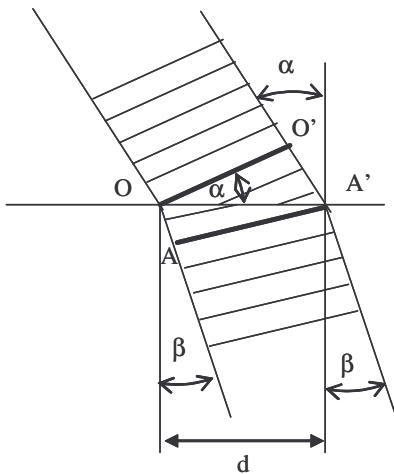


A fény fizikája

Írta: Péczeli Imre

A fénynek a biofizikában kettősen jelentős szerepe van. Az egyik a fénynek a biológiai folyamatokban való részvétele, a másik a biológiai folyamatok vizsgálatában játszott szerepe. Az újszülött számára a világból érkező első benyomás a fény, mégis a fény mibenlétének kérdése a legtöbb ember számára meglehetősen zavaros. A bennünket körülvevő világ kézzel fogható, tapintható dolgairól alkotott képünk sokkal alaposabb. Ez a megállapítás az emberiség történetében is megfigyelhető. Már az ókori görögöket is foglalkoztatta a fény mivolta és próbáltak magyarázatot adni számos jelenségre a fényvel kapcsolatban. Az ókori görögök a fényt az emberi szemből kiinduló látósugarakként értelmezték és magyarázták a látás folyamatát, amely mai elképzeléseink szerint meglehetősen primitív magyarázat de meglepő, hogy e hamis elképzelés is alkalmas volt arra, hogy Euklidesz a fényvisszaverődés törvényeit magyarázza. A középkor során, mint megannyi más tudományos területen, a fényről alkotott elképzelések sem fejlődtek. A fényről kialakított képünk a hajózás fejlődésével, a kereskedelem növekedésével, a jobb tájékozódás megteremtését biztosító optikai eszközök megjelenésével változott meg. Az optikai eszközök, a távcsövek tökéletesítése szükségessé tették, hogy a fény mibenlétét is vizsgálják. A Newton-féle elképzelés a fényt részecskékből álló sugaraknak tekintette. Piros, narancs, sárga, zöld, kék és lila fényttesteket tételezett fel, amelyek az üvegprizmában különböző sebességgel haladnak (1665). Newton a mechanikai ütközések alapján már tudta értelmezni a fényvisszaverődés törvényét, sőt a fénytörés jelenségét is, amikor is a fényrészecskékre a törő felület közelében különböző nagyságú erőket feltételezett a különböző színű fényttestekre. A fény Newton-féle korpuszkuláris leírása, érthetően a fény mechanikus értelmezését jelentette.

Már Newtonnal egyidőben Hooke és Huygens, a vízhullámokon történt megfigyeléseik alapján rámutattak, hogy a fény törésének és visszaverődésének törvényei a fényjelenség hullámként való értelmezése alapján is lehetséges. A hullámmélet szerint a fény a törő közegben lassabban halad, mint a levegőben és ez okozza a párhuzamos fénysugár megtörését.



$$O'A' = Ct$$

$$OA = C't$$

$$O'A' = d \sin \alpha$$

$$OA = d \sin \beta$$

$$\frac{O'A'}{OA} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{C}{C'}$$

1. ábra

A fény törésének magyarázata

A fénynek, mint hullámnak a véges terjedési sebességét már *Newton* korában *Olaf Römer* a Jupiter holdjainak fogyatkozásából megállapította. *Newton* nagy tekintélye ellenére a 18.-19. században mégis a fény hullámként való értelmezése került általánosan elfogadottá -elsősorban *Huygens* és *Fresnel* kísérletei és magyarázatai alapján.

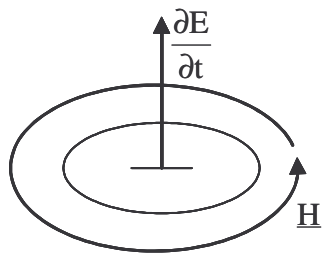
A fényhullám leírásának tekintetében a *Maxwell* egyenletek megszületése jelentette a csúcst. *Maxwell*, egyenletei alapján megjósolta az elektromágneses hullámok létét, amelyet *Hertz* kísérletileg igazolt is. A *Maxwell* egyenletek révén végül megszületett a szintézis az optika és az elektromosság között. A *Maxwell* egyenletek alapján az összes fényjelenség, a törés, a fényreflexió, a fényelhajlás, a geometriai optika, mind értelmezhető volt. A kortársak fő problémája az elektromágneses hullámokkal kapcsolatban az volt, hogy milyen „anyagban” is terjednek ezek a hullámok. Egy a világmindenséget kitöltő közeget, az étert képzeltek el, mint e hullámok hordozóját.

A fény kettős jellege

A fény hullámtermészete

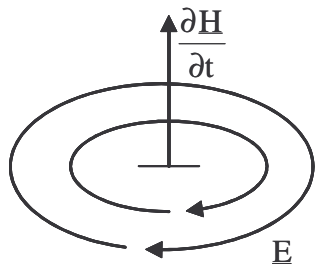
A 19. századforduló a fény hullámtermészetének teljes győzelmével végződött.

Az elmélet csúcsa az elektromágneses teret leíró négy *Maxwell egyenlet*, amelynek alakja szabad térben:



$$\text{rot } \underline{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\text{div } \underline{H} = 0 \quad (2)$$



$$\text{rot } \underline{E} = -\mu_0 \frac{\partial \underline{H}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\text{div } \underline{E} = 0 \quad (4)$$

Az elektromágneses sugárzást -így a fényt is-, szabad térben két vektortér, az elektromos és mágneses térerősség jellemzi: $\underline{E}(\underline{x}, t)$, $\underline{H}(\underline{x}, t)$. Ezen vektorok a helynek és időnek függvényei. Az ε_0 és μ_0 a vákuum dielektromos állandója, illetve mágneses permeabilitása.

Az első egyenlet rotációját képezve és a harmadik egyenletben szereplő $\text{rot } \underline{E}$ kifejezést az elsőbe helyettesítve \underline{H} -ra vonatkozó egyenletet kapunk:

$$\text{rot rot } \underline{H} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial t^2} \quad (5)$$

Kihasználva a $\text{rot rot } \underline{A} = \text{grad div } \underline{A} - \Delta \underline{A}$ vektoranalízis szerinti azonosságot, \underline{H} -ra a következő egyenlet adódik:

$$\text{grad div } \underline{H} - \Delta \underline{H} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{H}}{\partial t^2} \quad (6)$$

Figyelembe véve a második egyenletet azaz $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ -t, így a mágneses térerősségre adódó egyenlet:

$$\Delta \mathbf{H} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

Teljesen hasonló egyenletet kapunk az elektromos térerősség vektorra is, ha a (3) egyenlet rotációját vesszük és az első egyenlet segítségével a \mathbf{H} küsszöböljük ki:

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

Mindkét egyenlet azonos alakú vektoregyenlet, amelynek minden komponense azonos alakú. f -el jelölve egy tetszőleges térerősség komponensét az egyenletek

$$\Delta f - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

alakúak, ahol f már skalár. Ez az egyenlet, a fizika más területein

is jól ismert, úgynevezett *hullámeqyenlet*. Az egyenlet egy változás térbeli továbbterjedését írja le. Ha $f(t)$ történetesen az elektromos vagy mágneses térerősség egy komponensének időbeli változását leíró függvény, a $\mathbf{x} = 0$ helyen,

akkor az $f\left(t - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{c}\right)$ függvény a $t_0 = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{c}$ idővel később a \mathbf{x} helyen ugyanazt a

változást fogja leírni. Ez egyszerű behelyettesítéssel igazolható. Ez a függvény egy az \mathbf{n} egységvektor pozitív irányába haladó hullámot ír le. Hasonlóan belátható, hogy az

$f\left(t + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right)$ függvény pedig a negatív \mathbf{n} irányába haladó hullámot reprezentál. A

függvény argumentumában szereplő \mathbf{n} egy egységvektor, c pedig a hatás terjedési sebessége. Egyszerűen belátható, hogy fenti típusú függvények megoldásai az előbb

kapott hullámeqyenletnek. Jelöljük ugyanis $t \pm \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}$ argumentumot φ -vel.

$$\varphi = t \pm \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}.$$

A közvetett differenciálás szabályát használva:

$$\Delta f = \frac{d^2 f}{d\varphi^2} \frac{\mathbf{n}^2}{c^2} \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{d\varphi^2}$$

Ezeket beírva a hullámeqyenletbe: $\frac{d^2 f}{d\varphi^2} \left(\frac{\mathbf{n}^2}{c^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \right) = 0$

Ez tetszőleges f esetén akkor állhat fent minden φ -re, (minden t és \underline{x} -re), ha

$$\frac{\underline{n}^2}{c^2} - \varepsilon_0 \mu_0 = 0$$

Mivel \underline{n} egységvektor volt, így $\underline{n}^2 = 1$, vagyis

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (9)$$

Ez az úgynevezett *Maxwell reláció*, amely kapcsolatot teremt az ε_0 és μ_0 (szabad teret jellemző két állandó), valamint az elektromágneses hatás terjedési sebessége között. Az $f\left(t \pm \frac{\underline{n} \cdot \underline{x}}{c}\right)$ megoldásokat síkhullám megoldásnak nevezzük. Ugyanis az

f függvény egy adott időpillanatban egy sík mentén azonos értékeket vesz fel.

Ugyanis a $\varphi = t \pm \frac{\underline{n} \cdot \underline{x}}{c}$ argumentum adott értékénél f állandó. Ha t is rögzített,

akkor $t - \varphi = \pm \frac{\underline{n} \cdot \underline{x}}{c} =$ állandó kifejezés egy sík egyenlete, amelynek normál vektora

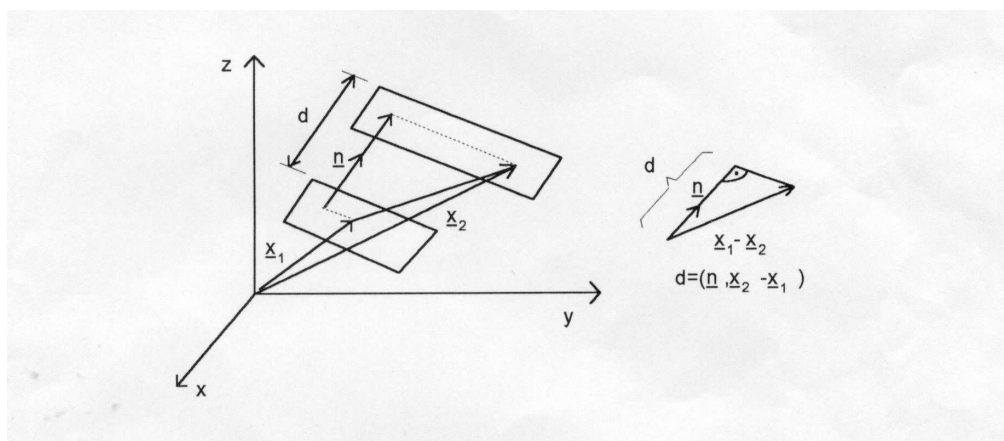
éppen \underline{n} .

Tekintsük például a pozitív \underline{n} irányba terjedő hullámot.

Ha valamely t_1 időben és \underline{x}_1 helyen az f függvény az $f\left(t_1 - \frac{\underline{x}_1 \cdot \underline{n}}{c}\right)$ értéket

veszi fel, akkor az f függvény ugyanezt az értéket fogja felvenni valamely t_2 későbbi időpontban, valamely \underline{x}_2 helyen. Ez akkor lehetséges, ha a két argumentum azonos

$$t_1 - \frac{\underline{x}_1 \cdot \underline{n}}{c} = t_2 - \frac{\underline{x}_2 \cdot \underline{n}}{c} \quad (10)$$



2. ábra

A 2. ábráról nyilvánvaló, hogy t_1 időponthoz tartozó és t_2 két sík távolsága $(x_2 - x_1) \underline{n} = d$ és ezt az utat a hatás éppen $t_2 - t_1$ idő alatt teszi meg, vagyis (10) egyenletből $c(t_2 - t_1) = (x_2 - x_1) \underline{n} = d$ azaz c valóban a hatás terjedési sebességét jelenti.

Ha az f függvény a φ argumentum szerint periodikus is, akkor lehet értelmezni egy legkisebb távolságot két sík között, ahol ugyanazon időben az f függvény azonos értéket vesz fel.

$f(\varphi) = f(\varphi + T)$ ahol T a periódus (idő) vagy $f(\varphi - T) = f(\varphi)$. Azonos időpontban de különböző helyen az $f\left(t - \frac{\underline{n} x}{c}\right) = f\left(t - \frac{\underline{n} x'}{c}\right)$ egyenlőség akkor állhat fenn, ha $t - \frac{\underline{n} x'}{c} = t - \frac{\underline{n} x}{c} - T$, amelyből $\underline{n} (x' - x) = c \cdot T$.

Az egyenlet bal oldalán álló kifejezés azon két legközelebbi sík távolságát jelenti, amely két síkban az f függvény azonos időpontban azonos értéket vesz fel. Ezt a legkisebb távolságot hullámhossznak nevezzük, azaz $\lambda = c \cdot T$ (11)

Hasonlóan a T periódusidő reciprokához is hozzárendelhető egy ismétlési frekvencia

$$\frac{1}{T} = \nu \quad (12)$$

$$\text{Ebből a } \lambda = \frac{c}{\nu} \quad \text{összefüggés adódik} \quad (13)$$

Különösen fontos eset, amikor $f(\varphi)$ függvény harmonikus, azaz f alakja

$$f = f_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \left(t \pm \frac{\underline{n} x}{c}\right) + \delta\right) \quad (14a)$$

vagy $\frac{2\pi}{T} = \omega$ helyettesítéssel

$$f = f_0 \cos\left(\omega \left(t \pm \frac{\underline{n} x}{c}\right) + \delta\right) \quad (14b)$$

ahol $\omega = 2\pi\nu$ a hullám körfrekvenciája.

Mivel f a térerősség egy komponensét reprezentálta, ezért az elektromos és mágneses térerősségeket leíró harmonikus függvények alakja:

$$E_i = E_{0i} \cos\left(\omega\left(t \pm \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) + \delta_i\right) \quad (15a)$$

$$H_i = H_{0i} \cos\left(\omega\left(t \pm \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right) + \delta_i\right) \quad (15b)$$

ahol $i=1, 2, 3$ jelenti az egyes komponenseket.

