Kvácistacionárius terek és váltóáramok

A Maxwell egyenletek kvácistacionárius esetben. Mit jelent a kvázistacionaritás?

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{0}, \qquad \text{de} \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq \mathbf{0}\,!$$

Tehát most rot**E** sem **0**!

I. Az elektromágneses indukció jelensége. A Faraday-féle indukció törvény

Történelmi előzmények

Oersted és Ampére 1820-as felfedezései nyomán bizonyossá vált az, amit a két jelenségkör hasonlóságai alapján mindig is gyanítottak: az elektromosság és mágnesség között kapcsolat van. E felfedezések első lépéseként azt találták, hogy a stacionárius elektromos áram mágneses teret gerjeszt maga körül (Ampére-féle gerjesztési törvény). Logikus volt feltételezni, hogy fordított kapcsolatnak is léteznie kell, amikoris valamilyen módon a mágesség kelt elektromos teret. Nyugvó mágnesrudak azonban, bármilyen erős is volt a mágneses terük, nem hoztak létre elektromos teret, avagy áramot. 12 hosszú év elteltével végülis az angol Michael Faraday volt az, aki felfedezte a fordított kapcsolatot, az elektromágneses indukció később őróla elnevezett törvényét.

(Zárójelben és röviden érdekes megemlíteni, hogy Ampére is majdnem felfedezte ezt a törvényt az 1820-as kisérletezései közben. Ampére alapvető teóriája az volt, hogy minden mágnességet köráramok hoznak létre. Ez a meggyőződés valószínűleg akkor alakult ki benne, amikor köralakú Volta-oszlopot hozott létre, és a körbekapcsolt galvánelemek mágneses tere ugyanolyan volt, mint egy fémes vezetőben folyó köráram tere, kívülről nézve pedig mindkettő olyan, mint egy mágnesrúd tere. Barátjának Arago-nak – aki Svájcból hozta haza Párizsba 1820 szeptemberében Oersted felfedezésének hírét – egy másik kísérlete pedig egy olyan hipotézis felállítására késztette, miszerint a permanens mágnesekben elemi, vagy molekuláris köráramoknak kell lenniük, és ezek felelősek a térért. Arago ugyanis azt találta, hogy egy tekercs tengelyébe helyezett vastű megmágneseződik, ha a tekercsen áramot folyatunk keresztül. Ampére feltételezte, hogy ezt a vastűben lévő molekuláris köráramok okozzák. Evvel szemben állt az a másik lehetőség, hogy a vastűben, annak tengelye körül folyó, makroszkópikus köráramok okozzák a vastű permanens mágnességét. Persze ilyenkor hő fejlődne a vastű ellenállása miatt, és a makroszkópikus köráram csakhamar megszünne, de erre Ampére korában nem gondoltak. Ezért Ampére eltervezett és megvalósított egy olyan kísérletet, amely azt volt hivatva bizonyítani, hogy nem makroszkópikus köráramok okozzák a permanens mágnességet. E célból azt kivánta megmutatni, hogy egy zárt vezető hurok nem mágnesezhető fel. Ma már tudjuk, hogy szupravezetők esetén ez sem érvényes, de most kövessük tovább Ampére történetét. Ő tehát a tekercs belsejébe a vastű helyett egy zárt rézből készült körvezetőt helyezett el, úgy hogy a tekercs és a körvezető tengelye párhuzamos legyen. Kísérletekkel igazolta, hogy a tekercsben hiába folyat áramot: a réz körvezető nem lesz permanens mágnes, rá a mágnesrúd nem hat. Igaz, észrevette, hogy az áram bekapcsolásának pillanatában a körvezető mintha rövid időre mágnessé vált volna: ha mágnesrúd volt a közelben, akkor az áram a bekapcsolásakor a körvezető egy kicsit megmozdult. De a körvezető később már nem viselkedett mágnesként, tehát nem vált permanens mágnessé. Ezért aztán Ampére az átmentileg jelentkező kis mágnességgel nem törődött. Pontosabban a Francia Akadémia számára készített jelentésében említést tett róla egy furcsa megjegyzés kíséretében, miszerint e jelenség elméleti szempontból érdektelen. Valójában Ampére azt figyelte meg, hogy a bekapcsolás után hirtelen felnövekvő mágneses tér az elektromágneses indukció révén hogyan gerjeszt áramot egy másik zárt vezetőben. Ez az áram azonban a bekapcsolás után gyorsan megszűnik. Arra, hogy milyen kevés választotta el egy fontos felfedezéstől, csak 1832-ben ébredt rá, amikor Faraday közölte az elektromágneses indukció felfedezését.)

