{4}{30}$ m, vagy az ennek megfelelő fáziskülönbség $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda} = \frac{2\pi}{3}$. (Természetesen ez csak az egyik lehetséges megoldás! Említsük meg, hogy a fáziskülönbség lehet minden $\Delta\varphi(n) = \frac{2\pi}{3} + 2n\pi$ érték, ahol $n \in \mathbb{Z}$, akár negatív egész szám!) Szintén leolvasható a kezdőfázis: $\varphi_0 \approx \frac{3\pi}{4} \approx 2,36$, vagy az ehhez tartozó $s_0 = \lambda \frac{\varphi_0}{2\pi} \approx 0,15$ m elmozdulás. (A fázisban x együtthatója negatív, a mínusz szinusz függvény kezdőpontja $x \approx 0,15$ m-nél van.)

A terjedési sebességet a hullám elmozdulása alapján határozhatjuk meg:

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 8 \text{ m/s}.$$

(Ez ismét csak egy lehetséges – a minimális – érték, $n = 0$ -hoz tartozó fáziskülönbséggel.)

A periódusidő ebből:

$$T = \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{20} \text{ s} = 0,05 \text{ s},$$

a frekvencia pedig:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda} = 20 \text{ Hz}.$$

(Középiskolában a frekvenciát f -fel szokás jelölni, említsük meg, hogy a fizikusok inkább ν -t használnak, ezért használjuk mi is ezt.)

A hullámfüggvény felírásához szükség van még a körfrekvenciára és a hullámszáma:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \approx 125,7 \text{ s}^{-1}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \approx 15,7 \text{ m}^{-1}.$$

Végül a hullámfüggvény paraméteresen és a numerikus adatokkal:

$$y(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0) = 0,08 \text{ m} \cdot \sin(125,7 \text{ s}^{-1} \cdot t - 15,7 \text{ m}^{-1} \cdot x + 2,36).$$

2. Egy síkon két pontszerű hullámforrás található, egymástól d távolságra. A források azonos ν frekvenciával, azonos amplitúdóval és azonos fázisban bocsátanak ki hullámokat. A hullámok a forrásokat körülvevő (kétdimenziós) közegben c sebességgel terjednek.

Adja meg azokat a helyeket, ahol a két hullám maximálisan erősíti, illetve maximálisan gyengíti egymást!

Hol vannak az erősítési és gyengítési helyek, ha a hullámok térben (három dimenzióban) terjednek?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Két hullám akkor erősíti egymást legjobban, ha a fázisaik különbsége 2π egész számú többszöröse. Ez (azonos fázisú hullámforrásoknál) akkor következik be, ha a hullámok által megtett utak különbsége a hullámhossz egész számú többszöröse, azaz

$$\Delta s = s_1 - s_2 = n\lambda, \quad n \in \mathbb{Z},$$

ahol

$$\lambda = \frac{c}{\nu}.$$

Azoknak a pontoknak a halmaza a síkban, melyeknek két rögzített ponttól való távolsága egy adott állandó *hiperbolaívek*. (Kivéve a nulla útkülönbségnek megfelelő szakaszfelező merőleges egyenest.) A hiperbolaívek száma (n lehetséges értékeinek száma) függ a pontok d távolságától, az útkülönbség abszolút értéke nem lehet nagyobb ennél:

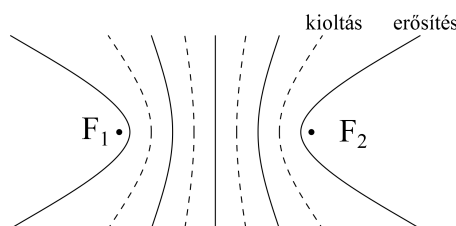
$$|\Delta s| \leq d \quad \Rightarrow \quad |n| \leq \frac{d}{\lambda},$$

és így (a szakaszfelező egyenessel együtt) $2n_{\max} + 1$ görbén lesznek az erősítési helyek.

Ehhez hasonlóan maximális gyengítés (kioltás) ott lesz, ahol a fáziskülönbség π páratlan többszöröse, azaz ha

$$\Delta s = s_1 - s_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ezek a pontok szintén hiperbolaíveken helyezkednek el.



Az ábrán az erősítési és kioltási helyek látszódnak ($d \approx 2,2\lambda$ esetén).

Térbeli esetben a hiperbolaívek helyett kétköpenyű forgási hiperboloid felületek lesznek az erősítési és kioltási helyek. (Ezeket a felületeket úgy kapjuk meg, hogy az ábrán látható görbéket megforgatjuk a két forrást összekötő egyenes körül.)

3. Egy egyik végén falhoz rögzített kötélen szinuszos hullám érkezik a rögzítési ponthoz, és onnan visszaverődik. Az érkező és visszaverődő hullám interferál egymással.

Írja fel és jellemezze a kialakuló hullámfüggvényt!

Segítség: A koordináta-rendszer kezdőpontja legyen a rögzítési pontnál, és a pozitív irány mutasson a kötélen felé. Így a beérkező hullám sebessége negatív, a hullámfüggvényt ennek alapján írja fel! A visszaverődéskor a hullámnak fázisugrása van. Ennek nagyságát abból kaphatja meg, hogy a rögzítési pontban a hullám kitérésének mindig nullának kell lennie.

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A negatív irányba terjedő hullám hullámfüggvénye:

$$y_-(x, t) = A \sin(\omega t + kx),$$

hiszen a hullám annál *később* érkezik egy helyre, minél *közelebb* van az origóhoz.

A visszaverődő hullám a pozitív irányba terjed, hullámfüggvénye:

$$y_+(x, t) = A' \sin(\omega t - kx + \varphi_0),$$

ahol A' és φ_0 egyelőre ismeretlen.

Ezek értékét abból kapjuk meg, hogy az $x = 0$ helyen a kitérésnek (azaz a két hullám összegének) mindig nullának kell lennie (hiszen itt a kötélen rögzítve van):

$$\begin{aligned} y_-(0, t) + y_+(0, t) &= 0 \\ A \sin(\omega t) + A' \sin(\omega t + \varphi_0) &= 0. \end{aligned}$$

Ez csak akkor igaz minden t időpontra, ha $A' = A$ és $\varphi_0 = \pi$ (illetve, ami ezzel egyenértékű, ha $A' = -A$ és $\varphi_0 = 0$).

A rögzített falról való visszaverődéskor tehát a hullámnak π fázisugrása lesz, amplitúdója pedig változatlan. (A π fázisugrás azonban helyettesíthető egy -1 -gyel való szorzással is, hiszen $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$.)

Ezután már felírhatjuk a két hullám szuperpozíciójaként (interferenciájából) keletkező hullám hullámfüggvényét:

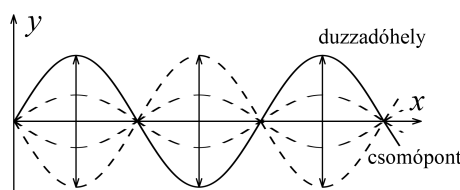
$$y(x, t) = y_-(x, t) + y_+(x, t) = A \sin(\omega t + kx) - A \sin(\omega t - kx) = 2A \sin kx \cos \omega t,$$

ahol felhasználtuk a

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

trigonometrikus azonosságot.

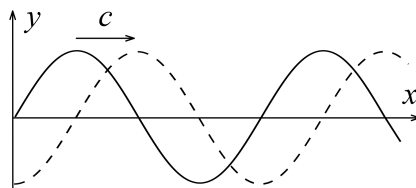
A kapott függvény egészen más, mint az eddig megismert haladóhullám hullámfüggvénye!



Bizonyos *helyeken* (ahol $\sin kx = 0$) a függvény kitérése minden időpillanatban nulla, ezeket a helyeket *csomópontoknak* nevezzük. A többi helyen a közeg pontjai harmonikus rezgőmozgást végeznek, más-más amplitúdóval. A maximális amplitúdójú helyek a *duzzadóhelyek*.

Ugyanakkor bizonyos *időpillanatokban* (amikor $\cos \omega t = 0$) a függvény mindenhol nulla! Az ábrán öt különböző pillanatban látszik a kötel (ebből az egyik egybeesik az x -tengellyel).

A különbség hangsúlyozására érdemes (újra) felrajzolni egy haladóhullámot is (két különböző pillanatban). A különbség szembeötlő!

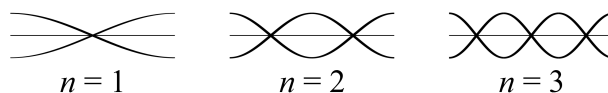


4. Egy mindkét végén nyitott síp hossza $\ell = 19$ cm. A hang terjedési sebessége száraz, hideg (5°C -os) levegőben $c = 334,5$ m/s.

Milyen frekvenciájú hangok alakulhatnak ki a sípban? Mekkora az alaphang frekvenciája. Milyen zenei hang ez?

A sípban lévő levegő hőmérséklete a fűtés közben 35°C -ra, relatív páratartalma 80%-ra változik, így a hang sebessége $c' = 355,5$ m/s-ra nő. Mekkora lesz az alaphang frekvenciája? Mennyivel hangolódott el a síp?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:



A nyitott síp végein duzzadóhelyek lesznek. Így a lehetséges kialakuló állóhullámok hullámhossza:

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n} \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

az ehhez tartozó frekvenciák:

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda} = n \frac{c}{2\ell} = n\nu_1 \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

ahol ν_1 a síp alaphangjának frekvenciája.

Ez alapján a sípunk alapfrekvenciája:

$$\nu = \frac{c}{2\ell} \approx 880 \text{ Hz},$$

amely egy úgynevezett kétvonalas a (a'') zenei hang.

Emellett (különböző amplitúdóval) megszólalnak az alaphang *felharmonikusai* is, melyek frekvenciája az alaphang frekvenciájának egész számú többszörösei. Ezek együtt adják a hangszer *hangszínét*.

A melegebb, párásabb levegőben a hang terjedési sebessége nagyobb, így megváltozik a hang frekvenciája is:

$$\nu' = \frac{c'}{2\ell} \approx 935,5 \text{ Hz} \approx 1,063\nu.$$

Ha ebből a frekvenciaarányból hangmagasság különbséget akarunk számolni, akkor ehhez fel kell használnunk, hogy a hangmagasság a frekvencia logaritmusaival arányos. A $\log_2 \frac{\nu_2}{\nu_1}$ kifejezés megadja a ν_1 és ν_2 hangok magasságkülönbségét *oktávban* (azaz a kétszeres frekvencia éppen 1 oktávval magasabb). A *temperált skála* az oktávot 12 egyforma félhangra osztja, így két szomszédos félhang frekvenciájának aránya $\sqrt[12]{2} \approx 1,0595$.

Eszerint a síp a melegtől és a párától kb. egy fél hanggal elhangolódik, a” helyett b” hangot ad. (Emiatt kell a fúvós hangszereket a hangverseny előtt „befűjni”).

5. Egy mentőautó szirénájának hangját az autó közeledésekor $\nu_1 = 583 \text{ Hz}$ frekvenciájúnak, távolodásakor $\nu_2 = 475 \text{ Hz}$ frekvenciájúnak halljuk.

Mekkora az autó sebessége? Milyen hangot hallanánk, ha az autó állna?

Segítség: A hőmérsékletadat hiányában a hang terjedési sebességét vegyük 340 m/s -nak!

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A hallott hang frekvenciaváltozását a Doppler-effektus okozza. Ha az út szélén állunk, akkor az autó majdnem pontosan felénk közeledik, így használhatjuk az egydimenziós megoldást. A megfigyelő áll, így a bevezetőben megadott

$$\nu' = \frac{c - v_m}{c + v_f} \nu,$$

képlet

$$\nu' = \frac{c}{c \mp v_f} \nu$$

alakra egyszerűsödik. (A – előjel a közeledésre, a + előjel a távolodásra vonatkozik.)

Ez alapján két egyenletet írhatunk fel:

$$\begin{aligned} \frac{c}{c - v_f} \nu &= \nu_1 \\ \frac{c}{c + v_f} \nu &= \nu_2, \end{aligned}$$

majd az egyenletrendszert megoldva:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2} c = 34,7 \text{ m/s} = 125 \text{ km/h} \\ \nu &= \frac{2\nu_1\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} = 523,5 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

Az álló mentőautó hangja

$$12 \log_2 \frac{\nu}{\nu_a} = 12 \log_2 \frac{523,5}{440} = 12 \log_2 1,19 = 12 \cdot 0,25 = 3$$

félhanggal magasabb a normál zenei a hangnál, tehát egy kétvonalas c (c”) hang. (A számológéppel való számoláshoz: $\log_2 x = \frac{\lg x}{\lg 2}$.)

Ha marad idő, megemlíthetjük, hogy Doppler-eltolódás elektromágneses hullámoknál (és így fénynél is) van, de ott a nagy sebességek miatt más, relativisztikus összefüggéssel kell számolni. A fény vákuumban bármely vonatkoztatási rendszerhez képest ugyanakkora c sebességgel („fénysebességgel”) terjed, így ott – szemben a klasszikus esettel – nem számít külön-külön a forrás és a megfigyelő sebessége, csak az egymáshoz viszonyított v sebességük:

$$\nu' = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \nu.$$

Ez az effektus nyilvánul meg a távoli csillagok vörös-eltolódásában, amiből a világ-egyetem tágulására lehet következtetni.

Egy mozgó testről visszaverődő hullám Doppler-eltolódása olyan, mintha egy kétszer akkora sebességű testről indulna a hullám. Ezen az alapon lehet mozgó testek sebességét mérni. Az orvosi ultrahangos vizsgálatban például ilyen elven mérik a vér áramlási sebességét az erekben vagy a szívben. Szintén ezt használták régebben a rendőrök a radaros sebességmérésnél. (Ma már a lézeres mérésnél – a méréstechnika fejlődésének köszönhetően – közvetlenül visszaverődési időket és abból távolságot, a távolság változásából pedig közvetlenül sebességet mérnek.)

10. gyakorlat – ideális gázok, halmazállapotok

Bevezető:

Egyensúlyi állapot jellemzése: V , m , n , U , S extenzív állapotjelzők, p , T , ρ intenzív állapotjelzők.

Egyensúlyi folyamatok (egyensúlyi állapotokon keresztül) folyamatra jellemző mennyiségek: W_g (gáz által végzett munka), Q (közölt hő).

I. főtétel:

$$\Delta U = Q - W_g,$$

az energiamegmaradás kifejeződése. A belső energia csak akkor változhat, ha a környezettől energiát kap, vagy annak energiát ad le. Az energiaátadásnak azonban két különböző módja van, a munkavégzés („rendezett” energiaátadás) és a hőfelvétel/hőleadás („rendezetlen” energiaátadás).