Az argumentumban szereplő δ_i fázisok az egyes komponensek fázisait jelentik a $t=0$ és $\mathbf{x}=0$ „pontban”.

A harmonikus hullámok esetén szokásos írásmód még a

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \delta) \quad (16a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t \pm \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \delta) \quad (16b)$$

ahol a $\frac{\omega \mathbf{n}}{c} = 2\pi \frac{\nu}{c} \mathbf{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n} = \mathbf{k}$ jelölést vezetjük be, az úgynevezett *hullámszámvektort*. Nagyságát tekintve a hullámszámvektor $\frac{2\pi}{\lambda}$ -val egyenlő, iránya pedig az \mathbf{n} irányával azonos.

Az általános síkhullám megoldások tehát $\mathbf{E}\left(t \pm \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right)$ és $\mathbf{H}\left(t \pm \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c}\right)$ alakban vehetők fel. Mint megmutattuk, ezek a megoldások, kielégítik a *Maxwell egyenletekből* származtatott hulláme egyenleteket, de nyilván ki kell hogy elégítsék a kiinduló egyenleteket is.

Az általános síkhullám megoldásokat beírva a $\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, illetve a

$\text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ egyenletekbe, a közvetett deriválás szabályát használva φ

argumentum szerint a következő egyenlethez jutunk:

$$\pm \frac{\mathbf{n}}{c} \times \frac{d\mathbf{E}}{d\varphi} = -\mu_0 \frac{d\mathbf{H}}{d\varphi} \quad (17a)$$

$$\pm \frac{\mathbf{n}}{c} \times \frac{d\mathbf{H}}{d\varphi} = \varepsilon_0 \frac{d\mathbf{E}}{d\varphi} \quad (17b)$$

Integrálva φ szerint az előbbi egyenleteket az

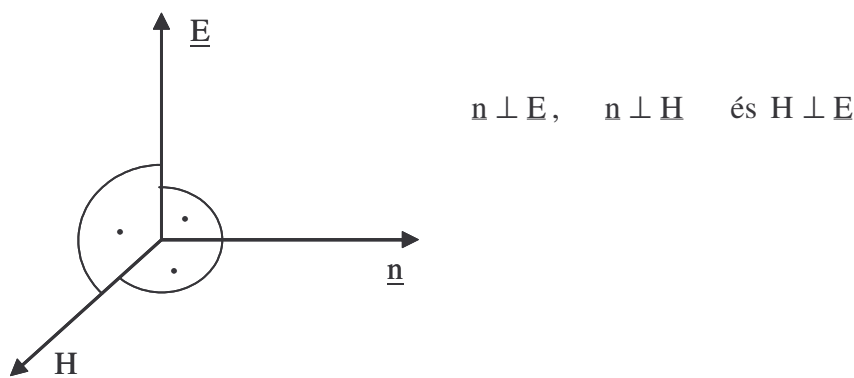
$$\pm \mathbf{n} \times \mathbf{E} = -\mu_0 c \mathbf{H} \quad (18a)$$

$$\pm \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 c \mathbf{E} \quad (18b)$$

egyenletekre jutunk.

A (18a) egyenletből látszik, hogy \mathbf{H} merőleges mind \mathbf{n} -re, mind \mathbf{E} -re. A (18b) egyenlet pedig azt fejezi ki, hogy \mathbf{E} is merőleges \mathbf{n} -re.

Ez a két egyenlet fejezi ki az általános síkhullám megoldások *tranzverzáltságát*. Ez az állítás természetesen a speciális periodikus és harmonikus síkhullámokra is igaz. A pozitív \mathbf{n} irányban haladó síkhullámra vonatkozó vektorábrát a 3. ábrán láthatjuk, ekkor a „-” előjel veendő az egyenletekben. Vagyis az \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{n} vektorok egy jobbsodrású vektorhármast alkotnak.



3. ábra

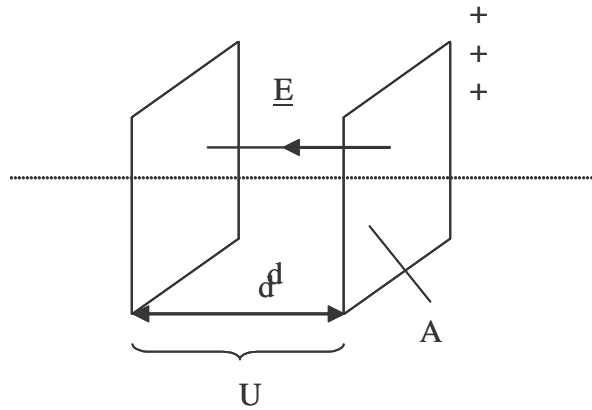
Mint ismert, az elektromos vagy mágneses térben mozgó töltésre a tér erőt fejt ki. A mozgó töltésen a tér munkát végez, így a tér rendelkezik munkavégző képességgel, azaz az elektromágneses térnek energiája van.

Sztatikus térben ismert, hogy egy kondenzátorban tárolt energia

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 \quad (19)$$

ahol C a kondenzátor kapacitása, U pedig a kondenzátoron lévő feszültség. Ha a kondenzátor fegyverzetei „ A ” felületűek és a távolságuk „ d ”, akkor a kapacitás

$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ alakban írható. A 4. ábra a kondenzátorban kialakuló elektromos teret reprezentálja.



4. ábra

Kondenzátorban kialakuló elektromos tér

Írjuk be a (19) egyenletbe a C kifejezését: $W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} U^2$

Osszuk el az egyenlet jobb oldalát d -vel és szorozzuk is meg, akkor kapjuk

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 A \cdot d \left(\frac{U}{d} \right)^2$$

Figyelembe véve, hogy az elektromos térerősség nagysága

$|\underline{E}| = \frac{U}{d}$, így az energia kifejezés: $W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 A \cdot d E^2$.

Tekintettel arra, hogy $A \cdot d = \Delta V$ az elektromos tér által elfoglalt térfogat, így a kondenzátorban tárolt térenergia:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot \Delta V \quad (20)$$

vagy bevezetve az energiasűrűséget

$$W_e = \frac{W_e}{\Delta V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (21)$$

Általánosítva ezt az összefüggést nem csak a statikus esetre, ekkor az elektromágneses tér elektromos energia járuléka egy tetszés szerinti térfogatra

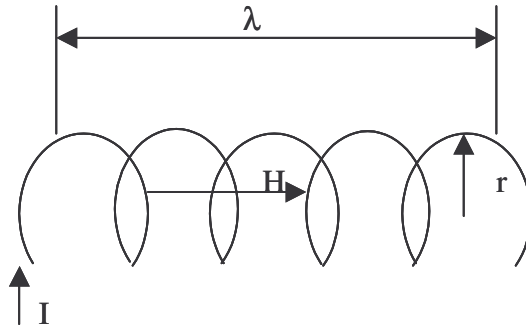
$$W_e = \int_v \frac{\epsilon_0^2 E^2}{2} dV \quad (22)$$

Hasonlóan statikus mágneses tér esetében egy *szolenoidban* tárolt energia

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 \quad (23)$$

Ahol L indukciós együttható, I pedig a szolenoid árama.

A szolenoid esetében $L = \mu_0 \frac{N^2 r^2 \pi}{\lambda}$



5. ábra

Mivel a szolenoid belsejében a mágneses térerősség nagysága

$$H = \frac{NI}{\lambda} \quad \text{így} \quad W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 r^2 \pi}{\lambda} I^2$$

" λ "-el osztva és szorozva az egyenlet jobb oldalát

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 r^2 \pi}{\lambda^2} \lambda \cdot I^2$$

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{NI}{\lambda} \frac{NI}{\lambda} \lambda \cdot r^2 \pi$$

A H térerősség kifejezést behelyettesítve:

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \lambda \cdot r^2 \pi$$

Figyelembe véve, hogy a szolenoid térfogata $\Delta V = \lambda \cdot r^2 \pi$, így $W_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \cdot \Delta V$

Az ehhez tartozó mágneses energiasűrűség

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$$

Ennek általánosítása révén egy tetszőleges térfogatban a mágneses energia

$$W_m = \int_v \frac{1}{2} \mu_0 H^2 dV \quad (24)$$

Ha elektromos és mágneses tér egyidejűleg van jelen, -ez a helyzet az elektromágneses tér esetén-, akkor a tér teljes energiája:

$$W = \frac{1}{2} \int_v (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) dV \quad (25)$$

Az előbbi kifejezés megadja egy adott térfogatban lévő sugárzási energia nagyságát. E térfogat határain azonban lehetséges az energiának a ki- és beáramlása is, vagyis értelmezni lehet egy olyan energia áramsűrűséget, amely megadja a sugárzási térben az energia áramlás irányát és nagyságát. Azon célból, hogy az energia áramsűrűség kifejezését meghatározzuk, szorozzuk meg az (1) *Maxwell egyenletet* skalárisan \underline{E} -vel, a (3) egyenletet \underline{H} -val és vonjuk ki ez utóbbit az elsőből.

$$\underline{E} \operatorname{rot} \underline{H} - \underline{H} \operatorname{rot} \underline{E} = \epsilon_0 \underline{E} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \mu_0 \underline{H} \frac{\partial \underline{H}}{\partial t}$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\underline{E} \operatorname{rot} \underline{H} - \underline{H} \operatorname{rot} \underline{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial H^2}{\partial t}$$

Felhasználva a vektoranalízisből jól ismert $\underline{E} \operatorname{rot} \underline{H} - \underline{H} \operatorname{rot} \underline{E} = -\operatorname{div} (\underline{E} \times \underline{H})$

összefüggést, végül kapjuk:

$$-\operatorname{div}(\underline{E} \times \underline{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right)$$

Integrálva ezt az egyenletet egy véges térfogatra:

$$-\int_v \operatorname{div}(\underline{E} \times \underline{H}) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) dV$$

Alkalmazzuk a *Gauss tételt* az egyenlet bal oldalára!

$$\left(\int_v \operatorname{div} \underline{A} dV = \oint_F \underline{A} d\mathbf{f} \right)$$

$$-\oint_F \underline{E} \times \underline{H} d\mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) dV$$

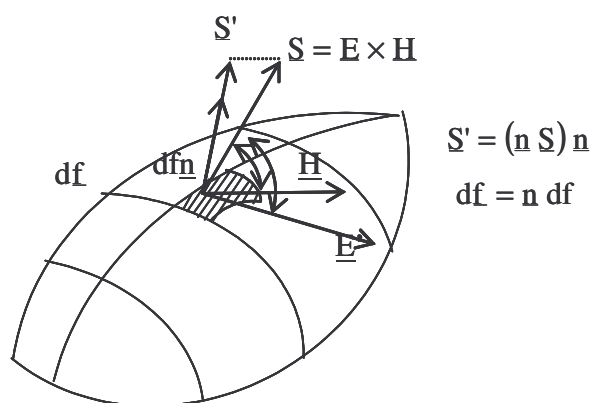
A fenti egyenlet jobb oldalán a térfogatban lévő elektromágneses energia kifejezésének időegységre eső változása található, bal oldalán ugyanezen térfogatot körülvevő felületre vett $\underline{E} \times \underline{H}$ vektor integrálja látható. megszorozva az egyenletet -1 -el, kapjuk:

$$\oint_F \underline{E} \times \underline{H} d\mathbf{f} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_v (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) dV \quad (26)$$

Az így kapott egyenlet azt fejezi ki, hogy a térfogatban lévő elektromágneses energia időegység alatti csökkenésének okát az $\underline{E} \times \underline{H}$ vektornak a térfogatot körülvevő felületre vett integrálja okozza. Vagyis az $\underline{E} \times \underline{H}$ vektort az energia áramsűrűséggel kell azonosítanunk, amelyet \underline{S} -el jelölünk,

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} \quad (27)$$

Az \underline{S} vektor tehát az energia áramsűrűség, vagy *Poynting vektor*. A *Poynting vektor* nagysága tehát megadja az egységnyi idő alatt egységnyi felületen áramló energia nagyságát a \underline{S} vektor irányával azonos normálvektorú felületelemre.



6. ábra

A fenti összefüggések homogén és izotróp dielektrikumban ugyanúgy érvényesek, csupán az ϵ_0 -t és μ_0 -t kell az adott dielektrikumra jellemző ϵ és μ értékeivel helyettesíteni.

$$\oint \underline{E} \times \underline{H} df = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon \underline{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \underline{H}^2 \right) dV \quad (28)$$

A teljes elektromágneses energia tehát egy elektromos és egy mágneses részből tevődik össze. Síkhullámok esetében egyszerűen megmutatható, hogy a két járulék egyenlő egymással. Ugyanis a (18a) egyenletben a μ_0 helyébe μ behelyettesítve bármely izotróp és homogén esetben

$$\underline{H} = \frac{\underline{n} \times \underline{E}}{\mu c'}, \quad \text{ahol } c' \text{ a közegbeli sebesség,} \quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

Így

$$W_m = \frac{1}{2} \mu \frac{(\underline{n} \times \underline{E})^2}{\mu^2 c'^2} = \frac{1}{2} \mu \frac{\underline{E}^2 \epsilon \mu}{\mu^2}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = W_e \quad (29)$$

Vagyis a mágneses energiasűrűség megegyezik az elektromos energiasűrűséggel. Ebben az esetben az \underline{S} Poynting vektor alakja

$$\underline{S} = n E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = n \varepsilon E^2 \cdot c' = n (W_e + W_m) \cdot c'$$

Elektromágneses sugárzás interferenciája

Az elektromágneses jelenségeket leíró 1-4 Maxwell egyenletek a térkomponensek lineáris függvényei. Ez a linearitás azt jelenti, hogy ha \underline{E}_1 , \underline{H}_1 és \underline{E}_2 , \underline{H}_2 térerősség párok kielégítik a Maxwell egyenletet, akkor az $\underline{E}_1 + \underline{E}_2$, $\underline{H}_1 + \underline{H}_2$ térerősség párok is kielégítik azt. Az elektromágneses jelenségek e tulajdonságát a szuperpozíció elvének nevezzük. Ez a tulajdonság abban nyilvánul meg, hogy két vagy több egymást keresztező elektromágneses hullám nem befolyásolja egymást, a hullámok a keresztezést követően változatlanul haladnak tovább.