Analógia az első és második Maxwell egyenlet között

Térjünk most vissza a Faraday-féle indukció törvényhez. Nagyon fontos, hogy sztatika esetén nincs kapcsolat az elektromos és mágneses tér között, a kapcsolatot a mozgás, a változás létesíti. Ezért nem találtak sokáig kapcsolatot az elektromos és mágneses jelenségek között, mivel csak elektro- és magnetosztatikával foglalkoztak. A töltések ***mozgása***, vagyis az elektromos áram hozza létre a körülötte örvénylő mágneses teret. Mint később látni fogjuk a **D** dielektromos eltolás időbeli ***változása*** is ilyen hatású (ezért az első Maxwell egyenletben szereplő $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ -t szokás ún. eltolási áramsűrűségnek is nevezni.)

Ezekután, ha teljes analógia lenne az elektromos és mágneses jelenségek között, akkor azt várnánk, hogy a mágneses áram (a mágneses töltések árama) maga körül örvénylő elektromos teret hoz létre, és a **B** mágneses indukció változása ugyanilyen hatású. Most írjuk le az I Maxwell egyenletet, és a fenti okoskodásaink alapján felírt hipotetikus másodikat:

$$rot\mathbf{H} = \mathbf{j}_{elektromos} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad I,$$

$$rot\mathbf{E} = \mathbf{j}_{mágneses} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad II^{*},$$

Látjuk tehát, hogy a hipotetikus második egyenlet majdnem stimmel. Két dologban tér el a valóditól:

1) Egyrészt nincs valódi mágneses töltés, és így valódi mágneses áram sincs. Így a mágneses áramsűrűség nulla, és csak a $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ eltolási áramsűrűséggel analóg $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ tag marad meg.

2) Másrészt a $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ tag előjele negatív. Tehát amíg az első Maxwell egyenletre mint jobbkézszabályra szoktunk hivatkozni, addig a második az a balkéz szabály. A Lenz törvény tágyalásánál majd látni fogjuk, hogy a negatív előjel az energia-megmaradás miatt szükséges. (A megmaradási törvények amolyan „szupertörvények": előírják, hogy milyenek lehetnek, és milyenek nem az egyes konkrét természettörvények).

A fenti elméleti okoskodásunk végén a tévedések elkerülése végett azért írjuk ide a **II.** Maxwell egyenletet a végső helyes formában is

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad II,$$

ami nem más, mint a Faraday féle indukció törvény lokális alakja.

Persze Faraday nem ebből az analógiából, hanem kísérleteiből következtette ki az elektromágneses indukció törvényét. Lássuk tehát ezeket a kísérleteket, és azt, hogy miként következik ebből a II. Maxwell egyenlet.

Az elektromágneses indukció Faraday féle törvénye

Kísérlet: Nagy műszer + tekercs (ábra)

A kísérletben egy zárt vezető hurkot tekintünk, ennek egy része az árammérő műszer is, amely jelzi, ha ebben a hurokban áram folyik. Amikor a hurokhoz egy mágnesrúd egyik vagy másik sarkát közelítjük, vagy távolítjuk tőle, a műszer kitér. A kitérés előjele függ attól, hogy melyik pólust közelítjük, és attól is, hogy közeledik, avagy távolodik-e ez a pólus. Lényeges, hogy a műszer csak akkor tér ki, ha a mágnes mozog, és a kitérés annál nagyobb, minél gyorsabb ez a mozgás. Vagyis az indukció a mágneses tér ***változási sebességével*** kapcsolatos. Állandó mágneses tér - bármilyen nagy legyen is - nem hoz létre áramot a hurokban.