Ideális gáz: egy modell, amely jól leírja a nem túl nagy nyomású gázok viselkedését.

Állapotegyenlet:

$$pV = nRT,$$

ahol $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$.

Az ideális gáz belső energiája egyenesen arányos az abszolút hőmérséklettel:

$$U = \frac{f}{2}nRT,$$

ahol f a gázmolekulák „szabadsági fokainak” száma (egyatomos gáznál $f = 3$, kétatomos molekulákból álló gáznál $f = 5$).

Speciális állapotváltozások:

Izochor folyamat ($V = \text{állandó}$):

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad W_g = 0, \quad Q = \Delta U = \frac{f}{2}nR\Delta T = \frac{f}{2}p\Delta V.$$

Izobár folyamat ($p = \text{állandó}$):

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \quad W = p\Delta V, \quad Q = \Delta U + W_g = \frac{f+2}{2}p\Delta V = \frac{f+2}{2}nR\Delta T.$$

Izotermikus folyamat ($T = \text{állandó}$):

$$p_1V_1 = p_2V_2, \quad \Delta U = 0, \quad Q = W_g = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad \Delta S = \frac{Q}{T} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Adiabatikus folyamat (nincs hőcsere):

$$Q = 0, \quad S = \text{állandó}, \quad p_1V_1^\kappa = p_2V_2^\kappa, \quad \text{ahol } \kappa = \frac{f+2}{f}.$$

(Az első kettőt lehet a 2., a másik kettőt a 3. feladatnál ismertetni.)

Halmazállapotokról majd a 4. feladatnál (ha marad rá idő).

1. Egy $V = 20 \text{ dm}^3$ térfogatú tartályban $n = 10 \text{ mol}$ nitrogéngáz van $T = 20^\circ\text{C}$ hőmérsékleten.

Mekkora a gáz nyomása és sűrűsége?

Segítség: A nitrogén moláris tömege $M = 28 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, az egyetemes gázállandó $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$.

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

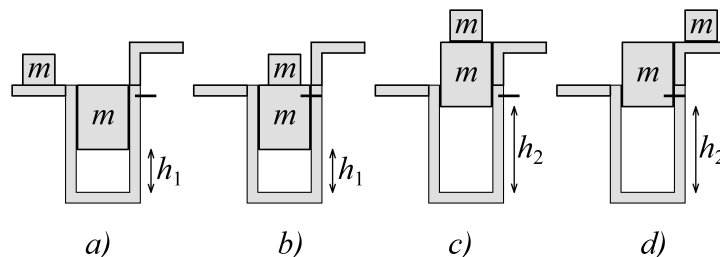
Egyszerű, „bemelegítő” feladat.

$T = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$, $V = 20 \text{ dm}^3 = 0,02 \text{ m}^3$, $M = 28 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 0,028 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}$.

$$p = \frac{nRT}{V} = 1,22 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 1,22 \text{ MPa}$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} = 14 \text{ kg/m}^3.$$

2. Az ábrán egy egyszerű hőerőgép látható a működése néhány fázisában. A hengerben levegő van ($f = 5$), a henger belső keresztmetszete $A = 1 \text{ dm}^2$. A dugattyú és a teher tömege egyaránt $m = 100 \text{ kg}$, a külső légnyomás $p_0 = 100 \text{ kPa}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.



a) Kezdetben a teher az alsó polcon van, nincs rajta a dugattyún. A dugattyú nincs rögzítve, $h_1 = 1 \text{ dm}$ magasan egyensúlyban van. A bezárt gáz hőmérséklete $T_1 = 300 \text{ K}$.

Mekkora a bezárt gáz p_1 nyomása? Hány mól gáz van a hengerben?

b) Ezután a dugattyút rögzítjük, a terhet rátoljuk, majd a gázt melegíteni kezdjük.

Mekkora T_2 hőmérsékleten lesz a dugattyú ismét egyensúlyban, hogy a rögzítést megszüntethessük? Mekkora ekkor a gáz p_2 nyomása?

c) Ezután a gázt tovább melegítjük, aminek hatására a dugattyú $h_2 = 2 \text{ dm}$ magasra emelkedik.

Mekkora ekkor a gáz T_3 hőmérséklete és p_3 nyomása?

d) A dugattyút ebben a helyzetben rögzítjük, és a terhet áttoljuk a felső polcra. Ezután a gázt hűteni kezdjük, egész addig, amíg a nyomás annyira lecsökken, hogy a rögzítést újra kivehetjük.

Mekkora ekkor a gáz T_4 hőmérséklete és p_4 nyomása?

e) A rögzítés eltávolítása után a gázt tovább hűtjük, egészen addig, amíg a dugattyú visszakerül az a) ábrán látható eredeti állapotba.

Foglalja táblázatba a gáz nyomását, térfogatát, hőmérsékletét és belső energiáját az egyes állapotokban és ábrázolja a körfolyamatot p - V , p - T és V - T állapotsíkokon!

Határozza meg és foglalja táblázatba az egyes részfolyamatok során a belső energia megváltozását, a gáz által végzett munkát és a gázzal közölt (illetve a gáztól elvont) hőt!

Határozza meg a hőerőgép hatásfokát! Mire fordítódik a hasznos munka? Mi lesz a veszteséggel?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

Reményeim szerint a valós modell érthetőbbé teszi a körfolyamatot.

a) A dugattyú nincs rögzítve, az egyensúly feltétele:

$$\begin{aligned} p_1 A &= p_0 A + mg \\ p_1 &= p_0 + \frac{mg}{A} = 200 \text{ kPa} . \end{aligned}$$

Az anyagmennyiség az állapotegyenlet alapján:

$$n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{p_1 h_1 A}{RT_1} = 0,08 \text{ mol} .$$

b) A rögzítést akkor lehet kihúzni, ha újra egyensúly van. Ebből

$$p_2 = p_0 + \frac{2mg}{A} = 300 \text{ kPa} ,$$

amiből (izochor állapotváltozás):

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1} T_1 = 450 \text{ K} .$$

c) Izobár állapotváltozás, a nyomás nem változik ($p_3 = p_2$). Az új hőmérséklet:

$$T_3 = \frac{V_3}{V_2} T_2 = \frac{h_2}{h_1} T_2 = 900 \text{ K} .$$

d) A nyomás lecsökken a korábbi értékre ($p_4 = p_1$). Izochor folyamat:

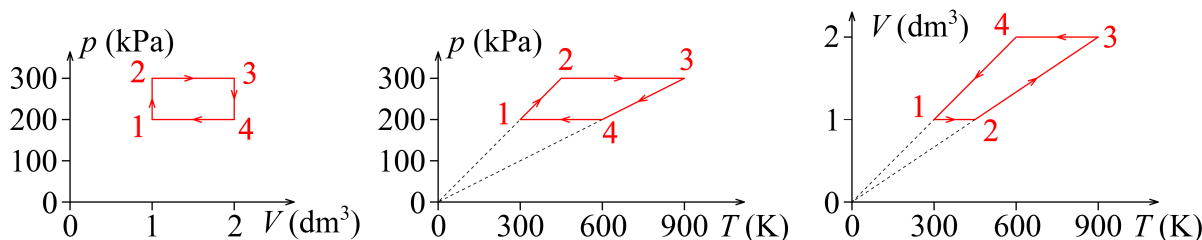
$$T_4 = \frac{p_4}{p_3} T_3 = 600 \text{ K} .$$

e) A táblázat ($U = \frac{f}{2} pV$) és a körfolyamat az állapotsíkokon::

	p (kPa)	V (dm ³)	T (K)	U (J)
1	200	1	300	500
2	300	1	450	750
3	300	2	900	1500
4	200	2	600	1000
1	200	1	300	500

A belső energia megváltozása adódik az előző táblázatból. A gáz által végzett munka az izobár folyamatoknál $W_g = p\Delta V$, az izochornál 0. a felvett hő pedig az I. főtételből számíthatjuk ($Q = \Delta U + W_g$):

	ΔU (J)	W_g (J)	Q (J)
1 $\rightarrow$ 2	250	0	250
2 $\rightarrow$ 3	750	300	1050
3 $\rightarrow$ 4	-500	0	-500
4 $\rightarrow$ 1	-500	-200	-700



A hatásfok:

$$\eta = \frac{W_g}{Q_{\text{fel}}} = \frac{300 - 200}{250 + 1050} = \frac{100}{1300} \approx 7,7\%.$$

A végzett munka a teher emelését fedezi:

$$W_g = mg(h_2 - h_1) = 100 \text{ J},$$

a veszteséget a hűtéskor adja le a rendszer.

Vegyük észre, hogy a belső energia teljes megváltozása a körfolyamat során nulla (hiszen a belső energia állapotjelző).

Megjegyzés: A veszteség *részen* újra felhasználható hőcserélők segítségével, és ezzel a hatásfok javítható (persze nem akármeddig), de ebbe nem érdemes belemenni, csak ha kérdésként felmerül.

3. A Carnot-ciklus egy olyan körfolyamat, amely két adiabatikus (hőközlés nélküli) és két izotermikus (állandó hőmérsékletű) folyamatból áll. Adott alsó és felső hőmérséklet esetén ennek a körfolyamatnak van a legnagyobb hatásfoka, ezért a hőtanban kitüntetett szerepe van.

A ciklus az alacsonyabb, T_1 hőmérsékletről indul egy adiabatikus összenyomással. Ennek hatására a gáz T_2 hőmérsékletre melegszik. Ezután folyamatos hőfelvétel közben állandó hőmérsékleten tágul. A harmadik szakasz egy adiabatikus tágulás, aminek hatására a gáz lehűl az eredeti T_1 hőmérsékletre. Innen egy izotermikus összenyomással jut vissza a kezdeti állapotba, miközben hőt ad le.

Foglalja táblázatba az egyes állapotokban a gáz hőmérsékletét, belső energiáját és entrópiáját! Vázolja a folyamatot p - V és T - S állapotsíkon!

Foglalja táblázatba az egyes részfolyamatok során a belső energia és az entrópia megváltozását, a gáz által végzett munkát, valamint a gázzal közölt (illetve a gáztól elvont) hőt!

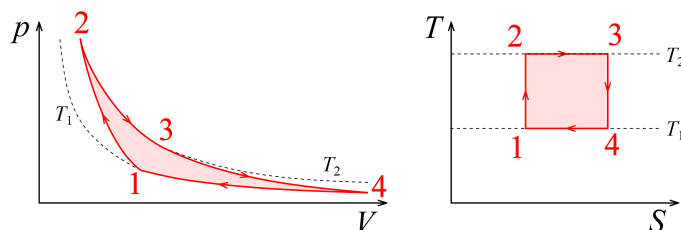
Vizsgálja meg a körfolyamat képét a p - V és T - S állapotsíkon! Mekkora a körfolyamat által körbefogott terület?

Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

A táblázat kitöltésekor kihasználjuk, hogy az izotermikus folyamatnál a hőmérséklet és a belső energia is állandó, és így a hőfelvétel megegyezik a gáz munkavégzésével, az adiabatikus folyamatnál pedig az entrópia állandó, hőfelvétel nincs, a gáz által végzett munka megegyezik a belső energia változásának -1 -szeresével.

Az ábrákon a fekete szaggatott vonalak a T_1 és T_2 izotermák.

	T	U	S
1	T_1	$U_1 = \frac{f}{2}nRT_1$	S_1
2	T_2	$U_2 = \frac{f}{2}nRT_2$	$S_2 = S_1$
3	$T_3 = T_2$	$U_3 = U_2$	$S_3 = S_2 + \frac{Q_{\text{fel}}}{T_2}$
4	$T_4 = T_1$	$U_4 = U_1$	$S_4 = S_3$
1	T_1	U_1	$S_1 = S_4 - \frac{Q_{\text{le}}}{T_1}$



	ΔU	ΔS	W_g	Q
$1 \rightarrow 2$	$\frac{f}{2}nR(T_2 - T_1)$	0	$-\frac{f}{2}nR(T_2 - T_1)$	0
$2 \rightarrow 3$	0	$\frac{Q_{\text{fel}}}{T_2}$	$nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = Q_{\text{fel}}$	Q_{fel}
$3 \rightarrow 4$	$-\frac{f}{2}nR(T_2 - T_1)$	0	$\frac{f}{2}nR(T_2 - T_1)$	0
$4 \rightarrow 1$	0	$-\frac{Q_{\text{le}}}{T_1}$	$-nRT_1 \ln \frac{V_4}{V_1} = -Q_{\text{le}}$	$-Q_{\text{le}}$

A belső energia teljes megváltozása most is (értelemszerűen) nulla.

Az entrópia teljes változása:

$$\Delta S = \frac{Q_{\text{fel}}}{T_2} - \frac{Q_{\text{le}}}{T_1} = nR \ln \frac{V_3}{V_2} - nR \ln \frac{V_4}{V_1} = nR \ln \frac{V_3 V_1}{V_2 V_4} = 0,$$

mert

$$\frac{V_3 V_1}{V_2 V_4} = 1.$$

(Ez utóbbi könnyen belátható az izotermikus $pV = \text{állandó}$ és adiabatikus $pV^\kappa = \text{állandó}$ összefüggésekből, de itt ne részletezzük.) Ez nem véletlen: az entrópia is állapotjelző.

A p - V állapotsíkon a görbe alatti terület a gáz által végzett (előjeles) munka, hiszen

$$W_g = \sum p \Delta V$$

ami ugyanolyan alakú, mint korábban a munka kiszámolása az erőből és az elmozdulásból, vagy az út kiszámolása a sebességből és az időből:

$$W = \sum F \Delta s, \quad s = \sum v \Delta t.$$

Ugyanígy a T - S állapotsíkon a görbe alatti terület a gáz (előjeles) hőfelvétele, hiszen

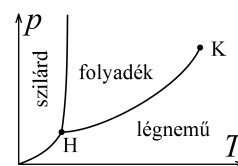
$$Q = \sum T \Delta S.$$

Eszerint a p - V állapotsíkon a görbe által körbezárt terület a gáz teljes munkája (W_g), a T - S állapotsíkon pedig a felvett és leadott hő különbsége ($Q_{\text{fel}} - Q_{\text{le}}$), ez a kettő viszont az I. főtétel miatt megegyezik!