Tekintsük valamely \underline{E}_1 , és \underline{E}_2 megoldásait a Maxwell egyenletnek, melyeket az előbb mondottak szerint ezen két megoldás összege is kielégíti

$$\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 \quad (30)$$

Mint láttuk, az elektromos energiasűrűség homogén és izotróp közegben

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

Behelyettesítve az eredő teret ezen kifejezésbe a

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon E_1^2 + \frac{1}{2} \varepsilon E_2^2 + \varepsilon E_1 E_2 \quad (31) !$$

kifejezéshez jutunk.

Az elektromos energiasűrűség tehát ebben a szuperponált állapotban nem egyszerűen a két energiasűrűség összege, hanem fellép az energiasűrűség kifejezésében egy harmadik tag is, amelyet interferencia tagnak nevezünk. E tag hatása történetesen olyan is lehet, hogy a tér bizonyos pontjaiban az energiasűrűség 0 értéket vesz fel.

Két monokromatikus síkhullám esetén számoljuk ki az eredő energiasűrűséget.

Legyen a két elektromos vektor alakja

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega t - k_1 x) \quad (32)$$

$$E_2 = E_{20} \cos(\omega t - k_2 x - \delta)$$

Ekkor az energiasűrűség kifejezése:

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon \{E_{10}^2 \cos^2(\omega t - k_1 x) + E_{20}^2 \cos^2(\omega t - k_2 x - \delta) + 2E_{10} E_{20} \cos(\omega t - k_1 x) \cos(\omega t - k_2 x - \delta)\}$$

Trigonometrikus átalakítást végezve

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon \left\{ E_{10}^2 \frac{1 + \cos 2(\omega t - k_1 x)}{2} + E_{20}^2 \frac{1 + \cos 2(\omega t - k_2 x - \delta)}{2} + E_{10} E_{20} \cos(2\omega t - (k_1 + k_2)x - \delta) + E_{10} E_{20} \cos((k_2 - k_1)x + \delta) \right\}$$

Mivel a fény esetében az ω nagyságrendje 10^{15} Hz, ezért az egyenletben szereplő időbeli gyors változásokat sem a szem, sem a detektorok nem képesek követni. Az érzékelhető energiasűrűség W_e időátlaga lesz. Képezve a W_e időátlagát, kapjuk:

$$\bar{W}_e = \frac{1}{4} \varepsilon E_{10}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon E_{20}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon E_{10} E_{20} \cos((k_2 - k_1)x - \delta) \quad (33)$$

Itt jegyezzük meg, hogy harmonikus síkhullámok esetén a térerősségek valós alakjai helyett szokás használni a komplex írásmódot is.

$$E = E_0 e^{i(\omega t - k x)} \quad H = H_0 e^{i(\omega t - k x)}$$

Ebben az esetben az energiasűrűségek időátlagolt kifejezéseit egyszerűen úgy kapjuk

meg, hogy az $\frac{1}{2} \varepsilon$ -t, és $\frac{1}{2} \mu$ -t megszorozzuk $\frac{1}{2} |E|^2$ illetve $\frac{1}{2} |H|^2$ -el, ekkor egyből

az időátlagolt értékeket kapjuk:

$$\bar{W}_e = \frac{1}{4} \varepsilon E_0^2 \quad \bar{W}_m = \frac{1}{4} \mu H_0^2 \quad \text{illetve}$$

$$\bar{S} = n \varepsilon (\bar{W}_e + \bar{W}_m) = n \varepsilon \frac{|E|^2}{2} C'$$

Két hullám interferenciájánál is hasonló eredményre jutunk. Például az elektromos tér esetében

$$E_1 = E_{10}e^{i(\alpha - k_1 x)} \quad \text{és} \quad E_2 = E_{20}e^{i(\alpha - k_2 x) - \delta}$$

ekkor

$$E_1 = E_{10}e^{i(\alpha - k_1 x)} + E_{20}e^{i(\alpha - k_2 x) - \delta}$$

$$\overline{W}_e = \frac{1}{4} \varepsilon |E|^2 = \frac{1}{4} \varepsilon (E_{10}e^{i(\alpha - k_1 x)} + E_{20}e^{i(\alpha - k_2 x) - \delta}) \quad (\text{c.c.})$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon E_{10}^2 + \frac{1}{4} \varepsilon E_{20}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon E_{10} E_{20} \cos\{(k_2 - k_1)x + \delta\}$$

A kapott kifejezés, mint látható, azonos (33) alattival. Vizsgáljuk meg a kapott eredményt. Látható, hogy az interferencia tag abban az esetben eltűnik, ha $E_{10} \perp E_{20}$ -ra. Ekkor a két nyaláb energiasűrűsége egyszerűen összeadódik. Tegyük fel, hogy $E_{10} \parallel E_{20}$. Ekkor a koszinusz függvény argumentuma fogja meghatározni, hogy a tér mely részein lesz kisebb, illetve nagyobb az energiasűrűség, mint a két nyaláb energiasűrűségeinek összege. Abban az esetben, amikor $\cos((k_2 - k_1)x + \delta)$ értéke $+1$, akkor ezeken a helyeken az energiasűrűségnek maximuma van, míg ott, ahol -1 értéket vesz fel, ott minimumra csökken.

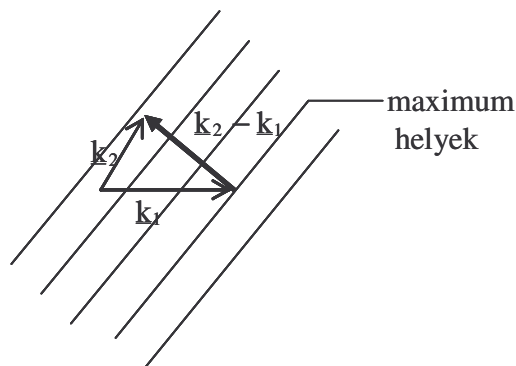
$$(k_2 - k_1)x + \delta = 2n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (34.a.)$$

esetben az energiasűrűségnek maximuma van,

$$(k_2 - k_1)x + \delta = (2n + 1)\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (34.b.)$$

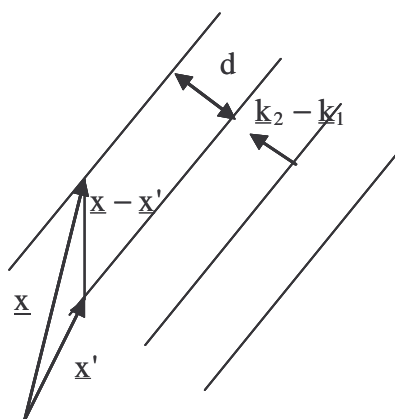
esetben az energiasűrűség minimális.

A (34.a.) és (34.b.) egyenletek mindegyike egy-egy $k_2 - k_1$ irányba mutató normálvektorú síksereget ír le (ls. 7. ábra).



7. ábra

Két szomszédos sík távolsága a 8. ábra szerint számítható ki



8. ábra

$$\frac{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1}{|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1|} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = d \quad (35)$$

Két szomszédos sík esetén felírva a (34.a.) egyenletet

$$(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x} + \delta = 2(n+1)\pi$$

$$(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{x}' + \delta = 2n\pi$$

A két egyenletet kivonva egymásból $(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 2\pi$

Ezt beírva a (35) egyenletbe

$$d = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1|}$$

Mivel \mathbf{k}_2 és \mathbf{k}_1 hullámszám vektorok nagyságra nézve azonosak, -hiszen azonos frekvenciájú hullámról van szó-, így $\mathbf{k}_2 = n_2 \mathbf{k}$ és $\mathbf{k}_1 = n_1 \mathbf{k}$ alakban írhatók, ahol n_2 és n_1 terjedési egységvektorok és

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ így} \quad d = \frac{\lambda}{|n_2 - n_1|}$$

Az $|n_2 - n_1|$ pedig a koszinusz tétel segítségével kifejezve:

$$|n_2 - n_1|^2 = n_2^2 + n_1^2 - 2n_1 \cdot n_2$$

Legyen a két hullámszám vektor által bezárt szög α ,

Akkor

$$|\mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_1| = \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

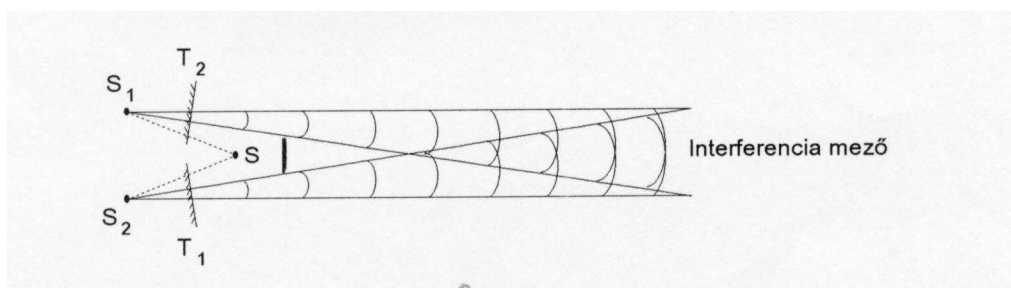
vagyis

$$d = \frac{\lambda}{\sqrt{2(1 - \cos \alpha)}} = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

A síkok távolsága tehát a hullámszám vektorok által bezárt szögtől függ, α csökkentésével ritkulnak a síkok, míg nagy szögeknél besűrűsödnek.

Ha speciálisan $\underline{E}_1 = \underline{E}_2$, akkor a maximum helyeken az energiasűrűség a négyszerese azon értékeknek, mint ha csak az egyik nyaláb lenne jelen. A minimum helyek esetében az energiasűrűség eltűnik, vagyis a hullámok jelen vannak, de az energiák eltűnnek.

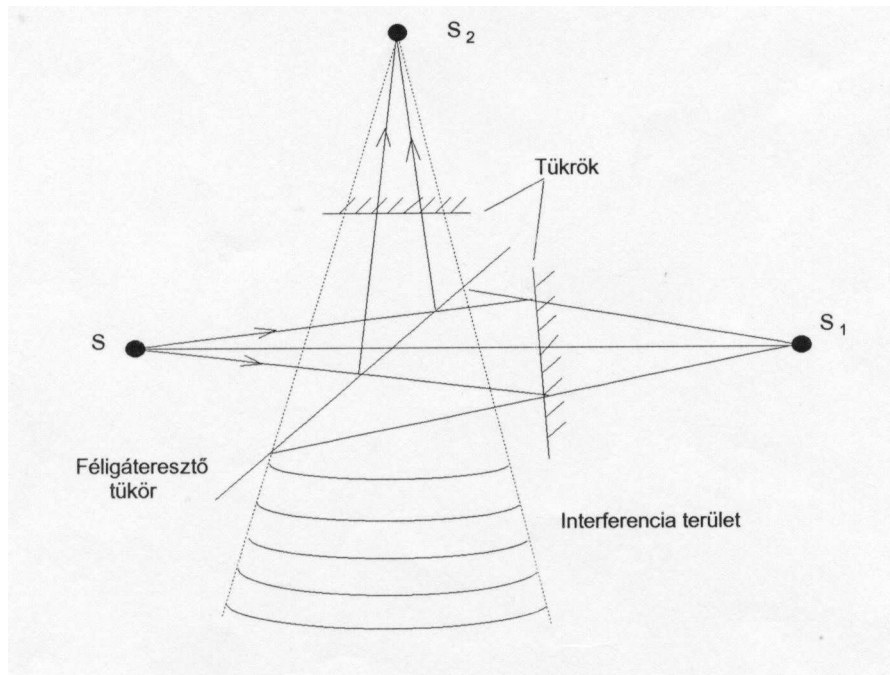
Az interferencia tárgyalása során nem vizsgáltuk azt, hogy hogyan hoztuk létre a két interferáló hullámot. Ugyanis, ha a két hullám két független fényforrásból származik, akkor nem jön létre látható interferencia (konstruktív interferencia). Ez annak a következménye, hogy a két forrásból származó hullámok fázisai rendszertelenül változnak, így az egyenletben szereplő δ fázis tag időben véletlenszerűen változik. Ezen okból az interferencia kísérletek során egy fényforrásból származó hullámokat használnak és hozzák létre a megfigyelhető interferenciát. Ennek leggyakrabban használt módja, hogy a fényforrást optikai módszerrel megkettőzik. Egyik megoldást mutatja a 9. ábra, ahol két síktükör segítségével valósítjuk meg a két interferenciára képes fényforrást.



9. ábra

Fényforrás megkettőzése két tükörrel

Egy másik lehetséges megoldást mutat az ún. *Michelson-féle interferométer*, amely féligáteresztő tükörrel és teli tükrökkel kettőzi meg a forrást.



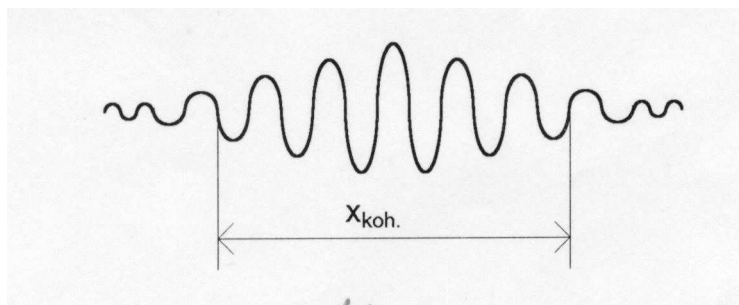
10. ábra

Michelson-féle interferometrikus elrendezés

Az előző, 9. ábrán szereplő megoldást hullámfront osztásos módszernek nevezzük, mivel ebben az esetben az eredeti forrás más-más irányban haladó hullámzónáit használja a fényforrás megkettőzésére. A *Michelson-féle* felállítás pedig ugyanazon irányban haladó hullámrészt oszt ketté, ilyenkor amplitúdó osztásról beszélünk.

A koherencia

Megfigyelhető, hogy az interferencia kísérletekben ha a két látszólagos forrás közül az egyiknek a távolsága az interferencia mezőtől lényegesen nagyobb, mint a másiké, akkor a konstruktív interferencia megszűnik. Ennek oka abban keresendő, hogy a fényforrások fénykibocsátási mechanizmusa véges időtartamú. Ez azt eredményezi, hogy a hullámok véges térbeli hosszal bírnak.



11. ábra

A koherencia-hosszhoz hozzárendelhető egy τ koherencia-idő a $x_{\text{koh}} = c \cdot \tau$ összefüggés alapján, ahol c a fénysebesség. A τ koherencia-idő pedig a kibocsátott sugárzás spektrális szélességével hozható kapcsolatba.

A fénykibocsátás véges voltát legegyszerűbben úgy modellezhetjük, hogy az időben periodikus elektromos teret nem folytonosnak tételezzük fel.