Hogyan értelmezhetjük a fenti kísérlet eredményét? Első pillantásra a kép ismerősnek tűnhet, hiszen egy zárt áramkörben körbe folyik az áram, ilyet pedig már láttunk. Igenám, de most a hurokban nincsenek galvánelemek vagy más töltésszétválasztó idegen erők, így az áram egyes-egyedül az elektromos tér hatására folyik körbe. Ez pedig azt jelenti, hogy az elektromos térerő mindenütt ugyanabba az irányba, pl. az óramutató járásának az irányába mutat, vagyis az elektromos tér most örvényes! Ezt az örvényes teret a tér ***cirkuláció***jával jellemezhetjük, (egy vektortér cirkulációja a térnek egy zárt görbére vett vonalmenti integrálja), amit itt ***indukált feszültség***nek fogunk nevezni:

$$cirkuláció = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = U^i,$$

mivel ez nem más, mint egy zárt görbére számított feszültség. (Sztatikus és stacionárius terek esetén a tér örvénymentes, és ezért a zárt görbére számított feszültség azokban az esetekben zérus volt. A most tárgyalt kvázistacionárius terek esetén azonban – ahogy a fenti kísérlet is mutatja - ez már nem mindig igaz.)

A következő kérdés az, hogy miként függ a zárt vezetőben fellépő indukált feszültség a mágneses tér változási sebességétől? A kísérletek azt mutatták, hogy ami itt szerepet játszik az nemcsak a mágneses tér, hanem a **B** térnek a vezető hurok által határolt A felületre vett Φ_B fluxusa:

$$\Phi_B = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A},$$

pontosabban ennek a fluxuxnak a változási sebessége. Így, tehát a Faraday-féle indukció törvény az alábbi alakban írható fel:

$$U^i = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Még az maradt hátra, hogy bebizonyítsuk: a Faraday törvény fenti globális alakja ugyanazt fejezi ki mint amit a II. Maxwell egyenlet állít lokális alakban. E bizonyítás

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\left(\int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}\right)}{dt}.$$

kiindulási pontjaként írjuk fel Faraday törvényét részletesen:

A baloldalra alkalmazhatjuk a Stokes tételt, a jobboldalon pedig (ha a vezető hurok nem mozog, csak a **B** tér változik), az idő szerinti deriválás és a felületi integrálás

$$\int_A rot\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_A -\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{A}.$$

sorrendjét megcserélhetjük. Így az alábbi összefüggéshez jutunk:
Mivel a két felületi integrál tetszés szerinti felületekre egyenlő, ez csak úgy

$$rot\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

lehetséges, ha maguk az integrandusok is egyenlőek, vagyis
ami nem más, mint a II. Maxwell egyenlet lokális alakja.

Végül egy fontos megjegyzés: a Faraday törvény értelmében, ha a mágneses indukció, azaz **B**, fluxusa megváltozik egy felületen, akkor a felület peremét alkotó zárt görbén akkor is indukálódik feszültség, ha ez a zárt görbe nem egy vezető keret. Az elektormos erőtér ekkor is örvényes lesz, de ilyenkor – zárt vezető hurok híján – nem folyik áram.

II. Neumann törvénye

Kísérlet: csúszka (ábra)

Felmerül a kérdés, hogy mi történik akkor, ha a mágneses tér fluxusa nem a **B** tér változása, hanem a vezető keret mozgása miatt változik. A Faraday törvény értelmében

$$U^i = -\frac{d\left(\int_A \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}\right)}{dt},$$

de most az idő szerinti deriváltat nem vihetjük be a felületi integrál mögé, mert A időben változik. Általános esetre nézve nehéz tovább egyszerűsíteni ezt az összefüggést. Speciális esetekben azonban a formula egyszerűsíthető. Ha például az A síkfelület, a **B** tér pedig homogén, akkor a felületi integrál

$$\int_A \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = B\,A\cos\alpha,$$

ahol α a **B** tér és az A felület normálvektora által bezárt szög. Ha B és α állandó, csak az A felület változik, akkor