A Carnot-körfolyamat hatásfoka:

$$\eta = \frac{W_g}{Q_{\text{fel}}} = 1 - \frac{Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} < 1.$$

4. Az ábrán az egykomponensű anyagok tipikus fázisdiagramja látható. Ez alapján dönthető el, hogy az anyag egy adott T hőmérsékleten és p nyomáson milyen halmazállapotú. Az egyes fázisokat elválasztó vonalak által kijelölt T, p értékeken a két fázis (például folyadék és gőze) egyszerre lehet jelen. A H hármasponthoz tartozó T_h hőmérsékleten és p_h nyomáson mindhárom halmazállapot egyszerre lehet jelen. A K kritikus pontban (T_k hőmérséklet és p_k nyomás) eltűnik a különbség a folyadék és a légnemű halmazállapot között. Ennél nagyobb hőmérsékleten már nem lehet nagy nyomással cseppfolyósítani egy gázt.



A hármaspont és a kritikus pont a különböző anyagoknál nagyon eltérő, és ez határozza meg a viselkedésüket szobahőmérsékleten és normál légköri nyomáson. Az alábbi táblázatban néhány anyag hármaspontjához és kritikus pontjához tartozó hőmérsékletek és nyomások láthatók.

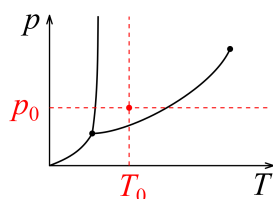
anyag	T_h (°C)	p_h (kPa)	T_k (°C)	p_k (MPa)
víz	0,01	0,6	373,8	22,06
nitrogén	-210,0	12,6	-146,9	339,6
bután	-138,6	0,00067	152,0	379,6
széndioxid	-56,56	518,7	30,98	7,377

Milyen halmazállapotúak az egyes anyagok szobahőmérsékleten ($T_0 = 25^\circ\text{C}$) és normál légköri nyomáson ($p_0 = 101,3\text{ kPa}$)?

Mi történik, ha az anyagot hűtjük vagy melegítjük, illetve ha összenyomjuk vagy csökkentjük a nyomását?

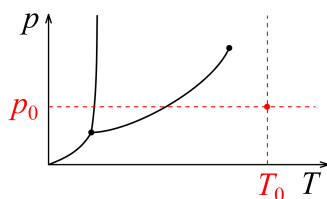
Megoldásvázlat, kiemelendő szempontok:

(Ez a feladat idő hiányában elhagyható.)



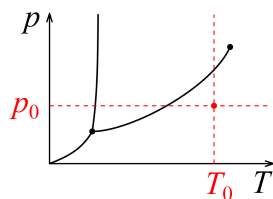
A víz szobahőmérsékleten és normál légköri nyomáson folyékony. Ha lehűtjük, megfagy. Ha melegítjük, vagy ha lecsökkentjük a nyomását légnemű lesz.

Megjegyzés: A víz párolgása *levegőben* bonyolultabb folyamat, hiszen ekkor nem egykomponensű a rendszer. Ilyenkor a vízgőz *parciális nyomása* jóval kisebb a légköri nyomásnál, ezért lehet szobahőmérsékleten is gőz. Ez az érdekes kérdéskör azonban végképp nem fér már bele az órába.)

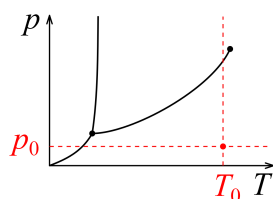


A nitrogén szobahőmérsékleten és normál légköri nyomáson gáz halmazállapotú. Ha lehűtjük, cseppfolyósítható (folyékony nitrogén, 77 K), azonban összenyomással nem! (Emiatt régebben azt hitték, nem is cseppfolyósítható: „permanens gáz”-nak nevezték.)

A folyékony nitrogénes edényt nem szabad lezárni, mert akkor felrobban. A nyitott edényben a folyadék folyamatosan párolog, és ezzel hűti magát, ami ellensúlyozza a nem tökéletes hőszigetelésből adódó melegedést.



A bután szobahőmérsékleten és normál légköri nyomáson szintén gáz halmazállapotú. Azonban a nitrogénnel szemben összenyomással is cseppfolyósítható. Ilyen nagy nyomású, de szoba hőmérsékletű folyadék lötyög a (propán-)bután palackokban.



A széndioxid szobahőmérsékleten és normál légköri nyomáson szintén gáz halmazállapotú, azonban a hármaspontjához tartozó nyomás nagyobb a légköri nyomásnál, így ha hűtjük, akkor nem cseppfolyósodik, hanem szilárd lesz (szárjég), ami melegedéskor ismét gázzá változik (szublimál).

Összenyomással azonban szobahőmérsékleten is cseppfolyósítható. Viszont kritikus hőmérséklete alig magasabb a szobahőmérsékletnél, könnyen elérhető és megfigyelhető, ahogy eltűnik a folyadék és gőze között a határfelület. Már testhőmérsékleten a kritikus hőmérséklet fölé kerül, amitől nyomása nagyon nagy lesz, így nagy óvatosságot igényel.

IV. Zárthelyi feladatsorok és pontozási útmutatók

Bevezető fizika villamosmérnököknek – 1. zárthelyi (2015. október 21.)

Név:

Neptun-kód:

Kurzus:

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésére. Csak írószer és számológép használható. A feladatok megoldását a lap túloldalán, és ha szükséges, a teremfelügyelőtől kérhető új lapokon folytassa. Az utóbbi esetben a nevét és Neptun-kódját minden lapra írja fel!

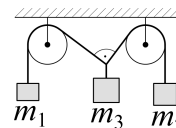
Feladatok:

1. Egy autó a 120 km-es út első negyedét 50 km/h-s sebességgel tette meg.

Mekkora (állandó) sebességgel kell haladnia a vezetőnek a hátralévő szakaszon, ha azt szeretné, hogy az átlagsebessége az egész útra vonatkoztatva 90 km/h legyen?

(8 pont)

2. Amikor az ábrán látható testek egyensúlyban vannak, a két „ferde” kötélen középen derékszöget zár be. A csigák súrlódásmentesek, a kötelek könnyűek.



Mekkora az m_3 tömeg, ha $m_1 = 1,5$ kg és $m_2 = 2$ kg?

(8 pont)

3. Egy elegendően hosszú lejtő aljáról $v_0 = 4$ m/s sebességgel indítunk el egy $m = 1,75$ kg tömegű testet a lejtőn felfelé. $\alpha = 40^\circ$, a test és a lejtő között a csúszási és a tapadási súrlódási együttható is $\mu = 0,25$.

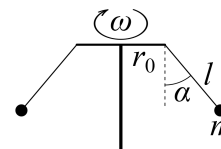


Mekkora s utat tesz meg a test a lejtőn felfelé a megállásig?

Megállás után elindul-e lefelé? Ha igen, mekkora v sebességgel érkezik vissza a lejtő aljára?

(21 pont)

4. Egy körhintán a hinták $l = 10$ m hosszú kötelei egy $r_0 = 4$ m sugarú forgó keretre vannak rögzítve. Amikor a körhinta egyenletes sebességgel forog, a hinták kötele a függőlegessel $\alpha = 40^\circ$ -os szöget zár be.



Mekkora a körhintában ülő ember sebessége?

Mekkora erő feszíti a hinta kötelét, ha a körhintában ülő ember tömege $m = 75$ kg?

(13 pont)

Megoldások:

Bevezető fizika villamosmérnököknek – 1. zárthelyi (2015. október 21.)
Megoldás és pontozás

Pontozási szempontok:

Az egyes részpontszámokat jelölöm. Természetesen, ha valaki másképp (de helyesen) oldja meg a feladatot, akkor is jár a teljes pontszám. Ha másképp, de csak részben jól dolgozik, akkor arányosan kevesebb pont jár.

Olyan (amúgy helyes) összefüggésekért, aminek nincs konkrét köze a megoldáshoz, nem jár pont. Ha valaki csak a kezdő képletig jut, de azt nem rendezni, nem csinál vele semmit, azért csak egész minimális pont jár.

Ha minden képlet jó, de a numerikus számolást rontja el valahol, azért vonjunk le 10-20%-ot! (Ha teljesen irreális eredmény jön ki, nagyságrendileg rossz, akkor többet is.) Hasonlóan, ha rossz a mértékegység.

1. Egy autó a 120 km-es út első negyedét 50 km/h-s sebességgel tette meg.

Mekkora (állandó) sebességgel kell haladnia a vezetőnek a hátralévő szakaszon, ha azt szeretné, hogy az átlagsebessége az egész útra vonatkoztatva 90 km/h legyen?

(8 pont)

Megoldás:

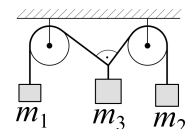
$$t_1 = \frac{\frac{s}{4}}{v_1} = \frac{s}{4v_1} = 0,6 \text{ h}$$

$$t_{\text{ö}} = \frac{s}{v_{\text{átl}}} = 1,33 \text{ h}$$

$$v_2 = \frac{\frac{3s}{4}}{t_{\text{ö}} - t_1} = \frac{\frac{3s}{4}}{\frac{s}{v_{\text{átl}}} - \frac{s}{4v_1}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{v_{\text{átl}}} - \frac{1}{4v_1}} = 122,7 \text{ km/h}.$$

(2+2+4 pont)

2. Amikor az ábrán látható testek egyensúlyban vannak, a két „ferde” kötél közepén derékszöget zár be. A csigák súrlódásmentesek, a kötelek könnyűek.



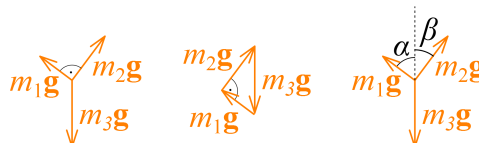
Mekkora az m_3 tömeg, ha $m_1 = 1,5 \text{ kg}$ és $m_2 = 2 \text{ kg}$?

(8 pont)

Megoldás I.:

Ha felrajzoljuk az erőábrát (bal szélső ábra), és a zárt vektorháromszöget (középső ábra), akkor abból azonnal látszik, hogy a három erő egy derékszögű háromszög három oldala, és ebből $m_3 = 2,5 \text{ kg}$ (pitagoraszai számhármass fele).

(8 pont)



Megoldás II.:

Ha ezt nem veszi észre, akkor felbonthatja az erőket (jobb szélső ábra). Mivel α és β pótszögek, $\sin \beta = \cos \alpha$ és $\cos \beta = \sin \alpha$. Vízszintes erőegyensúly:

$$m_1 g \sin \alpha = m_2 g \sin \beta = m_2 g \cos \alpha,$$

amiből

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m_2}{m_1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 53,1^\circ.$$

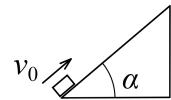
A függőleges erőegyensúlyból

$$m_3 g = m_1 g \cos \alpha + m_2 g \cos \beta = m_1 g \cos \alpha + m_2 g \sin \alpha$$

$$m_3 = m_1 \cos \alpha + m_2 \sin \alpha = 2,5 \text{ kg}.$$

(4+4 pont)

3. Egy elegendően hosszú lejtő aljáról $v_0 = 4 \text{ m/s}$ sebességgel indítunk el egy $m = 1,75 \text{ kg}$ tömegű testet a lejtőn felfelé. $\alpha = 40^\circ$, a test és a lejtő között a csúszási és a tapadási súrlódási együttható is $\mu = 0,25$.



Mekkora s utat tesz meg a test a lejtőn felfelé a megállásig?

Megállás után elindul-e lefelé? Ha igen, mekkora v sebességgel érkezik vissza a lejtő aljára?

(21 pont)

Megoldás:

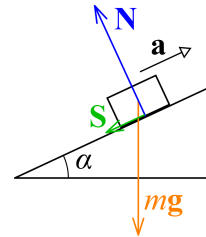
1. lépés: felfelé mozgás dinamikája

Az ábra alapján az egyenletrendszer:

$$N = mg \cos \alpha$$

$$ma_1 = -mg \sin \alpha - S$$

$$S = \mu N,$$



amiből a (negatív) gyorsulás:

$$a_1 = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = -8,18 \text{ m/s}^2 \quad (-8,3 \text{ m/s}^2, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2).$$

(5 pont)

2. lépés: felfelé mozgás kinematikája

A megállásig eltelt idő és a megtett út

$$t_1 = \frac{v_0}{|a_1|} = 0,489 \text{ s} \quad (0,48 \text{ s}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2)$$

$$s = v_0 t_1 + \frac{a_1}{2} t_1^2 = \frac{|a_1|}{2} t_1^2 = \frac{v_0^2}{2|a_1|} = 0,977 \text{ m} \quad (0,96 \text{ m}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2).$$

(5 pont)

3. lépés: megtapad-e?

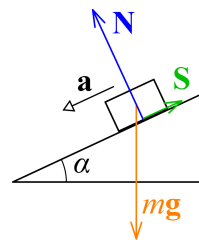
$\mu < \operatorname{tg} \alpha = 0,84$, ezért nem tapad meg, visszacsúszik.

(1 pont)

4. lépés: lefelé mozgás dinamikája

Az ábra alapján az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \alpha \\ ma_2 &= mg \sin \alpha - S \\ S &= \mu N, \end{aligned}$$



amiből a gyorsulás:

$$a_2 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 4,43 \text{ m/s}^2 \quad (4,5 \text{ m/s}^2, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2). \quad (5 \text{ pont})$$

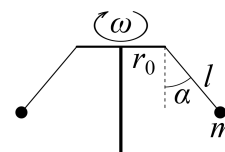
5. lépés: lefelé mozgás kinematikája

A leérkezésig eltelt idő és a sebesség a leérkezéskor

$$\begin{aligned} s &= \frac{a_2}{2} t_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{2s}{a_2}} = 0,665 \text{ s} \quad (0,65 \text{ s}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2) \\ v &= a_2 t_2 = \sqrt{2sa_2} = v_0 \sqrt{\frac{a_2}{|a_1|}} = 2,94 \text{ m/s} \quad (2,9 \text{ m/s}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2). \end{aligned}$$

(5 pont, összesen 5+5+1+5+5=21 pont)

4. Egy körhintán a hinták $l = 10 \text{ m}$ hosszú kötelei egy $r_0 = 4 \text{ m}$ sugarú forgó keretre vannak rögzítve. Amikor a körhinta egyenletes sebességgel forog, a hinták kötele a függőlegessel $\alpha = 40^\circ$ -os szöget zár be.



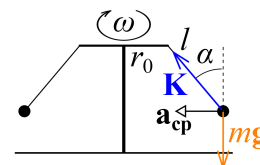
Mekkora a körhintában ülő ember sebessége?