Legyen

$$E(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E_0 e^{-\gamma/2 \cdot t} e^{i(\omega_0 t)} & t > 0 \end{cases} \text{ alakú.} \quad (35)$$

Ennek a térerősségnek a spektrális amplitúdó eloszlását a kifejezés *Fourier transzformáltja* adja.

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{ahol} \quad E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt$$

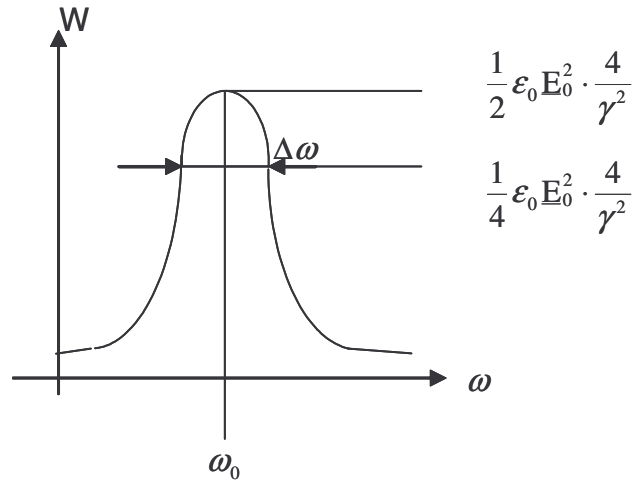
Behelyettesítve az $E(t)$ kifejezést $E(\omega)$ -ra a következő adódik:

$$E(\omega) = E_0 \frac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0 - \omega)} \quad (36)$$

A térerősség ezen frekvenciájú komponensének járuléka az energiasűrűséghez

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 |\mathbf{E}(\omega)|^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \frac{1}{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega_0 - \omega)^2} \quad (37)$$

A (37) kifejezés egy úgynevezett *Lorentz görbe*, amelynek alakját a 12. ábra mutatja.



12. ábra

Ezt a kifejezést a sugárforrás *spektrális energia sűrűségének* nevezzük.

Vizsgáljuk meg, hogy a spektrális energiasűrűség maximális értéke hol van és milyen ω' értéknél csökken a felére. A függvény maximuma ω_0 -nál van és a maximum értéke

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

A félérték szélességet, az ω' -t meghatározó egyenlet:

$$\frac{1}{4} \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + (\omega_0 - \omega')^2}$$

amelyből egyszerűsítés után $\gamma = 2(\omega_0 - \omega') = \Delta\omega$ adódik. A $\Delta\omega$ mennyiséget *vonalszélességnek*, vagy *spektrális félérték szélességnek* nevezzük. Tehát a γ mennyiség megegyezik a vonalszélességgel. Határozzuk meg, hogy a teljes elektromágneses energiasűrűség milyen idő elteltével csökken e^2 -ed részére. Mivel

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2 e^{-\tau} \quad \text{vagy} \quad W_e = W_{e0} e^{-\tau} \quad \tau\text{-vel jelezve ezt az időt,}$$

$$\frac{W_{e0}}{e^2} = W_{e0} e^{-\gamma\tau}$$

Így egyszerűsítés és logaritmálás után

$$\gamma \cdot \tau = \frac{1}{2} \quad (38)$$

adódik, azaz

$$\Delta\omega\tau = \frac{1}{2} \quad (39)$$

τ éppen a hullámvonulat időtartamának tekinthető, így a koherencia hossza a (39) egyenletből kapjuk:

$$x_{\text{koh.}} = \frac{c}{2\Delta\omega} \quad (40)$$

Vagyis a koherencia-hossz annál nagyobb, minél keskenyebb a vonal. A koherencia-hossz a hullámhosszal is kifejezhető a $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ összefüggés segítségével, ugyanis

$$\frac{\Delta\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda^2} |\Delta\lambda|$$

így,
$$x_{\text{koh.}} = \frac{\lambda_0^2}{4\pi \Delta\lambda} \quad (41)$$

A közönséges fényforrások esetén (izzólámpa szűrővel, gázkisülési csövek) a hullámvonulatok hossza néhány *mm*-től, *cm*-ig terjedő nagyságrendbe esik, ezért az interferencia csak akkor figyelhető meg, ha az adott fényforrásra jellemző koherencia hosszánál kisebb útkülönbséggel egyesítjük a nyalábokat. A 60-as évektől kifejlesztett új fényforrások, a lézerek tulajdonságai ezen a téren rendkívüliek, ugyanis igen kis sávszélességű sugárzást bocsátanak ki, így akár *több kilométeres* koherencia-hossz is biztosítható.

Ha hullámfront osztással hozzuk létre az interferenciát, akkor ha a hullámfront részek nagyon távol vannak egymástól, szintén megszűnhet a látható interferencia. Ennek oka abban van, hogy a két hullámfrontrész független. Ezt röviden úgy szokás kifejezni, hogy a hullámok térben nem koherensek. Itt is lehet definiálni egy úgynevezett térbeli koherencia hosszt, amelyen belül a kiinduló hullámok interferenciára képesek. Ez a jelenség a fényforrás méretével és a független elemi kibocsátási aktusokkal szintén magyarázható. Például a Nap, mint fényforrás esetében

a Földön legfeljebb 2 méter az a távolság, amely pontokból származó két hullám interferenciára képes.

Az interferencia jelenséget számos mérési eljárásban használják. Az optika területén például az optikai felületek nagy pontosságú mérésének egyik legelterjedtebb eszköze. Az érintésmentes elmozdulásmérő eljárások is interferométereket használnak. A mérések pontossága az alkalmazott hullámhossznál is kisebb, így *tized- és század mikronos* elmozdulások is mérhetők. A lézeres interferométerek egy csoportja, az anemométerek, a gázok és folyadékok áramlási képeinek érintésmentes mérését teszik lehetővé.

Ha az interferométerekben nemcsak két, hanem több nyaláb hozza létre az interferenciát, akkor *többsugaras interferométerekről* beszélünk. Ezek közül a legismertebb a *Fabry-Perot-féle interferométer*, amely a nagyfelbontású spektroszkópia nélkülözhetetlen eszköze. Az interferencia-szűrők is a többsugaras interferencia elvén működnek egyes dielektrikum felületeken létrejövő reflexiók fázisainak megfelelő kialakításával.

A fény polarizációja

Tekintsük a *Maxwell-féle egyenletek* elektromos vektorának egy síkhullám megoldását:

$$\mathbf{E} \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c} \right)$$

Mivel fenti megoldás eleget kell, hogy tegyen a $\text{div } \mathbf{E} = 0$ egyenletnek, így a

$t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c} = \varphi$ közbenső változó bevezetésével, a közvetett differenciálás szabályai

szerint:

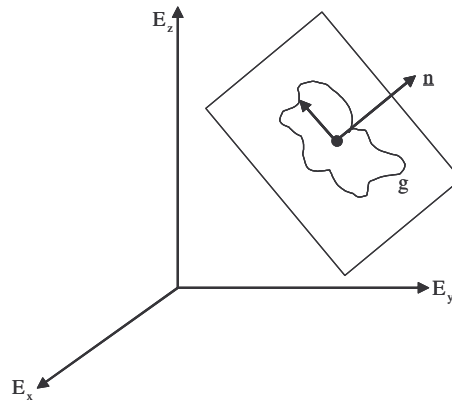
$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{dE_x}{d\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{dE_y}{d\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{dE_z}{d\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

viszont $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-n_x}{c}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-n_y}{c}$ és $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{-n_z}{c}$

behelyettesítésével a divergencia kifejezése

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \mathbf{n} \frac{d\mathbf{E}}{d\varphi} = 0 \quad (42)$$

Mivel \mathbf{n} egy állandó egységvektor, így a (42) egyenletnek φ szerinti integrálása az $E_x E_y E_z$ koordináta rendszerben egy síkot ad, ugyanis a (42)-ből $\mathbf{n} \mathbf{E} = \text{állandó}$, ($=0$, mert $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}$ síkhullám esetén) sík egyenletét kapjuk. Ez azt fejezi ki, hogy a vektor végpontja az $E_x E_y E_z$ koordináta rendszerben egy az \mathbf{n} terjedési irányra merőleges síkban van.



13. ábra

Harmonikus síkhullámok esetén ezek a pályák egyszerű sík görbék. Válasszuk úgy a koordináta rendszert, hogy a terjedési irány a z tengely irányába mutasson. Ekkor a sík, amelyben a térerősség vektor végpontja mozog, az xy sík lesz. Ebben a koordináta rendszerben az elektromos hullám a következő alakú:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0} \cos(\omega t - kz) \\ E_y &= E_{y0} \cos(\omega t - kz + \delta) \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

A $\varphi = \omega t - kz$ jelölést bevezetve a φ kiküszöbölhető az egyenletekből.

$$\frac{E_x}{E_{x0}} = \cos \varphi \quad \frac{E_y}{E_{y0}} = \cos \varphi \cos \delta - \sin \varphi \sin \delta$$

A $\cos \varphi$ behelyettesítésével a második egyenletből kapjuk:

$$\frac{E_y}{E_{y0}} - \cos \delta \frac{E_x}{E_{x0}} = -\sin \varphi \sin \delta \quad (44)$$

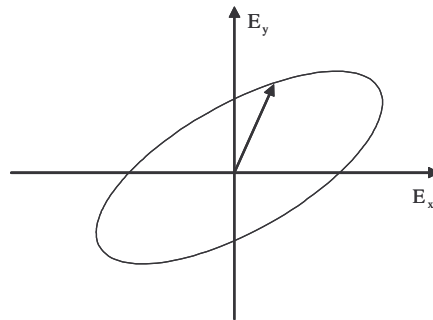
A (44) egyenlet négyzetét képezve a következő egyenletre jutunk:

$$\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}}\cos\delta + \cos^2\delta\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 = \sin^2\delta$$

A $\cos\varphi$ -vel kifejezve a jobb oldalon levő $\sin^2\delta$ -t, a rendezés után kapjuk:

$$\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}}\cos\delta + \left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 = \sin^2\delta \quad (45)$$

A (45) egyenlet egy általános helyzetű ellipszis az $E_x E_y$ síkban.



14. ábra

Ekkor azt mondjuk, hogy a síkhullám *elliptikusan polarizált*. Attól függően, hogy terjedési iránnyal szemben szemlélve a térerősség vektor végpontját, az jobbra, vagy balra forog, jobbra, vagy balra elliptikusan polarizált nyalábról beszélünk.

Ha a fáziskülönbség az E_x és E_y között $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ahol $n = 0 \pm 1 \pm 2 \dots$

akkor $\cos\delta = 0$ és $\sin^2\delta = 1$ miatt a (45) egyenlet a

$$\frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} = 1 \quad (46)$$

alakot vesz fel. Ebben az esetben az E_{x0} és E_{y0} megegyezik az ellipszis féltengelyeivel és azok iránya a koordináta tengelyek irányába mutat.

Ha E_{x0} és E_{y0} amplitúdók egyenlők, akkor egy kör egyenletéhez jutunk. Ekkor *cirkulárisan polarizált* hullámot kapunk. Ebben az esetben is megkülönböztethetünk jobbra és balra *cirkulárisan polarizált* hullámot. Ha $\cos\delta = \pm 1$, akkor az ellipszis egy egyenessé fajul.

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}} \pm \frac{E_y}{E_{y0}} \right)^2 = 0,$$

amelyből a

$$E_y = -\frac{E_{y0}}{E_{x0}} E_x \quad \text{és} \quad E_y = \frac{E_{y0}}{E_{x0}} E_x \quad (47)$$

két egyenes egyenlete adódik. Az ilyen hullámokat *lineárisan polarizáltak* nevezzük. Ekkor a térerősség végpontja egy egyenes mentén mozog.

Hasonló összefüggések vezethetők le a mágneses tér komponenseire is. Történetileg lineárisan polarizált hullámnál a terjedési irány és a \underline{H} mágneses tér által meghatározott síkot polarizációs síknak nevezzük. A polarizáció irányát pedig \underline{H} irányaként értelmezzük.

Elektromágneses síkhullámok, a fény törése és visszaverődése különböző dielektrikumok felületén

Gondoljunk el két szigetelő közeget, amelyek egy sík felületen érintkeznek egymással. Legyen a két dielektrikum izotóp és homogén.

Jelentse az 1-es dielektrikumba az elválasztó síkhoz érkező síkhullámot;

$$\underline{E}^{(0)} \left(t - \frac{\underline{n}_0 \underline{X}}{c_1} \right)$$

a felületről visszaverődőt;

$$\underline{E}^{(1)} \left(t - \frac{\underline{n}_1 \underline{X}}{c_1} \right)$$

végül a tovahaladó elektromos hullám legyen;

$$\underline{E}^{(2)} \left(t - \frac{\underline{n}_2 \underline{X}}{c_2} \right)$$

Mindhárom függvény azonos alakú, legfeljebb csak egy konstans szorzóban különböznek egymástól.

A *Maxwell egyenletek* közül a (3)-ból következik, hogy az elektromos térerősség tangenciális komponense folytonosan megy át a közeghatárokon.

$$E_{t1} = E_{t2}$$

Így

$$E_t^{(0)}\left(t - \frac{\mathbf{n}_0 \mathbf{x}}{c_1}\right) + E_t^{(1)}\left(t - \frac{\mathbf{n}_1 \mathbf{x}}{c_1}\right) = E_t^{(2)}\left(t - \frac{\mathbf{n}_2 \mathbf{x}}{c_2}\right) \quad (48)$$

ahol \underline{x} a közegeket elválasztó síkban van.