$$U^i = -\frac{d(B\,A\cos\alpha)}{dt} = -B\cos\alpha\frac{dA}{dt}.$$

Speciális eset, amikor egy L hosszúságú csúszka mozog v sebeséggel egy U alakú vezető kereten, a szárakra merőlegesen, ahol az U párhuzamos szárai ugyancsak L távolságra vannak egymástól. Ekkor

$$\frac{dA}{dt} = L\,v.$$

(A sebesség - és így a szorzat előjelét is - az fogja megszabni, hogy a felület nő-e, avagy csökken.) Ha még azt is feltételezzük, hogy a **B** tér merőleges az A-ra (azaz α=0, így cosα=1), ekkor kapjuk az ún. Neumann törvényt:

$$U^i = -B\,L\,v.$$

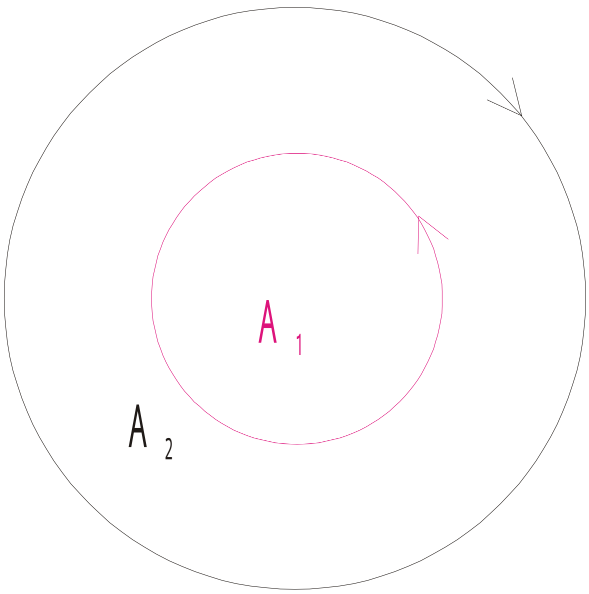
III. Lenz törvénye. Örvényáramok

Kísérletek: 1) aluminium karikák, 2) rézcsőben lecsúszó fémdarabok és mágnes, 3) Waltenhofen inga 4) Thomson ágyú

IV. Kölcsönös indukció és önindukció

Kísérlet: kivetítős műszerrel

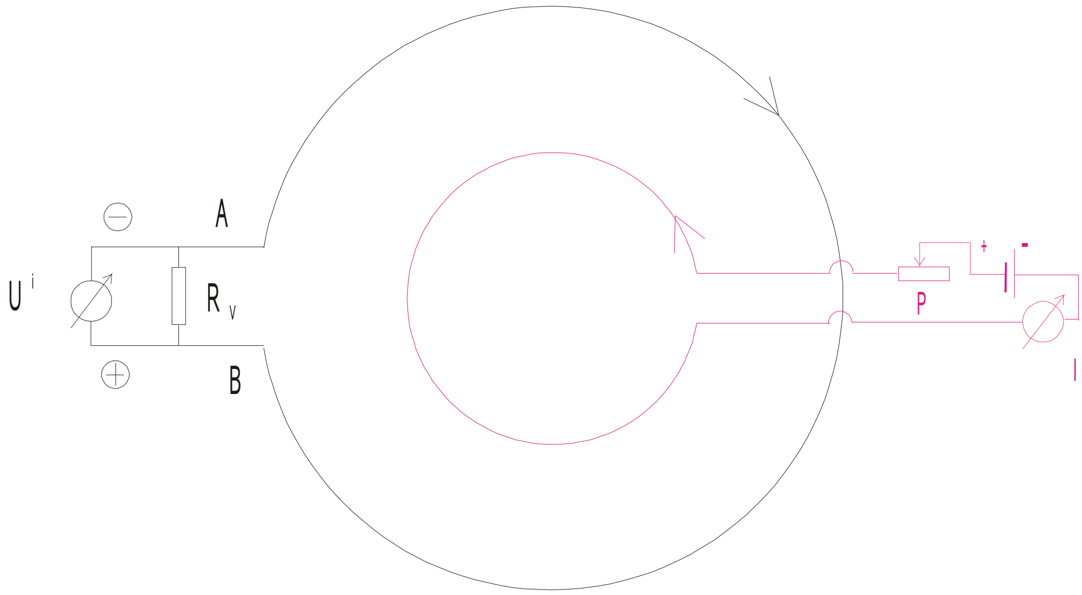
A kísérletben két tekercset úgy helyeztünk el, hogy a tengelyeik egybe essenek. A belső tekercsen áramot vezettünk át, amit egy árammérő műszerrel mértük. A külső tekercsen pedig a feszültséget figyeltük. (Mindkét műszer kivetíthető skálával rendelkezett.) Azt láttuk, hogy amikor a belső tekercsben megváltozott az áram, akkor ez a külső tekercsben feszültséget indukált. A jelenség az elektromágneses indukcióval magyarázható. A belső tekercs mágneses tere a ugyanis a benne folyó áramtól függ. Ha tehát ez az áram megváltozik, akkor megváltozik a mágneses tér is. Ekkor viszont a mágneses indukció fluxusa megváltozik a külső tekercsen is (hiszen a két tekercs belső tere zömében közös), és ezért abban a Faraday törvénynek megfelelően feszültség indukálódik. Az indukált feszültség kiszámításához tekintsük az 1. ábrát.