Mekkora erő feszíti a hinta kötelét, ha a körhintában ülő ember tömege $m = 75 \text{ kg}$?

(13 pont)

Megoldás:

A feladat megoldása teljesen megegyezik a gyakorlaton megmutatott megoldással. Az erők felbontása után az egyenletrendszer:



$$K \cos \alpha = mg$$

$$K \sin \alpha = ma_{cp} = m(r_0 + l \sin \alpha) \omega^2 = m \frac{v^2}{r_0 + l \sin \alpha},$$

a körpálya sugara $r = r_0 + l \sin \alpha = 10,4 \text{ m}$. A (szögsebesség és a) sebesség:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{r_0 + l \sin \alpha}} = 0,888 \text{ s}^{-1} \quad (0,90 \text{ s}^{-1}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2)$$

$$v = \sqrt{g \tan \alpha (r_0 + l \sin \alpha)} = 9,26 \text{ m/s} = 33,4 \text{ km/h} \quad (9,4 \text{ m/s}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2).$$

A kötélerő

$$K = \frac{mg}{\cos \alpha} = 960 \text{ N} \quad (980 \text{ N}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2).$$

(10+3 pont)

Bevezető fizika villamosmérnököknek – 1. zárthelyi (2015. október 16.)

Név:

Neptun-kód:

Kurzus:

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésére. Csak írószer és számológép használható. A feladatok megoldását a lap túloldalán, és ha szükséges, a teremfelügyelőtől kérhető új lapokon folytassa. Az utóbbi esetben a nevét és Neptun-kódját minden lapra írja fel!

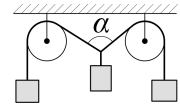
Feladatok:

1. Egy autó a 180 km-es út egy részét 50 km/h sebességgel, a maradékát 130 km/h sebességgel tette meg. Az egész útra vonatkoztatott átlagsebessége 90 km/h.

Hány km-t tett meg 50 km/h sebességgel?

(9 pont)

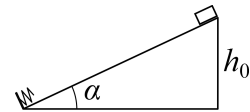
2. Az ábrán a csigák súrlódásmentesek, a kötelek könnyűek. A rendszer egyensúlyban van.



Mekkora a „ferde” kötelek által bezárt α szög, ha a felakasztott testek mindegyikének $m = 1,25$ kg a tömege?

(7 pont)

3. Egy $h_0 = 1$ m magas, $\alpha = 25^\circ$ -os lejtő tetejéről nyugvó helyzetből elengedünk egy $m = 1,1$ kg tömegű testet. A test és a lejtő között a csúszási és a tapadási súrlódási együttható is $\mu = 0,15$.

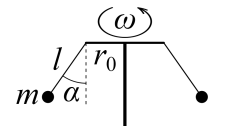


Mekkora v sebességgel érkezik a test a lejtő aljára?

A lejtő alján lévő rugalmas ütközőről a test változatlan nagyságú sebességgel visszapattan. Mekkora h magasságra jut fel, amikor megáll?

(20 pont)

4. Egy körhintán a hinták $l = 6$ m hosszú kötelei egy $r_0 = 3$ m sugarú forgó keretre vannak rögzítve. A körhinta egyenletesen forog, a hinták kötele $\alpha = 35^\circ$ -os szöget zár be a függőlegessel.



Hányszor fordul körbe a körhinta percenként?

Mekkora vízszintes erő hat a körhintában ülő $m = 45$ kg tömegű gyerekre?

(14 pont)

Megoldások:

Bevezető fizika villamosmérnököknek – 1. zárthelyi (2015. október 16.)
Megoldás és pontozás

Pontozási szempontok:

Az egyes részpontszámokat jelölöm. Természetesen, ha valaki másképp (de helyesen) oldja meg a feladatot, akkor is jár a teljes pontszám. Ha másképp, de csak részben jól dolgozik, akkor arányosan kevesebb pont jár.

Olyan (amúgy helyes) összefüggésekért, aminek nincs konkrét köze a megoldáshoz, nem jár pont. Ha valaki csak a kezdő képletig jut, de azt nem rendezni, nem csinál vele semmit, azért csak egész minimális pont jár.

Ha minden képlet jó, de a numerikus számolást rontja el valahol, azért vonjunk le 10-20%-ot! (Ha teljesen irreális eredmény jön ki, nagyságrendileg rossz, akkor többet is.) Hasonlóan, ha rossz a mértékegység.

1. Egy autó a 180 km-es út egy részét 50 km/h sebességgel, a maradékát 130 km/h sebességgel tette meg. Az egész útra vonatkoztatott átlagsebessége 90 km/h.

Hány km-t tett meg 50 km/h sebességgel? (9 pont)

Megoldás I.:

$$t_{\text{ö}} = \frac{s}{v_{\text{átl}}} = 2 \text{ h}$$

$$\frac{s_1}{v_1} + \frac{s - s_1}{v_2} = t_{\text{ö}}$$

$$s_1 = \frac{\frac{v_2}{v_{\text{átl}}} - 1}{\frac{v_2}{v_1} - 1} s = 50 \text{ km}.$$

(Természetesen nem kell paraméteres megoldás, a 2. egyenletbe be lehet írni a numerikus értékeket, és úgy megoldani.) (2+3+4 pont)

Megoldás II.:

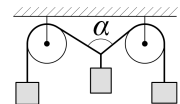
„Közismert”, hogy az átlagsebesség akkor lesz a sebességek átlaga, ha éppen az *idő* felét teszi meg egy-egy sebességgel. A bizonyítása:

$$s = v_1 \frac{t_{\text{ö}}}{2} + v_2 \frac{t_{\text{ö}}}{2} = v_{\text{átl}} t_{\text{ö}} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{átl}} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Ebből

$$s = v_1 \frac{t_{\text{ö}}}{2} = \frac{v_1}{2v_{\text{átl}}} s = 50 \text{ km}.$$
(9 pont)

2. Az ábrán a csigák súrlódásmentesek, a kötelek könnyűek. A rendszer egyensúlyban van.



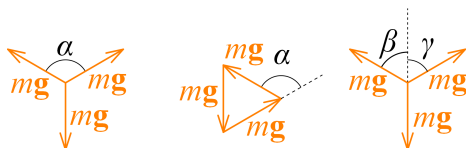
Mekkora a „ferde” kötelek által bezárt α szög, ha a felakasztott testek mindegyikének $m = 1,25 \text{ kg}$ a tömege?

(7 pont)

Megoldás I.:

Ha felrajzoljuk az erőábrát (bal szélső ábra), és a zárt vektorháromszöget (középső ábra), akkor abból azonnal látszik, hogy a három erő egy szabályos háromszög három oldala, és ebből $\alpha = 120^\circ$.

(7 pont)



Megoldás II.:

Ha ezt nem veszi észre, akkor felbonthatja az erőket (jobb szélső ábra). Vízszintes erőegyensúly:

$$mg \sin \beta = mg \sin \gamma,$$

amiből

$$\beta = \gamma = \frac{\alpha}{2}.$$

A függőleges erőegyensúlyból

$$mg = 2mg \cos \frac{\alpha}{2}$$

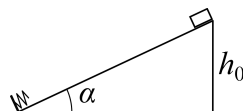
$$\alpha = 2 \arccos \frac{1}{2} = 120^\circ.$$

(2+5 pont)

3. Egy $h_0 = 1$ m magas, $\alpha = 25^\circ$ -os lejtő tetejéről nyugvó helyzetből elengedünk egy $m = 1,1$ kg tömegű testet. A test és a lejtő között a csúszási és a tapadási súrlódási együttható is $\mu = 0,15$.

Mekkora v sebességgel érkezik a test a lejtő aljára?

A lejtő alján lévő rugalmas ütközőről a test változatlan nagyságú sebességgel visszapattan. Mekkora h magasságra jut fel, amikor megáll?



(20 pont)

Megoldás:

1. lépés: lefelé mozgás dinamikája

Az ábra alapján az egyenletrendszer:

$$N = mg \cos \alpha$$

$$ma_1 = mg \sin \alpha - S$$

$$S = \mu N,$$

amiből a gyorsulás:

$$a_1 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 2,81 \text{ m/s}^2 \quad (2,9 \text{ m/s}^2, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2).$$

(5 pont)

2. lépés: lefelé mozgás kinematikája

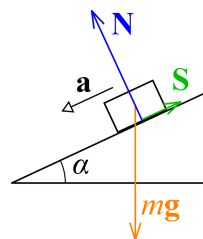
A leérkezésig eltelt idő és a sebesség a leérkezéskor

$$s_0 = \frac{h_0}{\sin \alpha} = 2,37 \text{ m}$$

$$s_0 = \frac{a_1}{2} t_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2s_0}{a_1}} = 1,297 \text{ s} \quad (1,28 \text{ s}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2)$$

$$v = a_1 t_1 = \sqrt{2s_0 a_1} = 3,65 \text{ m/s} \quad (3,7 \text{ m/s}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2).$$

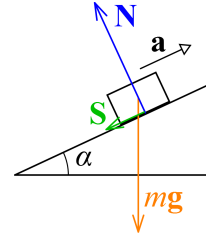
(5 pont)



3. lépés: felfelé mozgás dinamikája

Az ábra alapján az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \alpha \\ ma_2 &= -mg \sin \alpha - S \\ S &= \mu N, \end{aligned}$$



amiből a (negatív) gyorsulás:

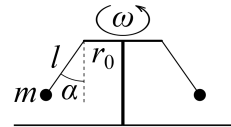
$$a_2 = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = -5,48 \text{ m/s}^2 \quad (-5,6 \text{ m/s}^2, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2). \quad (5 \text{ pont})$$

4. lépés: felfelé mozgás kinematikája A megállásig eltelt idő, a megtett út és a maximális magasság

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{v}{|a_2|} = 0,666 \text{ s} \quad (0,66 \text{ s}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2) \\ s &= vt_2 + \frac{a_2}{2} t_2^2 = \frac{|a_2|}{2} t_2^2 = \frac{v^2}{2|a_2|} = s_0 \frac{a_1}{|a_2|} = 1,214 \text{ m} \quad (1,21 \text{ m}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2) \\ h &= s \sin \alpha = h_0 \frac{a_1}{|a_2|} = 0,513 \text{ m} \quad (0,51 \text{ m}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2). \end{aligned}$$

(5 pont, összesen 5+5+5+5=20 pont)

4. Egy körhintán a hinták $l = 6 \text{ m}$ hosszú kötelei egy $r_0 = 3 \text{ m}$ sugarú forgó keretre vannak rögzítve. A körhinta egyenletesen forog, a hinták kötele $\alpha = 35^\circ$ -os szöget zár be a függőlegessel.



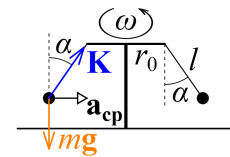
Hányszor fordul körbe a körhinta percenként?

Mekkora vízszintes erő hat a körhintában ülő $m = 45 \text{ kg}$ tömegű gyerekre?

(14 pont)

Megoldás:

A feladat megoldása teljesen megegyezik a gyakorlaton megmutatott megoldással. Az erők felbontása után az egyenletrendszer:



$$\begin{aligned} K \cos \alpha &= mg \\ K \sin \alpha &= ma_{cp} = m(r_0 + l \sin \alpha) \omega^2, \end{aligned}$$

a körpálya sugara $r = r_0 + l \sin \alpha = 6,44 \text{ m}$. A szögsebesség és a fordulatszám:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{r_0 + l \sin \alpha}} = 1,033 \text{ s}^{-1} \quad (1,04 \text{ s}^{-1}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2) \\ n &= 60 \frac{\omega}{2\pi} = 9,86 \text{ fordulat/perc} \quad (10,0 \text{ fordulat/perc}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2). \end{aligned}$$

A testre ható vízszintes erő (befelé, a forgástengely felé):

$$F = ma_{cp} = K \sin \alpha = mg \tan \alpha = 309 \text{ N} \quad (315 \text{ N}, \quad \text{ha } g = 10 \text{ m/s}^2). \quad (10+4 \text{ pont})$$

Bevezető fizika villamosmérnököknek – 2. zárthelyi (2015. december 2.)

Név:

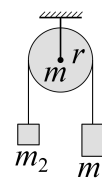
Neptun-kód:

Kurzus:

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésére. Csak írószer és számológép használható. A feladatok megoldását a lap túloldalán, és ha szükséges, a teremfelügyelőtől kérhető új lapokon folytassa. Az utóbbi esetben a nevét és Neptun-kódját minden lapra írja fel!

Feladatok:

1. Az ábrán látható jól csapágyazott, tömör henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$. A kötélen könnyű, nyújthatatlan és nem csúszik meg a hengeren, $m_1 > m_2$. A testeket az ábrán látható nyugalmi helyzetben elengedjük.



Rajzolja be az egyes testekre ható erőket!

Mekkora a henger szöggyorsulása?

Mekkora erő feszíti a hengert tartó kötelet?

(13 pont)

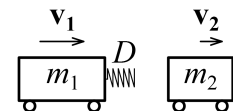
2. Egy $\alpha = 25^\circ$ -os lejtőn $v = 1,2 \text{ m/s}$ kezdősebességgel meglökünk egy $m = 0,5 \text{ kg}$ tömegű téglatestet a lejtővel párhuzamosan *lefelé*. A test a súrlódás miatt $s = 0,4 \text{ m}$ útmegtétele után megáll.

Mekkora a test és a lejtő közötti μ csúszási súrlódási együttható?

Mennyi munkát végez a súrlódási erő?

(10 pont)

3. Egy $m_1 = 0,15 \text{ kg}$ tömegű kiskocsira $D = 50 \text{ N/m}$ rugóállandójú, könnyű rugó van erősítve. A kiskocsi $v_1 = 0,4 \text{ m/s}$ sebességgel utolér egy $m_2 = 0,1 \text{ kg}$ tömegű, $v_2 = 0,1 \text{ m/s}$ sebességű másik kiskocsit, amivel tökéletesen rugalmasan ütközik.

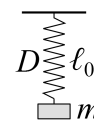


Mekkora lesz a rugó maximális összenyomódása az ütközés közben?

Mekkora lesz a kiskocsik sebessége az ütközés után?

(15 pont)

4. Egy $\ell_0 = 10 \text{ cm}$ hosszúságú, nyújthatatlan rugóra ráakasztunk egy $m = 0,1 \text{ kg}$ tömegű testet, és ebből a helyzetből elengedjük. A rugó rugóállandója $D = 25 \text{ N/m}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Mekkora a kialakuló rezgés amplitúdója?

Mekkora a rezgés periódusideje?