Válasszuk úgy a koordináta rendszer origóját, hogy az \underline{x} vektor a két közeget elválasztó síkban legyen. Vegyük a (48) skaláregyenlet gradiensét, szorozzuk meg az így kapott egyenletet \underline{x} -el skalárisan és integráljuk φ szerint:

$$\left(\frac{\mathbf{n}_0 \mathbf{x}}{c_1}\right) E_t^{(0)}\left(t - \frac{\mathbf{n}_0 \mathbf{x}}{c_1}\right) + \left(\frac{\mathbf{n}_1 \mathbf{x}}{c_1}\right) E_t^{(1)}\left(t - \frac{\mathbf{n}_1 \mathbf{x}}{c_1}\right) = \frac{(\mathbf{n}_2 \mathbf{x})}{c_2} E_t^{(2)}\left(t - \frac{\mathbf{n}_2 \mathbf{x}}{c_2}\right) \quad (49)$$

Beírva a (48) egyenletben szereplő $E_t^{(2)}\left(t - \frac{\mathbf{n}_2 \mathbf{x}}{c_2}\right)$ kifejezést a (49) egyenletbe

$$\left(\frac{\mathbf{n}_0 \mathbf{x}}{c_1} - \frac{\mathbf{n}_2 \mathbf{x}}{c_2}\right) E_t^{(0)}\left(t - \frac{\mathbf{n}_0 \mathbf{x}}{c_1}\right) + \left(\frac{\mathbf{n}_1 \mathbf{x}}{c_1} - \frac{\mathbf{n}_2 \mathbf{x}}{c_2}\right) E_t^{(1)}\left(t - \frac{\mathbf{n}_1 \mathbf{x}}{c_1}\right) = 0 \quad (50)$$

azaz

$$\left(\frac{\mathbf{n}_0}{c_1} - \frac{\mathbf{n}_2}{c_2}\right) \mathbf{x} E_t^{(0)}\left(t - \frac{\mathbf{n}_0 \mathbf{x}}{c_1}\right) + \left(\frac{\mathbf{n}_1}{c_1} - \frac{\mathbf{n}_2}{c_2}\right) \mathbf{x} E_t^{(1)}\left(t - \frac{\mathbf{n}_1 \mathbf{x}}{c_1}\right) = 0$$

Ez utóbbi egyenlet az $\mathbf{x} \cdot E_t^{(0)}\left(t - \frac{\mathbf{n}_0 \mathbf{x}}{c_1}\right)$ és az $\mathbf{x} \cdot E_t^{(1)}\left(t - \frac{\mathbf{n}_1 \mathbf{x}}{c_1}\right)$, vektorok lineárisan

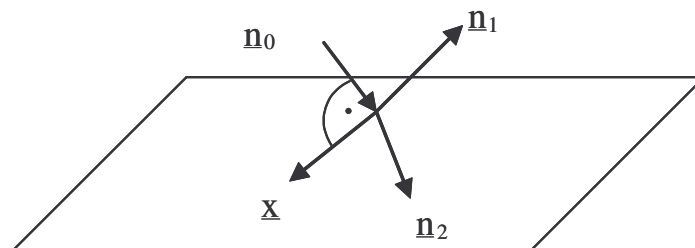
függőségét fejezi ki, ez csak akkor lehetséges minden \underline{x} -re, amely benne van az érintkező síkban, ha a két függvény nemcsak formájában, hanem teljes argumentumában is azonos, hiszen minden \underline{x} helyen a teljes síkban az (50) egyenletnek teljesülni kell. Ez csak akkor lehetséges, ha:

$$\frac{\mathbf{n}_0 \mathbf{x}}{c_1} = \frac{\mathbf{n}_1 \mathbf{x}}{c_1}$$

Ha a (48) egyenletből az $E_t^{(1)} \left(t - \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}}{c_1} \right)$ fejezzük ki, akkor $x E_t^{(0)}$ és $x E_t^{(2)}$ lineáris függőségére jutunk. Ebből következőleg a teljes argumentumnak a két függvényben egyeznie kell, azaz: $\frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{x}}{c_1} = \frac{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}}{c_2}$ vagyis

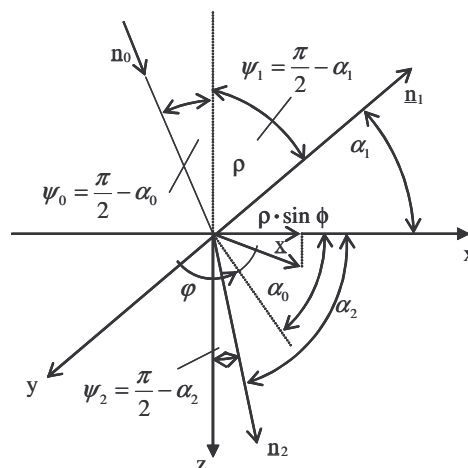
$$\frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{x}}{c_1} = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}}{c_1} = \frac{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}}{c_2} \quad (51)$$

Válasszuk \underline{x} -t úgy, hogy az legyen merőleges pl. \underline{n}_0 -ra, lásd 15. ábra.



15. ábra

Ekkor $(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{x}) = 0$, ebből és az (51) egyenletből következik, hogy erre az \underline{x} vektorra \underline{n}_1 és \underline{n}_2 is merőleges kell, hogy legyen. Vagyis a síkhullámok terjedési irányai egy síkban vannak. Legyen az érintkezési síkban az x és y tengely és mutasson a z tengely lefelé a síkra merőleges irányban



16. ábra

az xy síkban levő \underline{x} vektor hossza egy adott pontban legyen ρ , ekkor

$$\frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{x}}{c_1} = |\mathbf{n}_0| \frac{\rho}{c_1} \sin \varphi \cos \alpha_0 = \frac{\rho}{c_1} \sin \varphi \cos \alpha_0$$

$$\frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{x}}{c_1} = |\mathbf{n}_1| \frac{\rho}{c_1} \sin \varphi \cos \alpha_1 = \frac{\rho}{c_1} \sin \varphi \cos \alpha_1$$

$$\frac{\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{x}}{c_2} = |\mathbf{n}_2| \frac{\rho}{c_2} \sin \varphi \cos \alpha_2 = \frac{\rho}{c_2} \sin \varphi \cos \alpha_2$$

ahol kihasználtuk, hogy $|\mathbf{n}_0| = |\mathbf{n}_1| = |\mathbf{n}_2| = 1$ (52)

Az első két egyenletből az (51) egyenlet alapján $\cos \alpha_0 = \cos \alpha_1 \rightarrow \alpha_0 = \alpha_1$

$$\text{és} \quad \frac{\cos \alpha_0}{c_1} = \frac{\cos \alpha_2}{c_2}$$

Figyelembe véve, hogy $\psi_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha_0$, $\psi_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$ és $\psi_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2$.

Ezekből a jobban ismert $\psi_0 = \psi_1$ és a $\frac{\sin \psi_0}{c_1} = \frac{\sin \psi_2}{c_2}$ azaz

$$\frac{\sin \psi_0}{\sin \psi_2} = \frac{c_1}{c_2} \tag{53}$$

egyenletek adódnak. Ez az összefüggés kifejezhető a dielektrikumok anyagállandóival is:

$$\frac{\sin \psi_0}{\sin \psi_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} = n_{12}$$

n_{12} a 2-es anyagnak az 1-es anyagra vonatkoztatott törésmutatója. Ezt az összefüggést a *Snellius-Descartes-féle törvénynek* nevezzük.

Ha határfeltételek vizsgálatakor a térerősségeket a terjedési irányokra merőleges két komponensre bontjuk, amelyek közül az egyik komponens az \mathbf{n}_0 , \mathbf{n}_1 és \mathbf{n}_2 terjedési egységvektorokat tartalmazó síkban van, a másik erre \perp , akkor az egyes komponensek amplitúdói között kapunk összefüggéseket, amelyek leírják a megtört és reflektált hullámokat. Ezeket az összefüggéseket *Fresnel-féle formuláknak* nevezzük.

A geometriai optika, mint a hullámoptika határeset

A végtelen hullámfrontú síkhullámok a hullámfelület normálisa irányában terjednek. Így a felület normálisait fénysugaraknak tekintjük. A véges méretű hullámfrontok esetében is bizonyos esetekben használható a fénysugarak fogalma, de ekkor nem feltétlenül egyenesek, hanem görbék. A következőkben a fénysugár fogalmát használó, a gyakorlat számára egyszerűbb geometria optika alkalmazhatóságának feltételeit vizsgáljuk. Az elektromos és mágneses térerősség komponensei, amelyet most az egyszerűség kedvéért $f(xyz)$ skalár függvénnyel jelölünk, kielégítik a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - v^2(xyz)\Delta f = 0 \quad \text{egyenletet} \quad (54)$$

amely hullámegyenletben a terjedési sebesség a hely függvényében változik. Ez abban az esetben fordul elő, amikor nem homogén közegben terjed az elektromágneses hullám. Keressük ennek monokromatikus megoldását komplex formában

$$f = f_0(xyz)e^{i\omega t} \quad (55)$$

Beírva ezt az (54) egyenletbe az $f_0(xyz)$ amplitúdó függvényre a

$$\Delta f_0 + \frac{\omega^2}{v^2(xyz)} f_0 = 0 \quad (56)$$

ún. *térbeli hullámegyenletet* kapjuk.

Keressük ennek az egyenletnek a megoldását az

$$f_0 = A(xyz)e^{-ikS(xyz)} \quad (57)$$

alakban, ahol $A(xyz)$ és $S(xyz)$ lassan változó függvények. Az $S(xyz)$ függvényt a fénysugár optikai útjának nevezzük, k pedig a vákuumbeli hullámszámot jelenti $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$.

Vezessük be az

$$n(xyz) = \frac{\omega}{kv(xyz)} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{\lambda}v(xyz)} = \frac{\nu\lambda}{v(xyz)} = \frac{c}{v} \quad (58)$$

törésmutató függvényét, akkor az f_0 -ra vonatkozó egyenlet

$$\Delta f_0 + k^2 n^2(xyz) f_0 = 0 \quad (59)$$

alakú. Írjuk be az f_0 (57) szerinti előállítását az (59)-es egyenletbe, akkor azt k hatványai szerint rendezve a következőre jutunk:

$$k^2 A [n^2 - \text{grad}^2 S] - ik [2 \text{grad} A \text{grad} S + A \Delta S] + \Delta A = 0 \quad (60)$$

Mivel $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ és a fény esetében, mint ismert $\lambda \ll 1 \mu\text{m}$, ezért a (60) egyenletben a k^2 igen nagy. A (60) egyenletben a 2. és 3. tagjai az 1. mellett elhanyagolhatók, hiszen az $A(xyz)$ és $S(xyz)$ függvények második deriváltjai kicsik, mert $A(xyz)$ és $S(xyz)$ függvények lassan változnak. Így a (60) egyenlet teljesülésének feltételét ebben a közelítésben az

$$n^2(xyz) = \text{grad}^2 S \quad (61)$$

ún. *eikonál egyenlet* kielégítése biztosítja. Ez az egyenlet a geometriai optika alapegyenlete, ez megfelel $\lambda \rightarrow 0$ határátmenetnek. A (60) egyenlet 2. és 3. tagjának elhanyagolhatónak kell lenni az 1. tag mellett, amely a következő egyenlőtlenségek fennállását követeli meg.

$$\begin{aligned} kAn^2 &\gg 2 \text{grad} A \text{grad} S \\ kn^2 &\gg \Delta S \\ k^2 n^2 A &\gg \Delta A \end{aligned} \quad (62)$$

Az első egyenlőtlenségnek akkor is fent kell állni, ha a gradiensek abszolút értékét vesszük $kAn^2 \gg |2 \text{grad} S| |\text{grad} A|$, de

$|\text{grad} S| = n$ miatt $kAn \gg |\text{grad} A|$ ami $\frac{2\pi}{\lambda} = k$ helyettesítése után

$\lambda' |\text{grad} A| \ll \pi A$ ahol $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$ a közegben mért hullámhossz. A

második egyenlőtlenség vonatkozásában ha $S(x)$ síkgörbe, akkor egy adott pontban a

görbe görbülete $R_s = \frac{\frac{d^2 S}{dx^2}}{\left(1 + \frac{dS}{dx}\right)^{3/2}}$,

mivel ekkor $\frac{dS}{dx} = n$ $R_s = \frac{\frac{d^2 S}{dx^2}}{(1+n)^{3/2}}$

Figyelembe véve, hogy ekkor $\Delta S \leftrightarrow \frac{d^2 S}{dx^2}$ így $R_s = \frac{\Delta S}{(1+n)^{3/2}}$. Beírva ezt a

kifejezést a (62) második egyenlőtlenségébe

$$kn^2 \gg R_s (1+n)^{3/2} \quad k \frac{n^2}{(1+n)^{3/2}} \gg R_s$$

Mivel $k \frac{n^2}{(1+n)^{3/2}}$ legkisebb értéke $\sim \frac{1}{2}$,

így $\frac{\pi}{\lambda} \gg R_s$ azaz $\frac{1}{R_s} = \rho_s \gg \frac{\lambda}{\pi}$, ahol ρ_s az S görbületi sugara.

A harmadik egyenlőtlenség a $A(xyz)$ amplitúdó függvény görbületi sugarával fejezhető ki.

$$\frac{2\pi\rho_A}{\lambda'} \gg \frac{\lambda'}{2\pi A}$$

Végül, hogy az elhajlási jelenségek ne domináljanak, a hullámfront átmérőjének sokkal nagyobbak kell lennie, mint a hullámhossz.

$$D \gg \lambda'$$

Tehát a geometriai optika alkalmazhatóságának feltételei a következők:

1. Az amplitúdó változása szorozva a hullámhosszal kisebb, mint maga az amplitúdó.
2. A hullám felületi görbületi sugara sokkal nagyobb a hullámhossznál.
3. Az amplitúdó felület görbületi sugarának és a hullámhossznak viszonya sokkal nagyobb a hullámhossz és amplitúdó viszonyánál.
4. A hullámhossz lineáris mérete sokkal nagyobb, mint a hullámhossz.

Ezek a feltételek nem érvényesek a fény -és árnyék határán, -mert ott az amplitúdó ugrásszerűen változik-, ugyanígy fényforrások és fókuszpontok közelében. A (61) egyenlet más alakban is írható

$$\underline{e}(xyz) = \text{grad } S \quad (62)$$

ahol \underline{e} a $\text{grad } S$ irányába mutató egységvektor, ugyanis a (62)-es egyenlet négyzetét véve éppen a (61) egyenletre jutunk.

Vegyük mindkét oldal egy tetszőleges zárt görbére való vonalintegrálját!