1. ábra

Az ábrán a két tekercs felülnézeben látható. A belső tekercsben folyó áram iránya legyen az óramutató járásával ellentétes.(A továbbiakban ezt a körüljárási irányt fogjuk pozitívnak tekinteni.) Ekkor a **H** (és ezért a **B** tér is) a jobbkézszabálynak megfelelően a papír síkjából kifelé, felénk irányul. Ebből következik, hogy ha az áram nő, vagyis a $\frac{dI}{dt}$ pozitív, akkor a $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ derivált is felénk mutat. Az indukált feszültség viszont a Faraday törvényből fakadó balkézszabályt követi, ezért növekvő áramerősség esetén az elektromos térerősség zárt görbementi integrálja akkor lesz pozitív, ha a külső tekercsben az óramutató járásának megfelelően megyünk körbe a meneteken.

Hogy világosabb legyen a mondandónk, átmentileg tekintsünk egy olyan egyszerű helyzetet, ahol mindkét tekercs csak egy-egy menetből áll:



2. ábra

Ha a potenciométer állításával növeljük az áramot, akkor a külső menetben az óramutató járásával megegyező örvényes elektromos tér fog indukálódni. E feszültség zömét a feszültségmérő fogja mutatni. Ugyanis a pozitív (az óramutató járásával ellentétes) körüljárási irányt követve

$$U^i = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} + \int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \approx \int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

mivel a voltmérő belső ellenállása jóval felülmúlja a vastag drótból készült egyetlen menet ellenállását. Ez azt jelenti, hogy a külső menetben gyakorlatilag nincs elektromos tér, feszültség csak a voltmérőn van. Ez a feszültség pedig a balkézszabály értelmében növekvő áram esetén negatív lesz, azaz a voltmérő B sarka a pozitív az A-hoz képest.

Míg a magyarázat világosabb talán az egy menetes tekercsek feltételezésével, a levezetés a sokmenetes tekercsekre jóval egyszerűbb, mert azok belsejében homogén

$$U^i\,(\text{egy menetre}) = -\frac{d\mathbf{\Phi}_B}{dt},$$

$$\text{ahol}\quad \mathbf{\Phi}_B = \int_{A_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{A}$$

a mágneses tér. (Az egymenetes tekercseknél ez nincs így. Gondoljuk végig, hogy miért?) Ezért most visszatérünk a két egymásba helyezett tekercs problémájára. A külső (2-es indexszel jelölt) tekercs egy menetében indukálódott feszültség

a belső (1-es indexszel jelzett) tekercs mágneses indukció terének a fluxusa az A_2 felületen, vagyis a külső tekercs egy mente által határolt felületen.(Megjegyzés: pozitív áram esetén a $\mathbf{B}_1\cdot d\mathbf{A}$ skalárszorzat is pozitív lesz, mert az óra járásával ellentétes körüljárási irány a felületnek is felénk mutató, tehát a mágneses térrel megegyező irányítást ad.) Az egyes tekercs belsejében a homogén mágneses tér nagyságát a szolenoidra megismert összefüggéssel számíthatjuk:

$$H_1 = \frac{n_1 I_1}{l},$$

ahol n_1 és I_1 a tekercs menetszáma illetve a benne folyó áram, l pedig a tekercsek hossza (a két tekercset azonos hosszúságúnak vesszük). Tételezzük fel, hogy a tekercs belsejét vákuum, vagy olyan anyag tölti ki, melyre érvényes a B és H közötti líneáris összefüggés miszerint

$$B = \mu H,$$

Ezekután az egy menetben indukálódott feszültség

$$U^i(\text{egy menetre}) = -\frac{d\int_{A_2} \mu \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\mu A_1 n_1}{l}\frac{dI_1}{dt}.$$

Itt még több más dolgot is figyelembe vettünk:

1) Mivel a tér homogén és a felülettel azonos irányú, így a felületi integrál, vagyis a tér fluxusa, egyszerűen a térerősség és a felület szorzata.

2) A fluxus az A_2 felületnek csak egy részén H_1, nevezetesen az A_1 felületen. Ezen kívül zérus. Ezért a fluxus számításánál A_1 felülettel szorozzuk a H_1-et, és nem A_2-vel.

3) Az I_1 áramot kivéve minden más mennyiség állandó.

Végül azt is figyelembe kell venni, hogy a külső tekercs menetszáma n_2. Ezért a rajta indukálódott feszültség:

$$U^i = n_2 \cdot U^i(egy\ menetre) = \frac{\mu A_1 n_1 n_2}{l}\frac{dI_1}{dt}.$$

Vagyis

$$U^i = -L_{21}\frac{dI_1}{dt},$$

ahol bevezettük az ún. kölcsönös indukciós együttható fogalmát:

$$L_{21} = \frac{\mu A_1 n_1 n_2}{l}.$$

Belátható (gondoljuk végig, hogy miként), hogy amennyiben a külső tekercsben változtatjuk az áramot és a belső tekercsben mérjük a feszültséget, az erre az esetre kiszámolt kölcsönös indukciós együttható is ugyanekkora lesz, vagyis

$$L_{21} = L_{12}.$$

Önindukció

A kölcsönös indukció speciális esete az önindukció, amikor a két tekercs egy és ugyanaz. Ugyanis ha egy tekercsen áramot folyatunk, és ez az áram változik, akkor ez nem csak az őt körülvevő másik tekercsben, de saját magában is feszültséget indukál

$$U^i = -L\frac{dI_1}{dt}.$$

ahol az L önindukciós együttható:

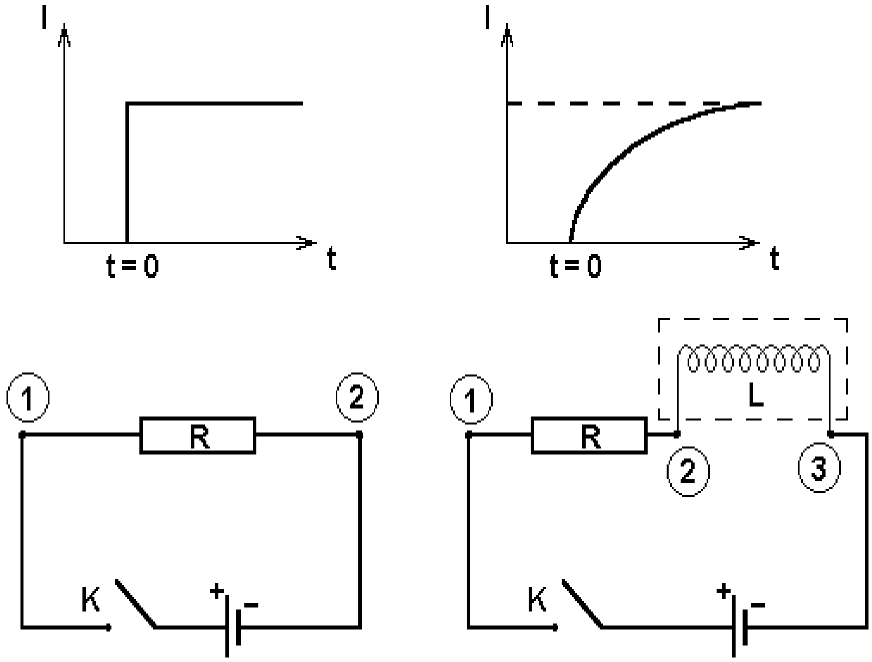
$$L = \frac{\mu n^2 A}{l}.$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy ha tekercsben folyó áram irányát vesszük a pozitív körüljárási iránynak, akkor ehhez képest a tekercs sarkain mérhető feszültség növekvő áramerősség esetén negatív lesz.