Írja fel és ábrázolja grafikonon a test sebességét az idő függvényében!

(12 pont)

Megoldások:

Bevezető fizika villamosmérnököknek – 2. zárthelyi (2015. december 2.)
Megoldás és pontozás

Pontozási szempontok:

Az egyes részpontszámokat jelölöm. Természetesen, ha valaki másképp (de helyesen) oldja meg a feladatot, akkor is jár a teljes pontszám. Ha másképp, de csak részben jól dolgozik, akkor arányosan kevesebb pont jár.

Olyan (amúgy helyes) összefüggésekért, aminek nincs konkrét köze a megoldáshoz, nem jár pont. Ha valaki csak a kezdő képletig jut, de azt nem rendezni, nem csinál vele semmit, azért csak egész minimális pont jár.

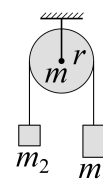
Ha minden képlet jó, de a numerikus számolást rontja el valahol, azért vonjunk le 10-20%-ot! (Ha teljesen irreális eredmény jön ki, nagyságrendileg rossz, akkor többet is.) Hasonlóan, ha rossz a mértékegység.

1. Az ábrán látható jól csapágyazott, tömör henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$. A kötel könnyű, nyújthatatlan és nem csúszik meg a hengeren, $m_1 > m_2$. A testeket az ábrán látható nyugalmi helyzetben elengedjük.

Rajzolja be az egyes testekre ható erőket!

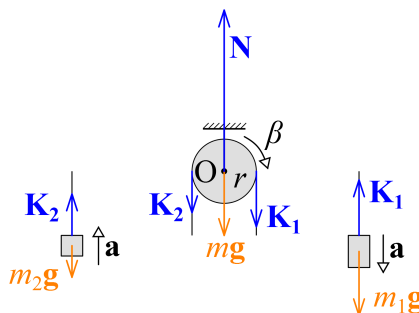
Mekkora a henger szöggyorsulása?

Mekkora erő feszíti a hengert tartó kötelet?



(13 pont)

Megoldás:



Fontos, hogy $K_1 \neq K_2$ ($K_1 > K_2$).

Az egyenletrendszer:

$$m_1 a = m_1 g - K_1$$

$$m_2 a = K_2 - m_2 g$$

$$N = mg + K_1 + K_2$$

$$\frac{1}{2}mr^2\beta = (K_1 - K_2)r$$

$$\beta r = a,$$

amit megoldva:

$$\beta = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} \cdot \frac{g}{r}$$

$$N = \left(m_1 + m_2 + m - \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} \right) g.$$

(Utóbbit persze sok más alakban is helyesen fel lehet írni.)

(3+6+4 pont)

2. Egy $\alpha = 25^\circ$ -os lejtőn $v = 1,2 \text{ m/s}$ kezdősebességgel meglökünk egy $m = 0,5 \text{ kg}$ tömegű téglatestet a lejtővel párhuzamosan *lefelé*. A test a súrlódás miatt $s = 0,4 \text{ m}$ út megtétele után megáll.

Mekkora a test és a lejtő közötti μ csúszási súrlódási együttható?
Mennyi munkát végez a súrlódási erő?

(10 pont)

Megoldás I.:

Munkatétellel:

$$\begin{aligned} W_S &= \Delta E = \Delta E_m + \Delta E_h \\ W_S &= -Ss = -\mu Ns = -\mu mgs \cos \alpha \\ \Delta E_m &= -\frac{1}{2}mv^2 \\ \Delta E_h &= -mgs \sin \alpha, \end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned} -\mu mgs \cos \alpha &= -\frac{1}{2}mv^2 - mgs \sin \alpha \\ \mu &= \frac{v^2}{2sg \cos \alpha} + \tan \alpha \approx 0,67. \end{aligned}$$

A súrlódási erő (*negatív!*) munkája megegyezik a mechanikai energia megváltozásával:

$$W_S = \Delta E_m + \Delta E_h = -\frac{1}{2}mv^2 - mgs \sin \alpha \approx -1,19 \text{ J},$$

vagy a munka definíciója alapján:

$$W_S = -Ss = -\mu mgs \cos \alpha \approx -1,19 \text{ J}.$$

Megoldás II.:

Dinamikából a szokásos módon:

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

a kinematika alapján:

$$a = -\frac{v^2}{2s},$$

majd a kettőt egyenlővé téve:

$$g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = -\frac{v^2}{2s},$$

amiből

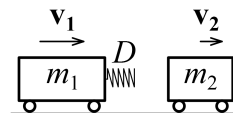
$$\mu = \frac{v^2}{2sg \cos \alpha} + \tan \alpha \approx 0,67.$$

A súrlódási munka:

$$W_S = -Ss = -\mu Ns = -\mu mgs \cos \alpha \approx -1,19 \text{ J}.$$

(6+4 pont)

3. Egy $m_1 = 0,15 \text{ kg}$ tömegű kiskocsira $D = 50 \text{ N/m}$ rugóállandójú, könnyű rugó van erősítve. A kiskocsi $v_1 = 0,4 \text{ m/s}$ sebességgel utolér egy $m_2 = 0,1 \text{ kg}$ tömegű, $v_2 = 0,1 \text{ m/s}$ sebességű másik kiskocsit, amivel tökéletesen rugalmasan ütközik.



Mekkora lesz a rugó maximális összenyomódása az ütközés közben?

Mekkora lesz a kiskocsik sebessége az ütközés után?

(15 pont)

Megoldás:

A rugó akkor lesz legjobban összenyomva, amikor a két test sebessége megegyezik. Ez a közös sebesség az impulzusmegmaradás alapján:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 0,28 \text{ m/s}.$$

A rugó összenyomódásának meghatározásához az energiamegmaradás:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) u^2 + \frac{1}{2} D y^2,$$

amiből

$$y = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - (m_1 + m_2) u^2}{D}} = \sqrt{\frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{(m_1 + m_2) D}} = 0,0104 \text{ m} \approx 1 \text{ cm}.$$

A végsebességek meghatározásához felhasználjuk, hogy a tökéletes rugalmas ütközés miatt a sebességváltozás ugyanannyi a szétlökődés közben, mint az összenyomódás közben. Ebből a végsebességek:

$$u_1 = u + (u - v_1) = 2u - v_1 = 0,16 \text{ m/s}$$

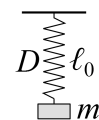
$$u_2 = u + (u - v_2) = 2u - v_2 = 0,46 \text{ m/s}.$$

Ha valaki erre nem jön rá, akkor persze kiszámíthatja közvetlenül a végsebességet a szokásos módon az impulzus- és energiamegmaradásból (hosszabb):

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \\ m_1 (v_1 - u_1) &= m_2 (u_2 - v_2) \\ m_1 (v_1 - u_1)(v_1 + u_1) &= m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2) \\ u_2 &= v_1 + u_1 - v_2 \\ m_1 (v_1 - u_1) &= m_2 (v_1 + u_1 - 2v_2) \\ u_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 0,16 \text{ m/s} \\ u_2 &= v_1 + u_1 - v_2 = 0,46 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

(9+6 pont)

4. Egy $\ell_0 = 10$ cm hosszúságú, nyújtatlan rugóra ráakasztunk egy $m = 0,1$ kg tömegű testet, és ebből a helyzetből elengedjük. A rugó rugóállandója $D = 25$ N/m, $g = 10$ m/s².



Mekkora a kialakuló rezgés amplitúdója?

Mekkora a rezgés periódusideje?

Írja fel és ábrázolja grafikonon a test sebességét az idő függvényében!

(12 pont)

Megoldás:

A rezgés az egyensúlyi helyzet körül fog történni. Az egyensúlyi helyzetben a rugó megnyúlása:

$$y_0 = \frac{mg}{D} = 0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm}.$$

Az amplitúdó megegyezik ezzel a távolsággal (hiszen a kezdeti állapotban a sebesség nulla, az a felső szélső helyzet):

$$A = y_0 = 4 \text{ cm}.$$

A körfrekvencia:

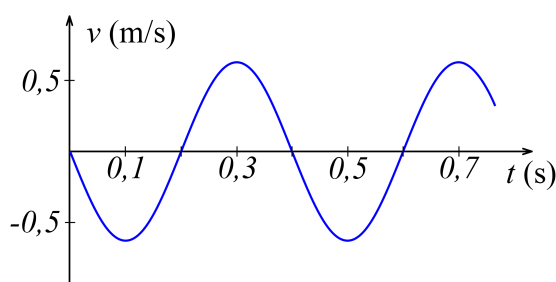
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 15,8 \text{ s}^{-1},$$

a periódusidő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \approx 0,4 \text{ s}.$$

A test sebessége az idő függvényében szinuszos, hiszen a $t = 0$ pillanatban a test áll. Ha a felfelé irányt vesszük pozitívnak:

$$v(t) = -A\omega \sin \omega t = -0,63 \text{ m/s} \cdot \sin(15,8 \text{ s}^{-1} \cdot t).$$



Itt minden fontos: tengelyeken a mennyiségek és a mértékegységek jelölése, skálák, T és $v_{\max}$ helyes ábrázolása, a helyes kezdőfázis.

(3+3+6 pont)

Bevezető fizika villamosmérnököknek – 2. zárthelyi (2015. december 4.)

Név:

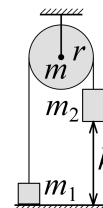
Neptun-kód:

Kurzus:

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésére. Csak írószer és számológép használható. A feladatok megoldását a lap túloldalán, és ha szükséges, a teremfelügyelőtől kérhető új lapokon folytassa. Az utóbbi esetben a nevét és Neptun-kódját minden lapra írja fel!

Feladatok:

1. Az ábrán látható jól csapágyazott, tömör henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$. A kötélen könnyű, nyújthatatlan és nem csúszik meg a hengeren, $m_2 > m_1$. A testeket az ábrán látható nyugalmi helyzetben elengedjük.



Rajzolja be az egyes testekre ható erőket!

Mekkora az m_1 tömegű test gyorsulása?

Mekkora a henger szögsebessége, amikor az m_2 tömegű test leér a talajra?

(13 pont)

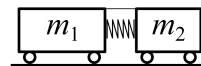
2. Egy $\alpha = 15^\circ$ -os lejtőn $v = 2,5 \text{ m/s}$ kezdősebességgel meglökünk egy $m = 1,2 \text{ kg}$ tömegű téglatestet a lejtőn felfelé. A test $s = 0,6 \text{ m}$ út megtétele után megáll.

Mennyi munkát végez eközben a súrlódási erő?

Megállás után visszacsúszik-e a test?

(10 pont)

3. Az $m_1 = 0,3 \text{ kg}$ tömegű és az $m_2 = 0,2 \text{ kg}$ tömegű kiskocsik között egy $y = 2 \text{ cm}$ -rel összenyomott, $D = 80 \text{ N/m}$ rugóállandójú, könnyű rugó van. A kiskocsik cérnával össze vannak kötve, és nyugalomban vannak. A kiskocsikat összekötő cérnát elégetjük, így a kiskocsik szétlökődnek.

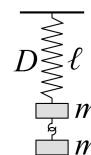


Mekkora lesz a kiskocsik sebessége a szétlökődés után?

Melyik testnek lesz nagyobb a mozgási energiája?

(13 pont)

4. Egy $D = 50 \text{ N/m}$ rugóállandójú rugóra egy $m = 0,1 \text{ kg}$ tömegű test van rögzítve, amely egyensúlyban van. Ekkor a rugó hossza $\ell = 10 \text{ cm}$. Ebben a helyzetben ráakasztunk egy másik, ugyanekkora testet, és ebben a helyzetből magára hagyjuk a rendszert. $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Mekkora a rugó nyújtatlan hossza?

Mekkora a kialakuló rezgés amplitúdója?

Mekkora a rezgés frekvenciája?

Írja fel és ábrázolja grafikonon a test gyorsulását az idő függvényében!

(14 pont)

Megoldások:

Bevezető fizika villamosmérnököknek – 2. zárthelyi (2015. december 4.)
Megoldás és pontozás

Pontozási szempontok:

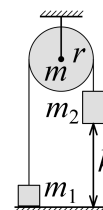
Az egyes részpontszámokat jelölöm. Természetesen, ha valaki másképp (de helyesen) oldja meg a feladatot, akkor is jár a teljes pontszám. Ha másképp, de csak részben jól dolgozik, akkor arányosan kevesebb pont jár.

Olyan (amúgy helyes) összefüggésekért, aminek nincs konkrét köze a megoldáshoz, nem jár pont. Ha valaki csak a kezdő képletig jut, de azt nem rendezni, nem csinál vele semmit, azért csak egész minimális pont jár.

Ha minden képlet jó, de a numerikus számolást rontja el valahol, azért vonjunk le 10-20%-ot! (Ha teljesen irreális eredmény jön ki, nagyságrendileg rossz, akkor többet is.) Hasonlóan, ha rossz a mértékegység.

Feladatok:

1. Az ábrán látható jól csapágyazott, tömör henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$. A kötélnél könnyű, nyújthatatlan és nem csúszik meg a hengeren, $m_2 > m_1$. A testeket az ábrán látható nyugalmi helyzetben elengedjük.



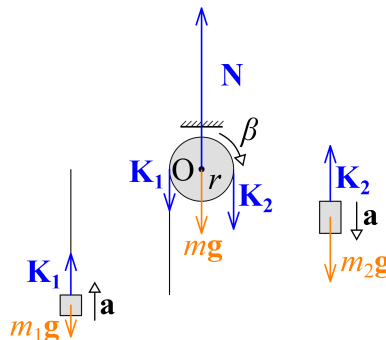
Rajzolja be az egyes testekre ható erőket!

Mekkora az m_1 tömegű test gyorsulása?

Mekkora a henger szögsebessége, amikor az m_2 tömegű test leér a talajra?

(13 pont)

Megoldás:



Fontos, hogy $K_1 \neq K_2$ ($K_1 < K_2$), és persze $a_1 = a_2 = a$.

Az egyenletrendszer:

$$m_1 a = K_1 - m_1 g$$

$$m_2 a = m_2 g - K_2$$

$$(N = mg + K_1 + K_2)$$

$$\frac{1}{2}mr^2\beta = (K_2 - K_1)r$$

$$\beta = \frac{a}{r},$$

amit megoldva:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}g.$$

A leérkezésig eltelt idő:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}},$$

a keresett szögsebesség:

$$\omega = \beta t = \frac{a}{r} t = \frac{\sqrt{2ha}}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2hg(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m}}.$$

Alternatív megoldás:

A végsebességet az energiamegmaradásból is meg lehet kapni:

$$(m_2 - m_1)gh = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2,$$

amiből $v = \omega r$ és a tehetetlenségi nyomaték kifejezésének felhasználásával rendezés után ω -ra ugyanazt az eredményt kapjuk.