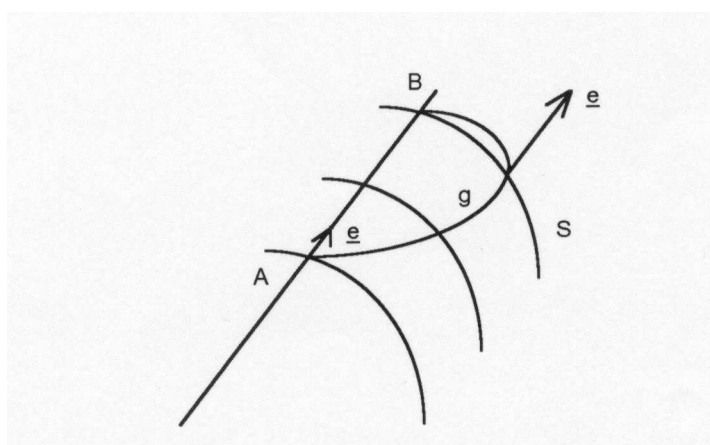
$$\oint \underline{n} ds = \oint \text{grad } S d \underline{s} \quad (63)$$

A (63) egyenlet jobb oldala bármely differenciálható S -re 0 -t ad.

$$\text{Így } \oint \underline{n}(xyz) d \underline{s} = 0 \quad (64)$$

Válasszuk úgy a zárt görbét, hogy a görbe érintője legyen azonos \underline{e} irányával a zárt görbe egy szakaszán, vagyis egyezzen meg a fénysugár irányával, a másik részen pedig tetszőleges. lásd 17. ábra

$$(e^{ikx} \rightarrow \text{grad}(kx) = k)$$



17. ábra

Ekkor írhatjuk

$$0 = \oint \underline{n}(xyz) d \underline{s} = \int_A^B \underline{n}(xyz) d \underline{s} + \int_B^A \underline{n} ds \quad (65)$$

fényúton g-úton

Ebből kapjuk

$$\int_A^B \underline{n}(xyz) d \underline{s} = \int_B^A \underline{n} ds \quad (66)$$

fényúton g-úton

Mivel

$$\int_A^B \underline{n} ds < \int_A^B \underline{n} \cdot d \underline{s}$$

így a fényútra vett integrál az minimális. $\int_{\text{fényútra}} \underline{n} ds = \text{minimális.}$

Az $n = \frac{c}{v}$ alapján ez más formában is megfogalmazható:

$$c \int \frac{ds}{v} = \text{minimális} \quad \text{vagy} \quad t = \int_{\text{fényút}} \frac{ds}{v(\text{xyz})} = \text{minimális} \quad (67)$$

(mivel c állandó).

Ez a *Fermat-féle elv*. Eszerint a fény két pont között úgy terjed, hogy a két pont közötti út megtételéhez szükséges idő minimális legyen.

Elektromágneses hullámok (fény) diffrakciója

A fény esetében megfigyelték, hogy ha a fényhullám valamilyen akadályba ütközik, akkor a fényjelenség az árnyékszögében is megjelenik, vagyis az akadályok hatására a fény elhajlik. *Ezt a jelenséget nevezzük diffrakciónak.*

A diffrakció leírásakor feltételezzük, hogy a közeg, amelyben az elektromágneses hullám, a fény terjed, homogén és izotróp, így a kiindulási egyenletünk bármely térerősség komponensre

$$\Delta f - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \text{alakú} \quad (68)$$

hullámegyenlet. Az egyenletben szereplő c' a közegbeli fénysebesség. Monokromatikus elhajlási jelenségek esetén a megoldás

$$f = e^{i\alpha t} \cdot \varphi(\underline{x}) \quad (69)$$

alakú. Beírva ezt a (68) hullámegyenletbe a

$$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad (70)$$

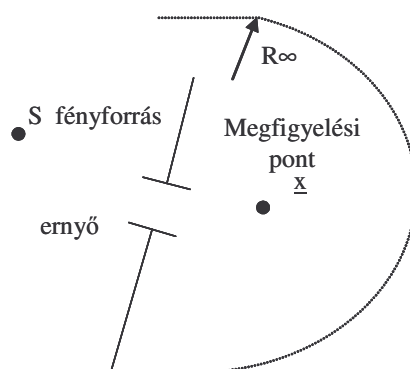
egyenletet nyerjük. Ezt az egyenletet *Helmholtz-féle amplitúdó egyenletnek is nevezik.*

Ezen egyenlet egy partikuláris megoldása $\frac{e^{ikr}}{r}$ alakú. Ennek segítségével és a *Green-féle tétel* felhasználásával a (70) egyenlet általános megoldása az ún. *Kirchhoff-féle integrállal* állítható elő.

$$\varphi(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{\text{nyílás}} \left\{ \varphi(\underline{x}') \text{grad} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \text{grad} \varphi(\underline{x}') \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \varphi(\underline{x}')}{\partial n} \right\} d\mathbf{f}_{(\underline{x}')} \quad (71)$$

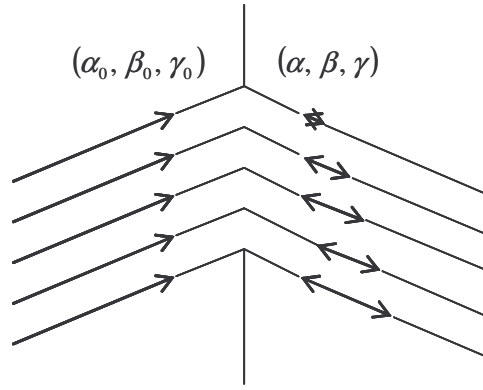
Az integrált arra az apertúrára, arra a nyílásra kell végrehajtani, amelyen az elhajlási jelenséget vizsgáljuk. A $df_{(x)}$ a nyílás felületeleme. A (71) megoldás azt fejezi ki, hogy ha a téramplitúdót és annak a deriváltját megadjuk egy nyílás pontjaiban, akkor tetszőleges a nyíláson kívüli pontban a téramplitúdó egy integrál formulával előállítható. Ez az előállítás azonban csak bizonyos egyszerűsítő feltételek mellett igaz:

1. A nyílás hatása csak a nyílás mögött érzékelhető.
2. Az \underline{x} pontot, amelyben a fényamplitúdót vizsgáljuk, körül vesszük egy felülettel, amelynek egyik része az ernyő a nyílással, a másik része pedig végtelenben van (18. ábra)
3. φ és $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ a végtelenben eltűnnek.
4. φ és $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ az ernyő nyílásánál ugyanolyan, mintha a nyílás ott sem lenne.



18. ábra

Ha a fényforrás és az \underline{x} pont az ernyőtől távol van, vagyis a nyílás karakterisztikus mérete sokkal kisebb, mint a fényforrás és a megfigyelési pont távolsága az ernyőtől, akkor a fenti integrál előállítás még egyszerűbbé válik. Ennek eleget tevő elhajlási jelenséget *Fraunhofer diffrakciónak* nevezzük. Még további egyszerűsítést jelent, ha a nyílás kontúrja egy síkgörbe. Ebben az esetben célszerű bevezetni a nyíláshoz érkező és onnan távozó, elhajló sugarak iránykoszinuszait.



19. ábra

Az $\{\alpha_0, \beta_0, \gamma_0\}$ és $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ a nyíláshoz érkező illetve diffraktált hullámok irányait megadó iránykoszinuszok. Ha a nyílást a koordináta rendszerünkben úgy helyezzük el, hogy annak síkja éppen a $z=0$ helyen legyen, akkor a nagy távolságból érkező hullám síkhullámnak tekinthető, vagyis az xy síkban az amplitúdó eloszlás:

$$\varphi(xy) = \varphi_0 e^{ik(\alpha_0 x + \beta_0 y)} \quad (72)$$

A diffraktált amplitúdó pedig

$$\varphi(pq) = \varphi_0 \frac{1}{\lambda} \iint_{\text{nyílás}} e^{-ik(px+qy)} dx dy \quad (73)$$

ahol p és q jelentése $p = \alpha - \alpha_0$ $q = \beta - \beta_0$ és λ a fény hullámhossza.

A (73) egyenlet által leírt diffrakciót szokás *távoltéri diffrakciónak* is nevezni.

Ha a megfigyelési pont, vagy a forrás a nyílás közelében van, akkor *közeltéri diffrakcióról* beszélünk, ekkor a téramplitúdó előállítása más formulával történik, amelyet közeltéri, vagy *Fresnel diffrakciónak* nevezünk. Ezeknek tárgyalására nem térünk ki, mivel ennek gyakorlati jelentősége lényegesen kisebb. A (73) egyenlet további általánosítását teszi lehetővé az ún. apertúra függvény bevezetése.

A $T(xy)$ apertúra függvényt egy nyílás esetén a

$$T(xy) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x, y \notin \text{nyílás} \\ 1 & \text{ha } x, y \in \text{nyílás} \end{cases} \quad (74)$$

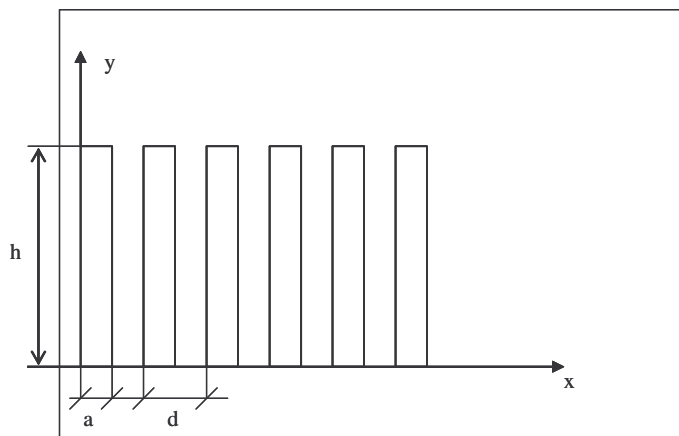
függvénykapcsolat fejezi ki. Ezzel a (73)-as egyenlet alakja a következő lesz:

$$\varphi(pq) = \frac{\varphi_0}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T(xy) e^{-ik(px+qy)} dx dy \quad (75)$$

Ha nem nyílásról van szó, hanem olyan apertúráról, ahol a bejövő fényamplitúdó az apertúra különböző pontjaiban megváltozik, akkor amplitúdó apertúráról beszélünk. Ha az apertúra a beérkező hullám fázisát változtatja meg, akkor *fázisapertúráról, vagy fázistárgyról* beszélünk. Az előző esetben $T(xy)$ függvény minden pontban 1-nél kisebb valós függvény, míg az utóbbiban egységnyi abszolútértékű komplex függvény.

Optikai rács

A (75) egyenlet egyik fontos esete az optikai rács. Ennek legegyszerűbb megvalósítása, amikor egy szabályos ismétlődő résrendszert világít meg a beérkező nyaláb lásd 20. ábra.



20. ábra. Optikai rács

Ebben az esetben a (75) egyenletet alkalmazva az r -dik nyílásra, akkor az amplitúdó, amely az r -dik réstől származik:

$$\begin{aligned} \varphi_r(pq) &= \frac{\varphi_0}{\lambda} \int_{rd}^{rd+a} \int_0^h e^{-ik(px+gy)} dx dy = \\ &= \varphi_r(pq) = \frac{\varphi_0}{\lambda} \int_{rd}^{rd+a} e^{-ikpx} dx \int_0^h e^{-ikqy} dy = \\ &= \frac{\varphi_0}{\lambda} \frac{e^{-ikprd}}{ikp} (1 - e^{-ikpa}) \frac{(1 - e^{-ikqh})}{ikq} \end{aligned}$$

A teljes amplitúdót a $\varphi_r(pq)$ amplitúdók összege adja. Ha N rés van, akkor:

$$\varphi(pq) = \sum_{r=1}^N \varphi_r(pq) = \frac{\varphi_0}{\lambda} \frac{1 - e^{-ikqh}}{ikq} \frac{1 - e^{-ikpa}}{ikp} e^{-ikpd} \frac{1 - e^{-ikpdN}}{1 - e^{-ikpd}} \quad (76)$$

A (76) egyenletben szereplő $\varphi(pq)$ eredő amplitúdó által létrehozott fényintenzitás, amelyet a szem és a detektorok érzékelnek $|\varphi(pq)|^2$ -el arányos.

$$I = |\varphi(pq)|^2 = \frac{\varphi_0^2}{\lambda^2} (ha)^2 \frac{\sin^2 \frac{kqh}{2}}{\left(\frac{kqh}{2}\right)^2} \frac{\sin^2 \frac{kpa}{2}}{\left(\frac{kpa}{2}\right)^2} \frac{\sin^2 \frac{kpdN}{2}}{\sin^2 \frac{kpd}{2}} \quad (77)$$

Mivel a rácsok megvilágításakor a nyaláb terjedési irányának nincs y irányú komponense, így $q = 0$. Ekkor a rács által létrehozott intenzitás

$$I = \frac{\varphi_0^2 a^2 h^2}{\lambda^2} \frac{\sin^2 \frac{kpa}{2}}{\left(\frac{kpa}{2}\right)^2} \frac{\sin^2 \frac{kpdN}{2}}{\sin^2 \frac{kpd}{2}} \quad (77)$$

mivel a $\frac{\sin^2 \frac{kqh}{2}}{\frac{kqh}{2}}$ a $q = 0$ -nál 1-et ad.

Az intenzitás maximumok helyét a (78) képletben szereplő két tényező határozza meg.

Valahányszor az $\frac{1}{2} kpa = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ az első tényezőnek maximuma van. A

második tényezőben valahányszor az $\frac{1}{2} kpdN = n\pi$ és egyidejűleg $\frac{1}{2} kpd = n'\pi$,

akkor a második tényezőnek van maximuma. Ez akkor következik be, amikor $n = n'N$, ahol $n' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

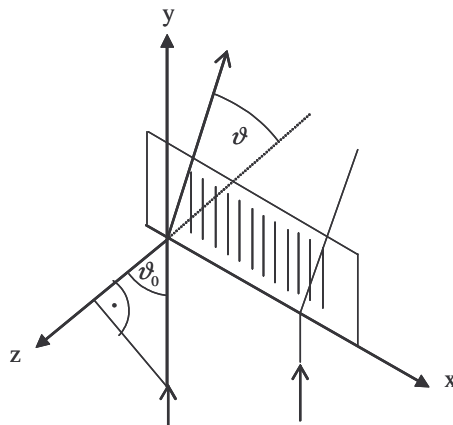
Az $\frac{1}{2} kpd = n'\pi$ egyenlet más alakban is írható, amely rácsformulaként ismert

$$\frac{\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha_0)d = n'\pi \rightarrow (\alpha - \alpha_0)d = n'\lambda \quad (79)$$

Figyelembe véve továbbá, hogy az iránykoszinuszok

$$\alpha = \sin \vartheta \quad \text{és} \quad \alpha_0 = \sin \vartheta_0 \quad d(\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) = n'\lambda \quad (80)$$

A (80) egyenletnek megfelelő geometriát mutat a 21. ábra



21. ábra

A (78) egyenletben az első tényező a p függvényében a 2-dik tényezőhöz képest lassan változó függvény. A második tényező $\frac{0}{0}$ alakú, amikor felveszi maximumát. A maximum értékét a *L Hospital-szabály* szerint kaphatjuk meg.