VI. Bekapcsolási jelenségek

Kiséret: bekapcsolgatás

Tekintsük a következõ két ábrán látható áramkört:



a) *b)*

Bekapcsolási jelenség

a) önindukciós tekercs nélkül, b) önindukciós tekercs jelenlétében

Az a) ábrán egy telepbõl, egy ohmikus ellenállásból és egy kapcsolóból álló áramkör látható. Ha a kapcsoló nyitva van, akkor nem folyik áram. Ha viszont a kapcsolót zárjuk, akkor pillanatszerûen megindul egy stacionárius áram, amely az ugrás után már nem változik. A valóságban minden áramkörnek van több-kevesebb önindukcója, úgyhogy az ugrás mégsem lesz teljesen pillanatszerû, de most egy idealizált határesetet képzeljünk el. Mindenesetre az áram az a) esetben jóval gyorsabban fogja a végsõ stacionárius értékét megközelíteni, mint a b) esetben. A b) esetben ugyanis az R ellenállással még egy L önindukciójú tekercset is sorba kapcsoltunk. Ekkor az áram nem ugrásszerûen éri el végsõ stacionárius értékét, hanem kísérletileg is jól látható tranziens viselkedés figyelhetõ meg: az áram nulláról indulva asszimptotikusan közelít a végsõ értékéhez. A végsõ stacionárius állapotra felírható a Kirchhoff-féle huroktörvény, és ez mindkét áramkörre ugyanaz lesz, feltéve, hogy a tekercs ellenállása elhanyagolható. A huroktörvény, mint tudjuk, tulajdonképpen azt mondja ki, hogy stacionárius állapotban örvénymentes az elektromos tér, és ezért a feszültségek összege egy zárt hurokban zérus:

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0 \quad\Rightarrow\quad \int_1^2 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}+\int_2^1 \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=0 \quad\Rightarrow\quad U_R+U_{TELEP}=0,$$

ami az Ohm-törvény és az elektromotoros erõ segítségével a jól ismert formába írható:

$$I \cdot R - \varepsilon = 0.$$

(A d**l** jelölés a vezeték menti kis elmozdulást jelent a pozitív áramerõsség irányában.) A tranziens állapotra ez az összefüggés viszont nyilvánvalóan nem alkalmazható, mivel a változó áram miatt változik a mágneses indukció is. Tehát most $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$, vagyis itt a második Maxwell-egyenlet, a Faraday-féle indukciótörvény alkalmazandó:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = -L\dot{I} \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_3^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -L\dot{I},$$

ahol L a teljes áramkör induktivitása. Ha tekercs is van jelen az áramkörben, akkor általában jó közelítéssel feltételezhető, hogy $L \approx L_{tekercs}$, vagyis a tekercshez képest az áramkör egyéb induktivitásai elhanyagoplhatóak. Itt ismét felhasználhatjuk az Ohm-törvényt és az elktromotoros erõt, valamint azt, hogy a tekercsnek nincs ohmikus ellenállása, és ezért a tekercset alkotó vezetõben az elektromos térerõsség nulla. Tehát

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = I \cdot R, \quad \int_2^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \int_3^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\varepsilon \quad \Rightarrow \quad I \cdot R - \varepsilon = -L\dot{I}.$$