(3+6+4 pont)

2. Egy $\alpha = 15^\circ$ -os lejtőn $v = 2,5 \text{ m/s}$ kezdősebességgel meglökünk egy $m = 1,2 \text{ kg}$ tömegű téglatestet a lejtőn *felfelé*. A test $s = 0,6 \text{ m}$ út megtétele után megáll.

Mennyi munkát végez eközben a súrlódási erő?

Megállás után visszacsúszik-e a test?

(10 pont)

Megoldás:

A súrlódási erő (*negatív!*) munkája megegyezik a mechanikai energia megváltozásával:

$$\begin{aligned} W_S &= \Delta E = \Delta E_m + \Delta E_h \\ \Delta E_m &= -\frac{1}{2}mv^2 \\ \Delta E_h &= mgs \sin \alpha \\ W_S &= \Delta E_m + \Delta E_h = -\frac{1}{2}mv^2 + mgs \sin \alpha \approx -1,92 \text{ J}, \end{aligned}$$

Másrészt a súrlódási erő munkája kiszámítható a munka definíciója alapján is:

$$W_S = -Ss = -\mu Ns = -\mu mgs \cos \alpha,$$

amiből kifejezve a súrlódási együtthatót

$$\mu = \frac{-W_S}{mgs \cos \alpha} = \frac{v^2}{2gs \cos \alpha} - \tan \alpha \approx 0,28.$$

Ez kicsit nagyobb, mint a megcsúszás határszöge ($\tan \alpha \approx 0,27$), így a test megállás után nem csúszik vissza.

Megjegyzés:

A „tippeléses” válasz 0 pontot ér, a választ számítással indokolni kell.

(5+5 pont)

3. Az $m_1 = 0,3\text{ kg}$ tömegű és az $m_2 = 0,2\text{ kg}$ tömegű kiskocsik között egy $y = 2\text{ cm}$ -rel összenyomott, $D = 90\text{ N/m}$ rugóállandójú, könnyű rugó van. A kiskocsik cérnával össze vannak kötve, és nyugalomban vannak. A kiskocsikat összekötő cérnát elégetjük, így a kiskocsik szétlökődnek.



Mekkora lesz a kiskocsik sebessége a szétlökődés után?

Melyik testnek lesz nagyobb a mozgási energiája?

(13 pont)

Megoldás:

A megoldáshoz fel kell írni az energia- és az impulzusmegmaradást:

$$\frac{1}{2}Dy^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

$$0 = m_1u_1 + m_2u_2.$$

(Természetesen lehet eleve úgy venni az előjeleket, hogy u_1 balra pozitív, u_2 pedig jobbra, és akkor az impulzusegyenlet $m_1u_1 = m_2u_2$ lesz, de akkor ezt rajzon vagy szövegben egyértelműen jelezni kell.)

A második egyenletből u_2 -t kifejezve:

$$u_2 = -\frac{m_1}{m_2}u_1,$$

és az elsőbe beírva:

$$Dy^2 = m_1u_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2}u_1^2 = \frac{m_1}{m_2}(m_1 + m_2)u_1^2,$$

amiből

$$u_1 = \pm \sqrt{\frac{m_2Dy^2}{m_1(m_1 + m_2)}}.$$

A két megoldás közül értelemszerűen a negatív a helyes, amiből pedig u_2 -re pozitív megoldás adódik:

$$u_1 = -\sqrt{\frac{m_2Dy^2}{m_1(m_1 + m_2)}} \approx -0,22\text{ m/s}$$

$$u_2 = -\frac{m_1}{m_2}u_1 = \sqrt{\frac{m_1Dy^2}{m_2(m_1 + m_2)}} \approx 0,33\text{ m/s}.$$

A mozgási energiák aránya:

$$\frac{E_{m1}}{E_{m2}} = \frac{m_1u_1^2}{m_2u_2^2} = \frac{m_2}{m_1},$$

azaz a kisebb tömegű kiskocsinak lesz nagyobb mozgási energiája. (Az összefüggés átalakításánál felhasználtuk, hogy az impulzusmegmaradás miatt $m_1^2u_1^2 = m_2^2u_2^2$.)

Természetesen ugyanezt kapjuk, ha kiszámítjuk a mozgási energiákat:

$$E_{m1} = \frac{1}{2}m_1u_1^2 = 0,0072\text{ J}$$

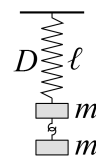
$$E_{m2} = \frac{1}{2}m_2u_2^2 = 0,0109\text{ J}.$$

Megjegyzés:

A sebességeknél fontos az előjel (vagy szövegben az irány), itt pedig az indoklás!

(9+4 pont)

4. Egy $D = 50 \text{ N/m}$ rugóállandójú rugóra egy $m = 0,1 \text{ kg}$ tömegű test van rögzítve, amely egyensúlyban van. Ekkor a rugó hossza $\ell = 10 \text{ cm}$. Ebben a helyzetben ráakasztunk egy másik, ugyanekkora testet, és ebben a helyzetből magára hagyjuk a rendszert. $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Mekkora a rugó nyújtatlan hossza?

Mekkora a kialakuló rezgés amplitúdója?

Mekkora a rezgés frekvenciája?

Írja fel és ábrázolja grafikonon a test gyorsulását az idő függvényében!

(14 pont)

Megoldás:

A rugó megnyúlása kezdetben:

$$y_1 = \frac{mg}{D} = 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm},$$

amiből a nyújtatlan rugó hossza:

$$\ell_0 = \ell - y_1 = 8 \text{ cm}.$$

A rezgés az egyensúlyi helyzet körül fog történni. Az egyensúlyi helyzetben a rugó megnyúlása:

$$y_2 = \frac{2mg}{D} = 0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm}.$$

Az amplitúdó megegyezik a kezdeti állapot és az egyensúlyi állapot közötti távolsággal (hiszen a kezdeti állapotban a sebesség nulla, az a felső szélső helyzet):

$$A = y_2 - y_1 = 2 \text{ cm}.$$

A körfrekvencia, a periódusidő (a grafikonhoz) és a kért frekvencia:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{2m}} = 15,8 \text{ s}^{-1}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{D}} \approx 0,4 \text{ s}$$

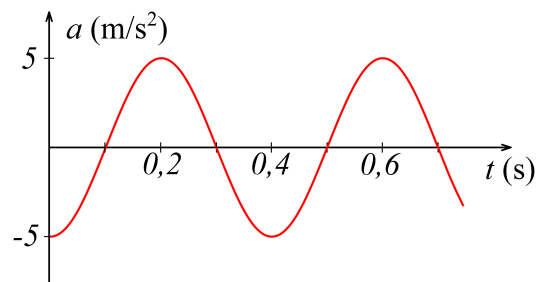
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{2m}} \approx 2,5 \text{ Hz}.$$

A test gyorsulása az idő függvényében koszinuszos, hiszen a $t = 0$ pillanatban a test szélső helyzetben van. Az elengedés után a testek lefelé gyorsulnak, így ha a felfelé irányt vesszük pozitívnak, akkor:

$$a(t) = -A\omega^2 \cos \omega t = -5 \text{ m/s}^2 \cdot \cos(15,8 \text{ s}^{-1} \cdot t).$$

Megjegyzés:

A maximális gyorsulás éppen a nehézségi gyorsulás fele, hiszen a ráakasztott testre ható mg nehézségi erő gyorsít $2m$ tömeget.



Itt minden fontos: tengelyeken a mennyiségek és a mértékegységek jelölése, skálák, T és $a_{\max}$ helyes ábrázolása, a helyes kezdőfázis.

(2+3+3+6 pont)

Bevezető fizika villamosmérnököknek – 1. pótzárthelyi (2015. december 15.)

Név:

Neptun-kód:

Kurzus:

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésére. Csak írószerszám és számológép használható. A feladatok megoldását a lap túloldalán, és ha szükséges, a teremfelügyelőtől kérhető új lapokon folytassa. Az utóbbi esetben a nevét és Neptun-kódját minden lapra írja fel!

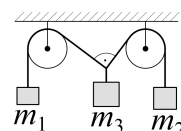
Feladatok:

1. Egy autó a teljes út első ötödét 50 km/h-s sebességgel tette meg.

Mekkora (átlagos) sebességgel kell haladnia a vezetőnek a hátralévő szakaszon, ha azt szeretné, hogy az átlagsebessége az egész útra vonatkoztatva 80 km/h legyen?

(8 pont)

2. Amikor az ábrán látható testek egyensúlyban vannak, a két „ferde” kötél közepén derékszöget zár be. A csigák súrlódásmentesek, a kötelek könnyűek.



Mekkora szöget zárnak be a „ferde” kötelek a vízszintessel, ha $m_1 = 6$ kg és $m_2 = 8$ kg?

(8 pont)

3. Egy elegendően hosszú lejtő aljáról $v_0 = 3$ m/s sebességgel indítunk el egy $m = 1,15$ kg tömegű testet a lejtőn felfelé. $\alpha = 40^\circ$, a test és a lejtő között a csúszási és a tapadási súrlódási együttható is $\mu = 0,2$.

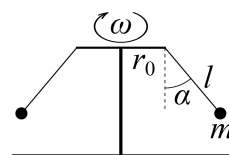


Mekkora s utat tesz meg a test a lejtőn felfelé a megállásig?

Megállás után elindul-e lefelé? Ha igen, mekkora v sebességgel érkezik vissza a lejtő aljára?

(21 pont)

4. Egy körhintán a hinták $l = 8$ m hosszú kötelei egy $r_0 = 4$ m sugarú forgó keretre vannak rögzítve. Amikor a körhinta egyenletes sebességgel forog, a hinták kötele a függőlegessel $\alpha = 40^\circ$ -os szöget zár be.



Mekkora a körhinta fordulatszáma?

Mekkora erő feszíti a hinta kötelét, ha a körhintában ülő ember tömege $m = 60$ kg?

(13 pont)

Megoldások:

Bevezető fizika villamosmérnököknek – 1. pótzárthelyi (2015. december 15.)
Megoldás és pontozás

Pontozási szempontok:

Az egyes részpontoszámokat jelölöm. Természetesen, ha valaki másképp (de helyesen) oldja meg a feladatot, akkor is jár a teljes pontszám. Ha másképp, de csak részben jól dolgozik, akkor arányosan kevesebb pont jár.

Olyan (amúgy helyes) összefüggésekért, aminek nincs konkrét köze a megoldáshoz, nem jár pont. Ha valaki csak a kezdő képletig jut, de azt nem rendezni, nem csinál vele semmit, azért csak egész minimális pont jár.

Ha minden képlet jó, de a numerikus számolást rontja el valahol, azért vonjunk le 10-20%-ot! (Ha teljesen irreális eredmény jön ki, nagyságrendileg rossz, akkor többet is.) Hasonlóan, ha rossz a mértékegység.

1. Egy autó a teljes út első ötödét 50 km/h-s sebességgel tette meg.

Mekkora (átlagos) sebességgel kell haladnia a vezetőnek a hátralévő szakaszon, ha azt szeretné, hogy az átlagsebessége az egész útra vonatkoztatva 80 km/h legyen? (8 pont)

Megoldás:

A teljes utat jelöljük s -sel!

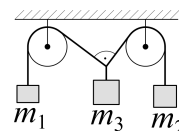
$$t_1 = \frac{\frac{s}{5}}{v_1} = \frac{s}{5v_1}$$

$$t_0 = \frac{s}{v_{\text{átl}}}$$

$$v_2 = \frac{\frac{4s}{5}}{t_0 - t_1} = \frac{\frac{4s}{5}}{\frac{s}{v_{\text{átl}}} - \frac{s}{5v_1}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{v_{\text{átl}}} - \frac{1}{5v_1}} = 94,1 \text{ km/h}.$$

(2+2+4 pont)

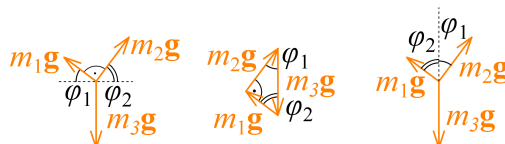
2. Amikor az ábrán látható testek egyensúlyban vannak, a két „ferde” kötél közepén derékszöget zár be. A csigák súrlódásmentesek, a kötelek könnyűek.



Mekkora szöget zárnak be a „ferde” kötelek a vízszintessel, ha $m_1 = 6 \text{ kg}$ és $m_2 = 8 \text{ kg}$? (8 pont)

Megoldás I.:

Ha felrajzoljuk az erőábrát (bal szélső ábra), és a zárt vektorháromszöget (középső ábra), akkor azonnal látszik, hogy a három erő egy derékszögű háromszög három oldala.



A vektorháromszögből már közvetlenül adódnak a szögek:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{m_1 g}{m_2 g} = \arctg \frac{m_1}{m_2} = 36,9^\circ, \quad \varphi_2 = 90^\circ - \varphi_1 = 53,1^\circ.$$

Megoldás II.:

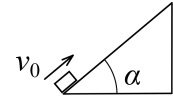
Ha ezt nem veszi észre, akkor felbonthatja az erőket (jobb szélső ábra). Mivel φ_1 és φ_2 pótszögek, $\sin \varphi_1 = \cos \varphi_2$ és $\cos \varphi_1 = \sin \varphi_2$. Vízszintes erőegyensúly:

$$m_1 g \sin \varphi_2 = m_2 g \sin \varphi_1 = m_2 g \cos \varphi_2 ,$$

amiből

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \varphi_2 = 53,1^\circ \text{ és } \varphi_1 = 90^\circ - \varphi_2 = 36,9^\circ . \quad (8 \text{ pont})$$

3. Egy elegendően hosszú lejtő aljáról $v_0 = 3 \text{ m/s}$ sebességgel indítunk el egy $m = 1,15 \text{ kg}$ tömegű testet a lejtőn felfelé. $\alpha = 40^\circ$, a test és a lejtő között a csúszási és a tapadási súrlódási együttható is $\mu = 0,2$.



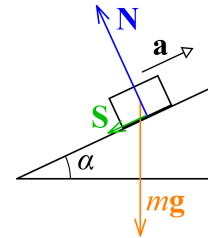
Mekkora s utat tesz meg a test a lejtőn felfelé a megállásig?