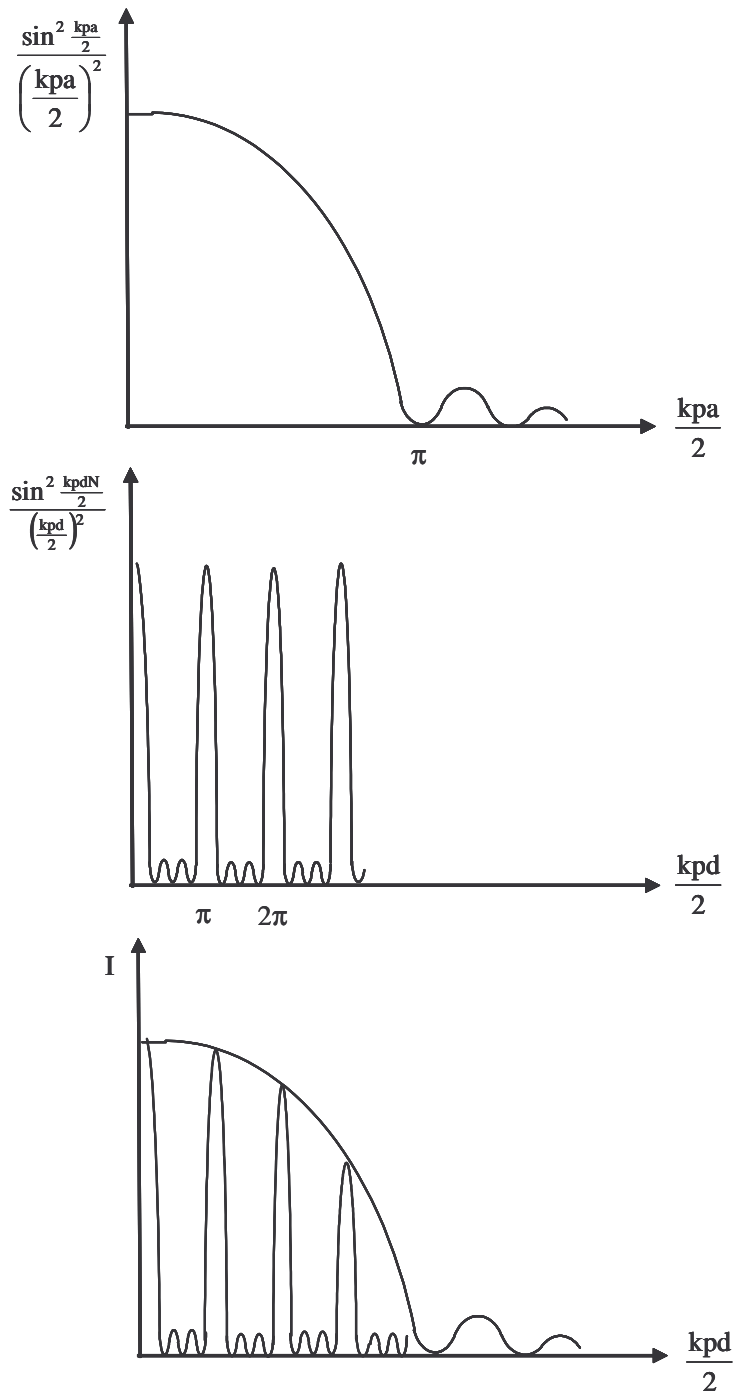
$$\left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{dg}{dx}} \text{ ha } f(a) = g(a) = 0 \right)$$

kétszer alkalmazva a szabályt

$$\lim_{p \rightarrow 2n' \frac{\pi}{kd}} \frac{\sin^2 \frac{kpdN}{2}}{\sin^2 \frac{kpd}{2}} = \lim_{p \rightarrow 2n' \frac{\pi}{kd}} N^2 \frac{\cos kpdN}{\cos kpd} = N^2$$

Az eredményből látszik, hogy rések számának növelésével az intenzitás négyzetesen növekszik. A 80-as rácsformula alapján lehetőség van hullámhossz mérésre, ugyanis egy ismert „ d ” rácsállandójú rács esetén a maximum helyekhez tartozó szögek mérésével λ meghatározható. A rácsra ráeső több hullámhosszat tartalmazó nyalábot a rács különböző ϑ irányokban téríti el, így a rács alkalmas eszköz különböző hullámhosszú sugárzások szétválasztására, ún. *diszperziós elem*. Egy adott n' által meghatározott irányban haladó hullámot a rács n' -dik rendjének nevezzük. Az optikai rácsokat a spektroszkópiában igen elterjedten alkalmazzák, analizálva a különféle fényforrások által kibocsátott hullámhosszakat. A (78)-as

intenzitás kifejezésben szereplő első -és második tényező ábrázolásával láthatjuk a 22. ábrán.



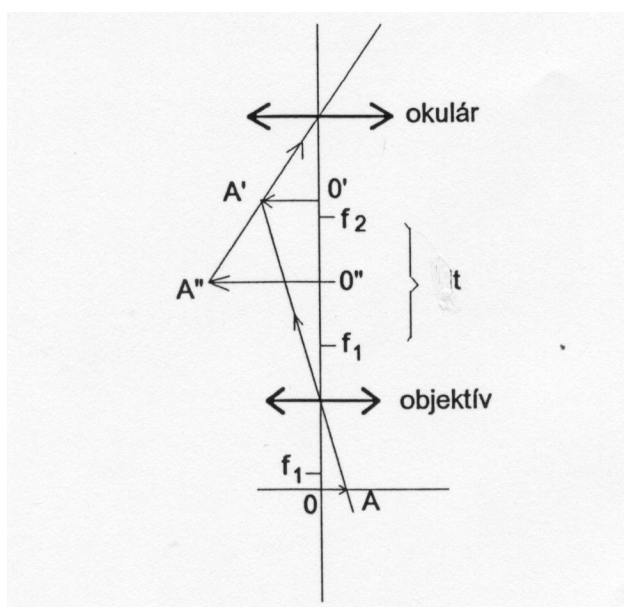
22.a., b., c. ábra

Az intenzitás-eloszlást meghatározó két tényező és az eredő intenzitás-eloszlás

A fénymikroszkóp

A fénymikroszkóp a biológia területén igen gyakran használt műszer. Olyan méretű tárgyak megfigyelésére alkalmas eszköz, amelyet a tárgy kicsiny mérete miatt szabad szemmel már nem tudunk megfigyelni. A szem ugyanis segédeszköz nélkül két olyan tárgypontra képes megkülönböztetni, amelyekből érkező sugarak szöge kb. 1 szögperc alatt érkezik a szemünkbe. A mikroszkóp szerepe az, hogy ezt a szöget kis tárgyak esetén megnövelje. A mikroszkóp két lencsét tartalmaz:

az objektívet és a szemlencsét, más néven okulárt. Az objektív által létrehozott fordított állású nagyított képet az okuláron keresztül virtuális képpé alakítjuk, ls. 23. ábra.



23. ábra

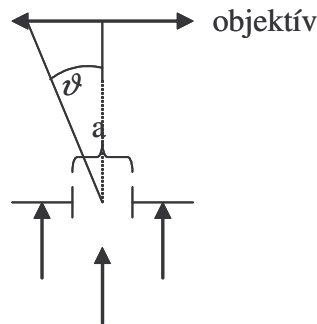
A mikroszkóp képképzése

A mikroszkóp nagyítását megadó képlet az ábra szerint meghatározható, ami

$$N = -\frac{d \cdot t}{f_1 f_2} \quad (81)$$

ahol f_1 , f_2 az objektív illetve okulár fókusz távolságai, t a tubushossz, és d a tisztánlátás távolsága. A (81) nagyítás formulát a geometriai optika alapján nyertük, így a nagyításnak semmiféle korlátja nincs, hiszen ha f_1 -et és f_2 -t kellően kicsire választjuk, akkor elvileg szinte bármilyen nagyítás elérhető. Ez azonban nem így van. Ennek magyarázatát éppen a diffrakció alapján érthetjük meg. Ugyanis a nagyítást növelve a tárgy részletei egy bizonyos határon túl változatlanok.

A vizsgálandó tárgy legyen egy egyszerű „ a ” szélességű rés és ennek megfelelően tárgyaljuk a problémát egydimenzióban.



24. ábra

A mikroszkóp felbontóképessége

A rést egy párhuzamos nyalábbal merőlegesen világítjuk meg. A (75)-ös diffrakciós összefüggés egydimenziós esetben:

$$\varphi(p) = \frac{\varphi_0}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} T(x) e^{-ikpx} dx \quad (82)$$

A kifejezésben $T(x)$ a rés helyén 1 , a résen kívül 0 értéket vesz fel. Ezt figyelembe véve:

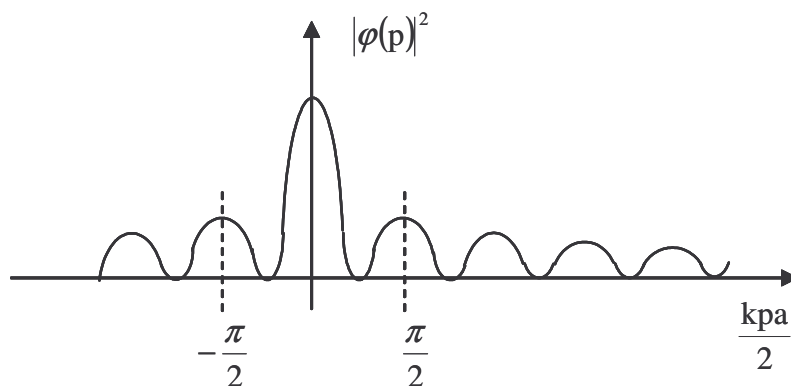
$$\varphi(p) = -\frac{\varphi_0}{\lambda} \frac{e^{-ikpa} - 1}{ikp} \quad (83)$$

Az intenzitás eloszlás pedig:

$$|\varphi(p)|^2 = \left(\frac{\varphi_0}{\lambda}\right)^2 a^2 \frac{\sin^2 \frac{kpa}{2}}{\left(\frac{kpa}{2}\right)^2} \quad (84)$$

Mivel $p = \alpha - \alpha_0$ az iránykoszinuszok különbsége és $\alpha_0 = 0$ a merőleges megvilágítás miatt, így $p = \alpha = \sin \vartheta$, ami éppen a diffrakciós szög szinusza.

Ábrázoljuk (84) egyenletet $\frac{kpa}{2}$ függvényében:



25. ábra

Az elhajlási kép egy „a” szélességű rés esetén

Az elhajlási képből látható, hogy van egy főmaximuma a $p=0$ -nál, azaz $\vartheta = 0$ -nál. Az első mellékmaximum helye a $\frac{kpa}{2} = \frac{\pi}{2}$ -nél található, azaz

$$\frac{2\pi \sin \vartheta}{\lambda 2} a = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \vartheta = \frac{\lambda}{2 \cdot a} \quad (85)$$

A (85) egyenlet szerint az első mellékmaximum helye már függ a rés méretétől. Így ahhoz, hogy a rés (tárgy) méretéről információt kapjunk, az objektívnek legalább ezen ϑ irányban haladó intenzitás komponensét még be kell fogadnia. Ha tehát egy objektív ϑ szögű nyalábot még fogadni képes, akkor az ennek megfelelő tárgyméret:

$$a = \frac{\lambda}{2 \sin \vartheta}$$

Ha n törésmutatójú közegben (immerzió) helyezkedik el a tárgy, akkor ebben a közegben a hullámhossz $\frac{\lambda}{n}$, ekkor a felbontás:

$$a = \frac{\lambda}{2n \sin \vartheta} \quad (86)$$

Az $n \sin \vartheta$ -t numerikus apertúrának nevezzük. A gyakorlatban ϑ szög elérhető nagysága $\sim 70^\circ$, ebből látható fény esetén $\lambda = 450 \text{ nm}$ -nél cédrusolajos immerzióban ($n=1,53$), $a \approx 200 \text{ nm}$.

Elmondható tehát, hogy egy adott hullámhosszú fényel nagyságrendileg a hullámhosszal azonos méretű tárgyak figyelhetők meg. Ha az objektív nem fogadja az első mellékmaximumokat, akkor a látótér egyenletes kivilágítású és a tárgy részletei elvesznek.

Speciális mikroszkópok

Ultraibolya mikroszkóp

A (86) képlet szerint a felbontás kisebb hullámhosszak felé javul, ezért a jobb felbontás érdekében már nem a látható tartományba eső hullámhosszat szokás alkalmazni. Ekkor az okulárral nem virtuális, hanem valódi képet állítanak elő, mivel a kép szemmel nem érzékelhető. Az így kapott valódi képet fotolemezen, vagy képerősítővel lehet megjeleníteni.

Ultramikroszkóp

Mivel a mikroszkóp képalkotásában a $\vartheta = 0$ -hoz tartozó főmaximum nem vesz részt, csupán a látótér kivilágítását okozza, ezért ha a $\vartheta = 0$ -hoz tartozó részt, a *0. rendű nyalábot* kitakarjuk, akkor csak a magasabb „rendek” vesznek részt a képalkotásban. A látótér egyenletes kivilágítását a kitakarás megszünteti és a tárgy részletei világos foltokként fognak megjelenni a sötét látótérben. Ezzel a módszerrel akár *10nm*-es méretű objektumok is megfigyelhetők, mint fénylő pontok a sötét látómezőben, de a képrészletekre itt is igaz a felbontásra előírt (86) egyenlet.

Fáziskontraszt mikroszkóp

A fáziskontraszt eljárást transzparens tárgyak esetében alkalmazzák, ekkor az apertúra függvény $T(xy) = e^{i\phi(xy)}$ alakú. A kifejezésben szereplő $\phi(xy)$ általában kicsi, így a $T(xy)$ apertúra sorba fejthető. A $T(xy)$ függvény közelítő alakja

$1 + i\phi(xy)$. Ha ezen apertúra függvényt úgy módosítjuk, hogy egy fázislemezzel a beeső nyaláb irányában tovahaladó nyalábban negyedhullámhossz késleltetést idézünk elő, akkor az új apertúra függvény már intenzitás modulációt fog eredményezni, így a fázistárgy részletei láthatóvá válnak. A fázislemezt dielektrikumból készítik, amelynek vastagságát $d = \frac{\lambda}{4(n+1)}$ vastagságúra párologtatják egy üveglemez azon részén, ahol az objektív fogadja a tovahaladó, nem diffraktált megvilágító nyalábot.