Megállás után elindul-e lefelé? Ha igen, mekkora v sebességgel érkezik vissza a lejtő aljára? (21 pont)

Megoldás:

Az ábra alapján az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \alpha \\ ma_1 &= -mg \sin \alpha - S \\ S &= \mu N , \end{aligned}$$



amiből a (negatív) gyorsulás:

$$a_1 = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) = -7,81 \text{ m/s}^2 .$$

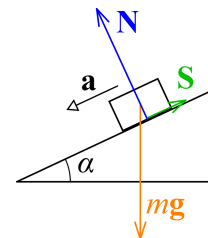
A megállásig eltelt idő és a megtett út

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{v_0}{|a_1|} = 0,384 \text{ s} \\ s &= v_0 t_1 + \frac{a_1}{2} t_1^2 = \frac{|a_1|}{2} t_1^2 = \frac{v_0^2}{2|a_1|} = 0,576 \text{ m} . \end{aligned}$$

$\mu < \operatorname{tg} \alpha = 0,84$, ezért nem tapad meg, visszacsúszik.

Az ábra alapján az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \alpha \\ ma_2 &= mg \sin \alpha - S \\ S &= \mu N , \end{aligned}$$



amiből a gyorsulás:

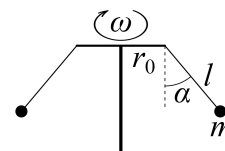
$$a_2 = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = 4,80 \text{ m/s}^2 .$$

A leérkezésig eltelt idő és a sebesség a leérkezéskor

$$\begin{aligned} s &= \frac{a_2}{2} t_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{2s}{a_2}} = 0,490 \text{ s} \\ v &= a_2 t_2 = \sqrt{2sa_2} = v_0 \sqrt{\frac{a_2}{|a_1|}} = 2,35 \text{ m/s} . \end{aligned}$$

(5+5+1+5+5=21 pont)

4. Egy körhintán a hinták $l = 8\text{ m}$ hosszú kötelei egy $r_0 = 4\text{ m}$ sugarú forgó keretre vannak rögzítve. Amikor a körhinta egyenletes sebességgel forog, a hinták kötele a függőlegessel $\alpha = 40^\circ$ -os szöget zár be.



Mekkora a körhinta fordulatszáma?

Mekkora erő feszíti a hinta kötelét, ha a körhintában ülő ember tömege $m = 60\text{ kg}$?

(13 pont)

Megoldás:

A feladat megoldása teljesen megegyezik a gyakorlaton megmutatott megoldással. Az erők felbontása után az egyenletrendszer:

$$K \cos \alpha = mg$$

$$K \sin \alpha = ma_{\text{cp}} = m(r_0 + l \sin \alpha) \omega^2,$$

a körpálya sugara $r = r_0 + l \sin \alpha = 9,14\text{ m}$. A szögsebesség:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan \alpha}{r_0 + l \sin \alpha}} = 0,949\text{ s}^{-1},$$

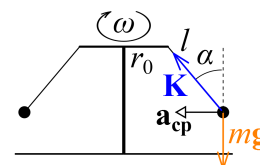
amiből a fordulatszám:

$$n = 60 \frac{\omega}{2\pi} = 9,06\text{ fordulat/perc}.$$

A kötélerő

$$K = \frac{mg}{\cos \alpha} = 768\text{ N}.$$

(10+3 pont)



Bevezető fizika villamosmérnököknek – 2. pótzárthelyi (2015. december 15.)

Név:

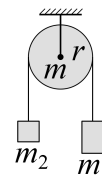
Neptun-kód:

Kurzus:

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésére. Csak írószer és számológép használható. A feladatok megoldását a lap túloldalán, és ha szükséges, a teremfelügyelőtől kérhető új lapokon folytassa. Az utóbbi esetben a nevét és Neptun-kódját minden lapra írja fel!

Feladatok:

1. Az ábrán látható jól csapágyazott, tömör, $m = 2 \text{ kg}$ tömegű, $r = 10 \text{ cm}$ sugarú henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$. A kötélen könnyű, nyújtathatatlanság és nem csúszik meg a hengeren, $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$. A testeket az ábrán látható nyugalmi helyzetben elengedjük.



Rajzolja be a hengerre ható erőket!
Mekkora a henger szöggyorsulása?

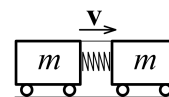
(13 pont)

2. Egy α hajlásszögű lejtőn v kezdősebességgel meglökünk egy m tömegű téglatestet a lejtővel párhuzamosan *lefelé*. A test a súrlódás miatt s út megtétele után megáll.

Mekkora a test és a lejtő közötti μ csúszási súrlódási együttható?
Mennyi munkát végez a súrlódási erő?

(10 pont)

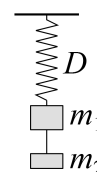
3. Két egyforma, $m = 0,3 \text{ kg}$ tömegű kocsi között egy $y = 3 \text{ cm}$ -rel összenyomott, $D = 100 \text{ N/m}$ rugóállandójú, könnyű rugó van. A kocsik cérnával össze vannak kötve, és $v = 0,2 \text{ m/s}$ közös sebességgel gurulnak. A kocsikat összekötő cérnát elégetjük, így a kocsik szétlökődnek.



Mekkora lesz a kocsik sebessége a szétlökődés után?

(15 pont)

4. Egy $D = 100 \text{ N/m}$ rugóállandójú rugóra egy $m_1 = 0,1 \text{ kg}$ tömegű test van rögzítve, amire fonállal egy $m_2 = 0,05 \text{ kg}$ tömegű test van akasztva. A rendszer egyensúlyban van. Ebben a helyzetben elégetjük a fonalat. $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Mekkora a kialakuló rezgés amplitúdója?

Mekkora a rezgés periódusideje?

Írja fel és ábrázolja grafikonon a test gyorsulását az idő függvényében!

(12 pont)

Megoldások:

Bevezető fizika villamosmérnököknek – 2. pótzárthelyi (2015. december 15.)
Megoldás és pontozás

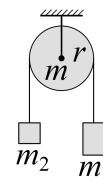
Pontozási szempontok:

Az egyes részpontoszámokat jelölöm. Természetesen, ha valaki másképp (de helyesen) oldja meg a feladatot, akkor is jár a teljes pontszám. Ha másképp, de csak részben jól dolgozik, akkor arányosan kevesebb pont jár.

Olyan (amúgy helyes) összefüggésekért, aminek nincs konkrét köze a megoldáshoz, nem jár pont. Ha valaki csak a kezdő képletig jut, de azt nem rendezni, nem csinál vele semmit, azért csak egész minimális pont jár.

Ha minden képlet jó, de a numerikus számolást rontja el valahol, azért vonjunk le 10-20%-ot! (Ha teljesen irreális eredmény jön ki, nagyságrendileg rossz, akkor többet is.) Hasonlóan, ha rossz a mértékegység.

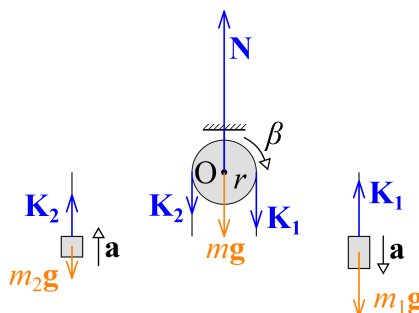
1. Az ábrán látható jól csapágyazott, tömör, $m = 2 \text{ kg}$ tömegű, $r = 10 \text{ cm}$ sugarú henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$. A kötel könnyű, nyújt-hatatlan és nem csúszik meg a hengeren, $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$. A testeket az ábrán látható nyugalmi helyzetben elengedjük.



Rajzolja be a hengerre ható erőket!
 Mekkora a henger szöggyorsulása?

(13 pont)

Megoldás:



Csak a középső ábra elvárás. Fontos, hogy $K_1 > K_2$ és a kötélerek nem egyeznek meg a testekre ható nehézségi erővel (nem m_1g és m_2g a két kötél erő).

Az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - K_1 \\ m_2 a &= K_2 - m_2 g \\ (N &= mg + K_1 + K_2) \\ \frac{1}{2} m r^2 \beta &= (K_1 - K_2) r \\ \beta r &= a, \end{aligned}$$

amit megoldva:

$$\beta = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} \cdot \frac{g}{r} = 16,35 \text{ s}^{-2}.$$

(3+10 pont)

2. Egy α hajlásszögű lejtőn v kezdősebességgel meglökünk egy m tömegű téglatestet a lejtővel párhuzamosan *lefelé*. A test a súrlódás miatt s út megtétele után megáll.

Mekkora a test és a lejtő közötti μ csúszási súrlódási együttható?

Mennyi munkát végez a súrlódási erő?

(10 pont)

Megoldás I.:

Munkatétellel:

$$\begin{aligned} W_S &= \Delta E = \Delta E_m + \Delta E_h \\ W_S &= -Ss = -\mu Ns = -\mu mgs \cos \alpha \\ \Delta E_m &= -\frac{1}{2}mv^2 \\ \Delta E_h &= -mgs \sin \alpha, \end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned} -\mu mgs \cos \alpha &= -\frac{1}{2}mv^2 - mgs \sin \alpha \\ \mu &= \frac{v^2}{2sg \cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

A súrlódási erő (*negatív!*) munkája megegyezik a mechanikai energia megváltozásával:

$$W_S = \Delta E_m + \Delta E_h = -\frac{1}{2}mv^2 - mgs \sin \alpha = -\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgs \sin \alpha\right),$$

vagy a munka definíciója alapján:

$$W_S = -Ss = -\mu mgs \cos \alpha = -\left(\frac{v^2}{2sg \cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha\right) mgs \cos \alpha = -\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgs \sin \alpha\right).$$

Megoldás II.:

Dinamikából a szokásos módon:

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha),$$

a kinematika alapján:

$$a = -\frac{v^2}{2s},$$

majd a kettőt egyenlővé téve:

$$g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = -\frac{v^2}{2s},$$

amiből

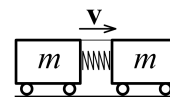
$$\mu = \frac{v^2}{2sg \cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha.$$

A súrlódási munka:

$$W_S = -Ss = -\mu mgs \cos \alpha - \left(\frac{v^2}{2sg \cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha\right) mgs \cos \alpha = -\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgs \sin \alpha\right).$$

(6+4 pont)

3. Két egyforma, $m = 0,3 \text{ kg}$ tömegű kocsi között egy $y = 3 \text{ cm}$ -rel összenyomott, $D = 100 \text{ N/m}$ rugóállandójú, könnyű rugó van. A kocsik cérnával össze vannak kötve, és $v = 0,2 \text{ m/s}$ közös sebességgel gurulnak. A kocsikat összekötő cérnát elégetjük, így a kocsik szétlökődnek.



Mekkora lesz a kocsik sebessége a szétlökődés után?

(15 pont)

Megoldás I.:

Vizsgáljuk a mozgást a kocsik közös v sebességével együtt mozgó koordináta-rendszerben!

Ekkor kezdetben a kocsik állnak, majd – az azonos tömegek miatt – szimmetrikusan szétlökődnek. Az energiamegmaradás alapján:

$$\frac{1}{2}Dy^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}mu'^2,$$

amiből

$$u' = \pm y \sqrt{\frac{D}{2m}} = \pm 0,387 \text{ m/s}.$$

A földről nézve a kocsik sebessége:

$$u_1 = v - u' = -0,187 \text{ m/s}$$

$$u_2 = v + u' = 0,587 \text{ m/s}.$$

Megoldás II.:

Földhöz rögzített koordináta-rendszerben.

Ekkor fel kell írni az energia- és impulzusmegmaradást:

$$\frac{1}{2}Dy^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2$$

$$2mv = mu_1 + mu_2.$$

A második egyenletből u_2 -t kifejezve:

$$u_2 = 2v - u_1,$$

és az elsőbe beírva:

$$Dy^2 + 2mv^2 = mu_1^2 + m(2v - u_1)^2,$$

majd rendezve:

$$u_1^2 - 2vu_1 + v^2 - \frac{D}{2m}y^2 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:

$$u_1 = v \pm y \sqrt{\frac{D}{2m}}.$$

Ebből a kisebb a helyes megoldás u_1 -re (és a nagyobb a szimmetria miatt éppen u_2 -re):

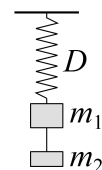
$$u_1 = v - y \sqrt{\frac{D}{2m}} = -0,187 \text{ m/s},$$

amiből

$$u_2 = 2v - u_1 = v + y \sqrt{\frac{D}{2m}} = 0,587 \text{ m/s}.$$

(15 pont)

4. Egy $D = 100 \text{ N/m}$ rugóállandójú rugóra egy $m_1 = 0,1 \text{ kg}$ tömegű test van rögzítve, amire fonállal egy $m_2 = 0,05 \text{ kg}$ tömegű test van akasztva. A rendszer egyensúlyban van. Ebben a helyzetben elégetjük a fonalat. $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Mekkora a kialakuló rezgés amplitúdója?

Mekkora a rezgés periódusideje?

Írja fel és ábrázolja grafikonon a test gyorsulását az idő függvényében!

(12 pont)

Megoldás:

A rezgés akörül az egyensúlyi helyzet körül fog történni, amikor már csak az egyik test lóg a rugón. Az egyensúlyi helyzetben a rugó megnyúlása:

$$y_0 = \frac{m_1 g}{D} = 0,01 \text{ m} = 1 \text{ cm}.$$

Kezdetben a megnyúlás

$$y' = \frac{(m_1 + m_2)g}{D} = 0,015 \text{ m} = 1,5 \text{ cm},$$

az amplitúdó a két távolság különbsége (hiszen a kezdeti állapotban a sebesség nulla, az az alsó szélső helyzet):

$$A = y' - y_0 = 0,5 \text{ cm}.$$

A körfrekvencia:

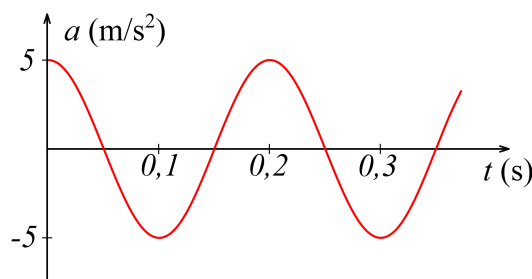
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_1}} = 31,6 \text{ s}^{-1},$$

a periódusidő:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \approx 0,2 \text{ s}.$$

A test gyorsulása az idő függvényében koszinuszos, hiszen a $t = 0$ pillanatban a test kitérése maximális. Ha a felfelé irányt vesszük pozitívnak, akkor a $t = 0$ pillanatban a gyorsulás pozitív:

$$a(t) = A\omega^2 \cos \omega t = 5 \text{ m/s}^2 \cdot \cos(31,6 \text{ s}^{-1} \cdot t).$$



Itt minden fontos: tengelyeken a mennyiségek és a mértékegységek jelölése, skálák, T és $a_{\max}$ helyes ábrázolása, a helyes kezdőfázis.