Polarizációs mikroszkóp

A *polarizációs* mikroszkópot olyan tárgyak esetében használják, amelyek a fény *polarizációs* tulajdonságait megváltoztatják. Ezek az eszközök a közönséges mikroszkóphoz hasonló lencserendszeren kívül két *polarizációs* elemet tartalmaznak. Az egyik *polarizátorként*, a másik analízátorként szerepel. A *polarizátor* a tárgyat megvilágító nyalábban, az analízátor az objektív után található. A merőlegesen állított *polarizátorok* sötét látóteret hoznak létre, ha a tárgynak nincsenek *polarizációt* változtató tulajdonságai. Ha a tárgy a *polarizációban* változást idéz elő, akkor ez intenzitás modulációt eredményez a látótérben, vagyis az egyébként sötét látótérben bizonyos részek megvilágosodnak.

Fluoreszcens mikroszkóp

A növényi, állati és emberi szöveteket felépítő szerves vegyületek legtöbbször ún. *fluoreszcens* tulajdonságokat mutat. Ez a tulajdonság abban nyilvánul meg, hogy bizonyos, az anyagra jellemző hullámhosszal megvilágítva az adott vegyületet, az a megvilágító fénytől eltérő nagyobb hullámhosszú sugárzást bocsát ki. Vannak olyan szövetet felépítő vegyületek is, amelyek ilyen tulajdonságot nem mutatnak, de bizonyos külső vegyületek hozzáadásával *fluoreszcenssé* tehetők. E hatást előidéző vegyületek ún. *fluorokrómoknak* nevezzük. A megvilágításnál széles sávban sugárzó nyalábból optikai szűrővel választják ki a megfelelő gerjesztő hullámhosszat. A fényforrás a legtöbb esetben *HgXe* nagynyomású lámpa.

A fény részecske természete

Hőmérsékleti sugárzás

A fény részecskeként való értelmezése Newtont követően először a hőmérsékleti sugárzás megértésekor merült fel. Mint ismeretes, az elég magas hőmérsékletű testek (izzó vas, lángok), szemmel is érzékelhető elektromágneses sugárzást, fényt bocsátanak ki. Egy ilyen test közelében lévő más testek még akkor is felmelegszenek, ha a két test közötti térből kiszivattyúzzuk a levegőt, kizárva a hővezetés általi energia átadást. Azt az energiát, amelyet egy test így ad át a másiknak, *sugárzásos energia átadásnak* nevezzük, a jelenséget pedig *hőmérsékleti sugárzásnak*.

Hőmérsékleti sugárzást nem csak magas hőmérsékletű testek bocsátanak ki. Ez a sugárzás bármely hőmérsékleten fellép, csak a sugárzás hullámhossza nem minden hőmérsékleten esik a látható sugárzás tartományába. A 700 K° alatti hőmérsékleten a testek főleg infra tartományban sugároznak. A 700-1800 K° hőmérséklet tartományban a testek látható fényt bocsátanak ki.. Az 1800 K° feletti hőmérsékleten már jelentős ultraibolya sugárzás is fellép.

Minden T hőmérsékletű testhez hozzárendelhető egy emisszió képesség, amely a test egységnyi térfogata által egységnyi térszögben és egységnyi hullámhossz tartományban kisugárzott teljesítményt jelenti. Jelölje ezt $e(\lambda T)$. Ugyanígy minden T hőmérsékletű testhez hozzárendelhető egy $a(\lambda T)$ abszorpció képesség. Az *abszorpció képesség* egy 1-nél kisebb szám, amely a test egységnyi térfogata által egységnyi térszögből, egységnyi hullámhossz tartományba érkező sugárzási teljesítmény azon részét jelenti, amelyet egységnyi térfogat elnyel. *Kirchhoff* kimutatta, hogy termodinamikai egyensúly esetén bármely testnél a test anyagi minőségétől függetlenül a két mennyiség hányadosa állandó.

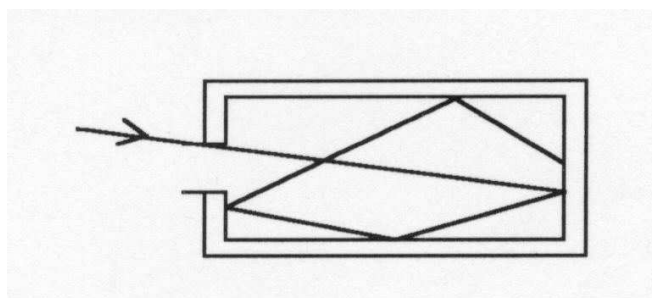
$$\frac{e(\lambda T)}{a(\lambda T)} = E(\lambda T) \quad (87)$$

Ez az egyenlet egyszerűen azt fejezi ki, hogy egy test által kibocsátott és elnyelt sugárzási teljesítménynek, minden hullámhosszon (frekvencián) egyensúlyban kell lennie. A (87) egyenlet által definiált univerzális $E(\lambda T)$ függvény meghatározása a fizika egyik fő problémája volt a századfordulón. $E(\lambda T)$ jelentése azonosítható egy

olyan test emisszióképességével, amelynek abszorpciós együtthatója 1 . Az ilyen testet *abszolút fekete testnek* nevezzük. Az abszolút fekete test tehát minden hullámhosszon a ráeső teljes sugárzási teljesítményt elnyeli.

Mivel $a(\lambda T) \leq 1$, ezért kimondhatjuk ugyanazon a hőmérsékleten egy nem fekete test emissziója minden hullámhosszon (minden frekvencián) kisebb, mint az azonos hőmérsékletű fekete test emissziója.

Az $E(\lambda T)$ függvény meghatározása az elméleti fizika egyik alapvető problémája volt. A kísérleti mérési eredmények alapján *Planck* volt az, aki felismerte, hogy fel kell adni a sugárzási térben az energia folytonos változását. Az $E(\lambda T)$ függvény kísérleti vizsgálatára egy kis lyukkal rendelkező üreg alkalmas, amelynek belső fala korommal fedett, így az üreg kis nyílásán belépő sugárzás a sok reflexió után gyakorlatilag elnyelődik, ls. 26. ábra.



26. ábra

Fekete test megvalósítása

Az $E(\lambda T)$ függvény helyett gyakrabban az $E(\nu T)$ függvényt használják, ahol ν a sugárzás frekvenciája. Ez a függvény az egységnyi frekvenciatartományban kisugárzott teljesítményt jelenti. Hogy kísérleti eredményekkel megegyező eredményt kapjunk, *Planck* arra a következtetésre jutott, hogy a sugárzási tér energiája egy adott frekvencián $h\nu$ egész számú többszöröse kell, hogy legyen, ahol h a *Planck-féle állandó*. Ekkor a kérdéses függvény alakja:

$$E(\nu T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (88)$$

Gyakran használatos az ennek megfelelő spektrális energiasűrűség, amely

$$\rho(\nu T) = \frac{4\pi}{c} E(\nu T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (89)$$

alakú kifejezés. A h Planck- féle állandó kísérleti értéke $h = 6.62 \cdot 10^{-34}$ Js .

A Planck- féle feltételezés, amely kimondta, hogy a sugárzási tér egy adott módusában az energia $nh\nu$ lehet, ahol n pozitív egész merőben új gondolat volt. A klasszikus fizikában, a mechanikában és az elektrodinamikában is a fizikai mennyiségek értékei folytonos értékészlettel rendelkeztek. A sugárzási törvény Planck-féle értelmezése oda vezetett, hogy ki kellett mondani, hogy a mikrovilágban a fizikai mennyiségek értékei nem folytonosak, hanem diszkrét értéket vesznek fel. Az egy módushoz tartozó $h\nu$ nagyságú energia adagot egy részecskéhez, a *fotonhoz rendelt energiának* nevezzük. Így a hőmérsékleti sugárzás volt az egyik jelenség, amely rámutatott a fény, az elektromágneses hullámok részecske természetére.

Fényelektromos jelenség volt a másik olyan fizikai kísérlet, amely fotonnak, mint sugárzási tér részecskéjének létjogosultságát szintén alátámasztotta. Kísérletileg megfigyelték, hogy fény hatására az alkáli fémekből elektronok lépnek ki. Ezt az elektron kilépést abban az esetben, ha mondjuk egy 100W-os izzóval világítjuk meg a fémet $1m$ távolságból és folytonosnak képzeljük el a teljesítmény áramlást, akkor egy atom méretét figyelembe véve perc nagyságrendű időnek kellene eltelni, hogy egy elektron kilépjen az alkáli fémből. A kísérleti tapasztalat pedig azt mutatta, hogy az elektron kilépés azonnal bekövetkezik. Ez a megfigyelés is alátámasztja, hogy az energia áramlása nem lehet folytonos, hanem csomagokban, *kvantumokban* történik. A fémből kilépő elektronok száma arányos volt a fény intenzitásával, viszont a kilépő elektronok kinetikus energiája csak a fény frekvenciájától függött.. Ezt a jelenséget *Einstein* úgy magyarázta, hogy a fématom a sugárzási térből $h\nu$ nagyságú energia adagot képes felvenni, amely energia részben a kilépési munkára fordítódik, a fennmaradó rész pedig a kirepülő elektron kinetikus energiáját adja.

$$h\nu = L + \frac{1}{2}mv^2 \quad (90)$$

A kifejezésben az L a fémmre jellemző kilépési munka.

A fotonhoz azonban nem csak energiaadag rendelhető, hanem impulzus is, amelynek nagysága $\frac{h\nu}{c}$, ezt először *Compton* igazolta szabad elektronokon vizsgálva a *Röntgen sugarak* szóródását. E jelenség még jobban alátámasztotta, hogy a fény, az elektromágneses sugárzás bizonyos körülmények között részecskeként kezelendő.

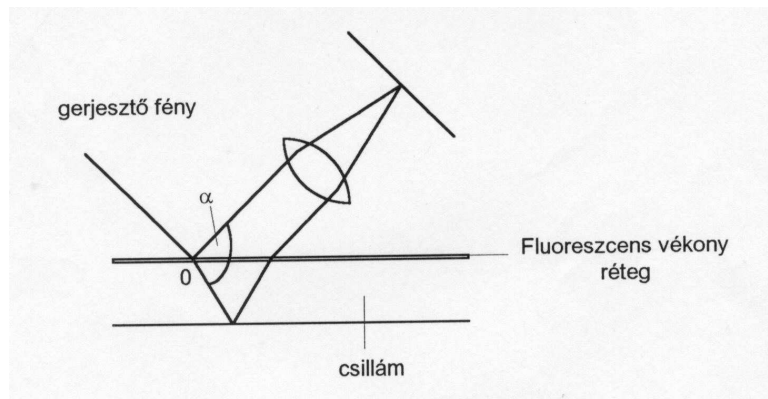
A sugárzási tér és atomok közötti $h\nu$ energia és $\frac{h\nu}{c}$ impulzuscsere együtt jár $\frac{h}{2\pi}$ impulzus momentum cserével is, ezt *Carrera* kísérlete igazolta. Kísérletének lényege az volt, hogy egy fényelnyelő korongot helyezett egy függőleges torziós szálra. A korongra a torziós szál irányába haladó, cirkulárisan poláros fényt bocsátott, amikor az balra cirkuláris volt, akkor balra fordult a korong, jobbra cirkuláris fény esetében pedig jobbra. A korong által felvett energia és impulzus momentum viszonya a mérés szerint $\frac{E}{J} = 2\pi \cdot \nu$ -re adódott. Ez megfelel annak a feltevésnek, hogy n foton elnyelésével $nh\nu = E$ energia adódik át és ugyanakkor $n\frac{h}{2\pi} = J$ impulzus momentum.

A sugárzási tér kvantumos jellegét szemünk is képes jelezni, ezt először *Vavilov*nak sikerült észlelnie. Később mások finomították ezt, eredményük a következőkben foglalhatók össze:

Ha *100 db* pálcikára *1/40* másodpercen belül legalább két látható foton érkezik, akkor egy pihent szem ezt már érzékeli (a magányos fotonokkal szemünk nem terheli az idegrendszert).

A felsorolt jelenségekből kitűnik, hogy a sugárzási térben lehet értelmezni egy részecskét, amelynek energiája $E = h\nu$, impulzusa az $E = mc^2$ alapján az $mc^2 = h\nu$ -ből $p = mc = \frac{h\nu}{c}$.

Einstein megpróbálta a fény ezen részecske természetét összeegyeztetni annak hullámtermészetével, megalkotva az ún. *tűsugárzás elméletet*. Eszerint a fényforrások a fényt kis keresztmetszetű, de hosszú hullámvonulatok formájában bocsátják ki. A hullámvonulat átmérője kisebb az atomi átmérőnél és hossza megegyezik a koherencia hosszal. Ennek az elképzelésnek a cáfolatát jelentette *Selényi Pál* kísérlete, amely kimutatta, hogy a fényforrásból nagy szögben kiinduló sugárzás is interferenciát hoz létre. A *Selényi* kísérlet lényege a 27. ábra alapján magyarázható.



27. ábra

Selényi kísérletében egy csillámlemez egyik felét vékony, féligáteresztő, fluoreszcens réteggel vontta be. A megfelelő frekvenciájú gerjesztő nyaláb segítségével a fluoreszcens rétegben keletkező sugárzás egyrészt közvetlenül, másrészt a csillámlemez másik oldaláról reflektálódva találkozik a lencse fókusz síkjában. Mint látható, az ábrán feltüntetett α szög majdnem 180° is lehet. Selényi a kísérlet során azt tapasztalta, hogy a O pontból kiinduló igen nagy szögű hullámok között is létrejön az interferencia, ami nem összeegyeztethető a *tűsugárzás* elméletével.

Hogy a sugárzási tér energia kvantumjai nem oszthatók, azt Rupp kísérlete igazolta különösen nyilvánvaló módon. Kísérletében egy optikai zárat helyezett egy $\sim 1m$ koherencia hosszal rendelkező fénynyaládba. A fényintenzitást annyira lecsökkentette, hogy a berendezésben legfeljebb 1 fotonnak megfelelő energia volt jelen. A fényzár után egy –már 1 fotont is érzékelni képes- fotodetektort helyezett. A fényzárát olyan rövid időre nyitotta ki, hogy a $\sim 1m$ -es vonulat ne tudjon keresztülhaladni a záron. A mérések eredménye az volt, hogy a detektor, vagy egy fotonnak megfelelő elektromos jelet ad, vagy nem ad jelet, de nem fordult elő, hogy fél vagy valahányad fotonnak megfelelő elektromos jel jelent volna meg a detektoron.