Megjegyzés: Az $a_{\max} = \frac{g}{2}$ kitalálható: a fonál elégetésekor $m_2 g$ -vel csökken a lefele ható erő, így ekkora erő kezd gyorsítani az m_1 tömegű testet. Ebből $a_{\max} = \frac{m_2 g}{m_1} = \frac{g}{2}$. Az amplitúdót ebből is meg lehet határozni $A = \frac{a_{\max}}{\omega^2}$ alapján.

(3+3+6 pont)

Bevezető fizika villamosmérnököknek – 2. pót-pót zárthelyi (2016. január 6.)

Név:

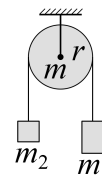
Neptun-kód:

Kurzus:

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésére. Csak írószer és számológép használható. A feladatok megoldását a lap túloldalán, és ha szükséges, a teremfelügyelőtől kérhető új lapokon folytassa. Az utóbbi esetben a nevét és Neptun-kódját minden lapra írja fel!

Feladatok:

1. Az ábrán látható jól csapágyazott, tömör, $m = 5 \text{ kg}$ tömegű, $r = 15 \text{ cm}$ sugarú henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$. A kötélt könnyű, nyújtathatatlant és nem csúszik meg a hengeren, $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$. A testeket az ábrán látható nyugalmi helyzetben elengedjük.



Rajzolja be az egyes testekre ható erőket!

Mekkora az m_1 tömegű test gyorsulása?

(13 pont)

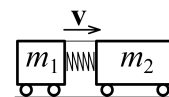
2. Egy $\alpha = 15^\circ$ -os lejtőn $v = 2,4 \text{ m/s}$ kezdősebességgel meglökünk egy $m = 0,4 \text{ kg}$ tömegű téglatestet a lejtőn felfelé. A test $s = 0,5 \text{ m}$ út megtétele után megáll.

Mekkora a test és a lejtő közt a csúszási súrlódási együttható?

A test mozgási energiájának hány százalékavész el a súrlódási munka miatt?

(10 pont)

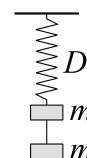
3. Egy $m_1 = 0,2 \text{ kg}$ és egy $m_2 = 0,4 \text{ kg}$ tömegű kiskocsi között egy $y = 3 \text{ cm}$ -rel összenyomott, $D = 100 \text{ N/m}$ rugóállandójú, könnyű rugó van. A kocsik cérnával össze vannak kötve, és $v = 0,2 \text{ m/s}$ közös sebességgel gurulnak. A kocsikat összekötő cérnát elégetjük, így a kocsik szétlökődnek.



Mekkora lesz a kocsik sebessége a szétlökődés után?

(15 pont)

4. Egy $D = 100 \text{ N/m}$ rugóállandójú rugóra egy $m = 0,1 \text{ kg}$ tömegű test van rögzítve, amire fonállal egy másik, ugyanakkora tömegű test van akasztva. A rendszer egyensúlyban van. Ebben a helyzetben elégetjük a fonalat. $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Mekkora a kialakuló rezgés amplitúdója?

Mekkora a rezgés frekvenciája?

Írja fel és ábrázolja grafikonon a rugóerőt az idő függvényében!

(12 pont)

Megoldások:

Bevezető fizika villamosmérnököknek – 2. pótzárthelyi (2015. december 15.)
Megoldás és pontozás

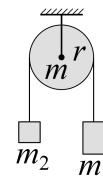
Pontozási szempontok:

Az egyes részpontoszámokat jelölöm. Természetesen, ha valaki másképp (de helyesen) oldja meg a feladatot, akkor is jár a teljes pontszám. Ha másképp, de csak részben jól dolgozik, akkor arányosan kevesebb pont jár.

Olyan (amúgy helyes) összefüggésekért, aminek nincs konkrét köze a megoldáshoz, nem jár pont. Ha valaki csak a kezdő képletig jut, de azt nem rendezni, nem csinál vele semmit, azért csak egész minimális pont jár.

Ha minden képlet jó, de a numerikus számolást rontja el valahol, azért vonjunk le 10-20%-ot! (Ha teljesen irreális eredmény jön ki, nagyságrendileg rossz, akkor többet is.) Hasonlóan, ha rossz a mértékegység.

1. Az ábrán látható jól csapágyazott, tömör, $m = 5 \text{ kg}$ tömegű, $r = 15 \text{ cm}$ sugarú henger tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$. A kötélt könnyű, nyújt-hatatlan és nem csúszik meg a hengeren, $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$. A testeket az ábrán látható nyugalmi helyzetben elengedjük.

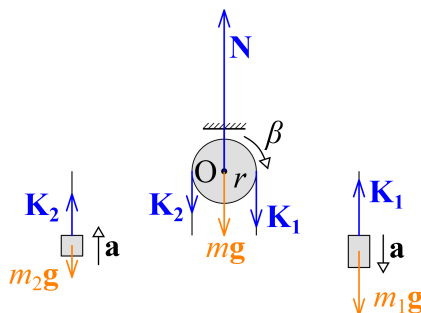


Rajzolja be az egyes testekre ható erőket!

Mekkora az m_1 tömegű test gyorsulása?

(13 pont)

Megoldás:



Fontos, hogy $K_1 > K_2$ és a kötélerők nem egyeznek meg a testekre ható nehézségi erővel (nem m_1g és m_2g a két kötélerő).

Az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - K_1 \\ m_2 a &= K_2 - m_2 g \\ (N &= m g + K_1 + K_2) \\ \frac{1}{2} m r^2 \beta &= (K_1 - K_2) r \\ \beta r &= a, \end{aligned}$$

amit megoldva:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} = 1,31 \text{ m/s}^2.$$

(3+10 pont)

2. Egy $\alpha = 15^\circ$ -os lejtőn $v = 2,4 \text{ m/s}$ kezdősebességgel meglökünk egy $m = 0,4 \text{ kg}$ tömegű téglatestet a lejtőn *felfelé*. A test $s = 0,5 \text{ m}$ út megtétele után megáll.

Mekkora a test és a lejtő közt a csúszási súrlódási együttható?

A test mozgási energiájának hány százaléka vesz el a súrlódási munka miatt? (10 pont)

A súrlódási erő (*negatív!*) munkája megegyezik a mechanikai energia megváltozásával:

$$\begin{aligned} W_S &= \Delta E = \Delta E_m + \Delta E_h \\ \Delta E_m &= -\frac{1}{2}mv^2 \\ \Delta E_h &= mgs \sin \alpha \\ W_S &= \Delta E_m + \Delta E_h = -\frac{1}{2}mv^2 + mgs \sin \alpha . \end{aligned}$$

Másrészt a súrlódási erő munkája kiszámítható a munka definíciója alapján is:

$$W_S = -Ss = -\mu Ns = -\mu mgs \cos \alpha ,$$

amiből kifejezve a súrlódási együtthatót

$$\mu = \frac{-W_S}{mgs \cos \alpha} = \frac{v^2}{2gs \cos \alpha} - \tan \alpha \approx 0,34 .$$

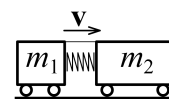
A keresett arány a (negatív) súrlódási munka -1 -szeresének (abszolút értékének) és a kezdeti mozgási energiának a hányadosa:

$$\frac{|W_S|}{E_m} = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - mgs \sin \alpha}{\frac{1}{2}mv^2} = 1 - \frac{2gs \sin \alpha}{v^2} \approx 0,56 = 56\% .$$

(A többi a helyzeti energia növelésére fordítódik. Az eredményt természetesen ebből is meg lehet kapni.)

(6+4 pont)

3. Egy $m_1 = 0,2 \text{ kg}$ és egy $m_2 = 0,4 \text{ kg}$ tömegű kiskocsi között egy $y = 3 \text{ cm}$ -rel összenyomott, $D = 100 \text{ N/m}$ rugóállandójú, könnyű rugó van. A kocsik cérnával össze vannak kötve, és $v = 0,2 \text{ m/s}$ közös sebességgel gurulnak. A kocsikat összekötő cérnát elégetjük, így a kocsik szétlökődnek.



Mekkora lesz a kocsik sebessége a szétlökődés után?

(15 pont)

Megoldás I.:

Vizsgáljuk a mozgást a kocsik közös v sebességével együtt mozgó koordináta-rendszerben!

Ekkor kezdetben a kocsik állnak, majd szétlökődnek. Az impulzus- és energiamegmaradás alapján:

$$\begin{aligned} 0 &= m_1 u'_1 + m_2 u'_2 \\ \frac{1}{2}Dy^2 &= \frac{1}{2}m_1 u'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 u'^2_2 . \end{aligned}$$

Az első egyenletből

$$u'_2 = -\frac{m_1}{m_2}u'_1,$$

amit a másodikba behelyettesítve, majd azt megoldva:

$$u'_1 = -\sqrt{\frac{Dm_2y^2}{m_1(m_1+m_2)}} = -0,548 \text{ m/s}$$

$$u'_2 = \sqrt{\frac{Dm_1y^2}{m_2(m_1+m_2)}} = 0,274 \text{ m/s}.$$

(Az előjelek abból adódnak, hogy nyilvánvalóan $u'_1 < u'_2$.)

A földről nézve a kocsik sebessége:

$$u_1 = v + u'_1 = -0,348 \text{ m/s}$$

$$u_2 = v + u'_2 = 0,474 \text{ m/s}.$$

Megoldás II.:

Földhöz rögzített koordináta-rendszerben.

Ekkor is fel kell írni az energia- és impulzusmegmaradást:

$$\frac{1}{2}Dy^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2$$

$$(m_1 + m_2)v = m_1u_1 + m_2u_2.$$

A második egyenletből u_2 -t kifejezve:

$$u_2 = \frac{(m_1 + m_2)v - m_1u_1}{m_2},$$

és az elsőbe beírva, majd azt rendezve:

$$u_1^2 - 2vu_1 + v^2 - \frac{Dm_2y^2}{m_1(m_1+m_2)} = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai:

$$u_1 = v \pm \sqrt{\frac{Dm_2y^2}{m_1(m_1+m_2)}},$$

amelyek közül a v -nél kisebb megoldás a helyes:

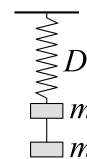
$$u_1 = v - \sqrt{\frac{Dm_2y^2}{m_1(m_1+m_2)}} = -0,348 \text{ m/s}.$$

Ebből már behelyettesítéssel:

$$u_2 = \frac{(m_1 + m_2)v - m_1u_1}{m_2} = v + \frac{m_1}{m_2}(v - u_1) = v + \sqrt{\frac{Dm_1y^2}{m_2(m_1+m_2)}} = 0,474 \text{ m/s}.$$

(15 pont)

4. Egy $D = 100 \text{ N/m}$ rugóállandójú rugóra egy $m = 0,1 \text{ kg}$ tömegű test van rögzítve, amire fonállal egy másik, ugyanakkora tömegű test van akasztva. A rendszer egyensúlyban van. Ebben a helyzetben elégetjük a fonalat. $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Mekkora a kialakuló rezgés amplitúdója?

Mekkora a rezgés frekvenciája?

Írja fel és ábrázolja grafikonon a rugóerőt az idő függvényében!

(12 pont)

Megoldás:

A rezgés akörül az egyensúlyi helyzet körül fog történni, amikor már csak az egyik test lóg a rugón. Az egyensúlyi helyzetben a rugó megnyúlása:

$$y_0 = \frac{mg}{D} = 0,01 \text{ m} = 1 \text{ cm}.$$

Kezdetben a megnyúlás

$$y' = \frac{2mg}{D} = 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm},$$

az amplitúdó a két távolság különbsége (hiszen a kezdeti állapotban a sebesség nulla):

$$A = y' - y_0 = 1 \text{ cm}.$$

A körfrekvencia, a frekvencia és a periódusidő:

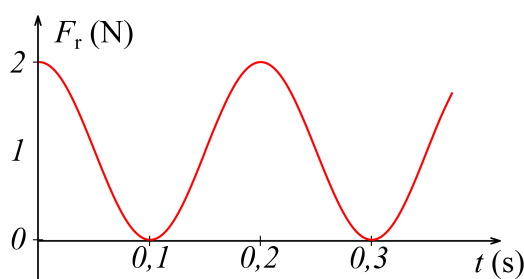
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = 31,6 \text{ s}^{-1}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} \approx 5 \text{ Hz}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \approx 0,2 \text{ s}.$$

A test kitérése az idő függvényében koszinuszosan változik az egyensúlyi helyzet körül, hiszen a $t = 0$ pillanatban a test kitérése (és a rugó megnyúlása) maximális. A rugó megnyúlása eszerint:

$$y(t) = y_0 + A \cos \omega t,$$

amiből a keresett rugóerő az idő függvényében:

$$F_r(t) = Dy(t) = Dy_0 + DA \cos \omega t = mg(1 + \cos \omega t) = (1 + \cos 31,6 \text{ s}^{-1}t) \text{ N}.$$



Itt minden fontos: tengelyeken a mennyiségek és a mértékegységek jelölése, skálák, a helyes kezdőfázis. A felső szélső állapotban a rugóerő nulla lesz.

(3+3+6 pont)

Tartalom

I.	Általános megjegyzések	1
II	A hallgatóknak kiadott feladatsorok	2
III.	Útmutató a feladatsorok tanításához	14
	1. gyakorlat – tömegpontok statikája	14
	2. gyakorlat – tömegpontok dinamikája	21
	3. gyakorlat – tömegpontok kinematikája	29
	4. gyakorlat – körmozgás	37
	5. gyakorlat – munka, energia	43
	6. gyakorlat – rezgőmozgás	51
	7. gyakorlat – ütközések	58
	8. gyakorlat – merev testek, perdület	65
	9. gyakorlat – hullámok	72
	10. gyakorlat – ideális gázok, halmazállapotok	79
IV.	Zárthelyi feladatsorok és pontozási útmutatók	86
	1. zárthelyi – szerdai csoport	86
	1. zárthelyi – pénteki csoport	90
	2. zárthelyi – szerdai csoport	94
	2. zárthelyi – pénteki csoport	99
	1. pótzárthelyi	105
	2. pótzárthelyi	109
	2. pótpót zárthelyi	114