Tehát végülis az alábbi egyszerû differenciál-egyenlethez jutunk:

$$I \cdot R - \varepsilon = -L\dot{I}.$$

Mielõtt még ennek a differenciál-egyenletnek a megoldásával foglalkoznánk, írjuk fel ezt az egyenletet egy kicsit átrendezve:

$$IR + L\dot{I} - \varepsilon = 0.$$

Ez a felírás igencsak emlékeztet a Kirchhoff-féle huroktörvényre, csak az ohmikus feszültség és a telepfeszültség mellett még szerepel egy $L\dot{I}$ "induktív feszültség" is. Hogyan tudjuk ezt szemléletesen értelmezni? Képzeljünk el egy olyan zárt hurkot, amely körbemegy a teljes áramkör mentén, de a 2. és 3. pont között, vagyis a tekercs sarkai között nem a tekercs vezetéke mentén belül, hanem azon kívül halad. Ez a zárt hurok nem ölel körül jelentõs mágneses teret, tehát a hurkon belül jó közelítéssel feltételezhetjük, hogy $\mathbf{B}$, és így $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial}$, is zérus. Képletekkel

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{2,KÍV\cdot L}^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_3^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_R + U_L + U_{TELEP} = 0.$$

A fenti egyenlettel összehasonlítva

$$U_L = \int_{2,kívül}^3 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = L\dot{I}.$$

Tehát a legfontosabb tanulság amit levonhatunk az, hogy a Kirchhoff huroktörvényt tranziens állapotban lévõ hurokra is felírhatjuk, ha a hurokban lévõ tekercsek sarkain ***kívül*** megyünk körbe a hurokban. A tekecsen kívül mérhetõ feszültség így $L\dot{I}$.

Visszatérve a bekapcsolási jelenséget leíró differenciál-egyenletünkre, miszerint

$$IR + L\dot{I} = \varepsilon,$$

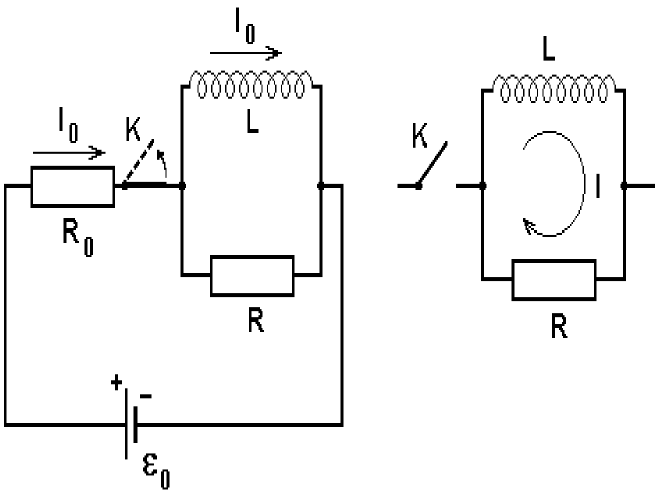
ez egy szeparálható egyenlet, amelynek a kezdeti feltételt kielégítõ megoldása a következõ:

$$I=\frac{\varepsilon}{R}\left[1-\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right].$$

VI. Kikapcsolási jelenségek. Az önindukciós tekercs és a mágneses tér energiája

Kiséret: glimmlámpa.

Az önindukciós tekercs energiájának a meghatározásához tekintsük az alábbi kapcsolást:



a) *b)*

Kikapcsolási jelenség önindukciós tekerccsel

a) a teljes áramkör (a K kapcsoló zárva) b) a "maradék áramkör" a kikapcsolás után

A K kapcsoló kezdetben legyen zárva (*a)* ábra). Ebben a helyzetben igen hosszú idõ után az önindukciós tekercsen

$$I_0=\frac{\varepsilon_0}{R_0}$$

áram fog folyni. A tekerccsel párhuzamosan kapcsolt R ellenálláson ugyanakkor nem folyik áram, mivel a tekercsnek zérus az ohmikus ellenállása, és ezért az összes áram rajta folyik keresztül. Ezután nyissuk a K kapcsolót. Az R_0 ellenálláson azonnal megszûnik az áram, nem így a tekercsbõl és az R ellenállásból álló "maradék" áramkörben. (A maradék áramkör a b) ábrán látható.) A tekercsen ugyanis az áram csökkenése a Lenz-törvény értelmében olyan feszültséget indukál, amely a tekercsen átfolyó áram fenntartására törekedik. A tekercsen az áram csak úgy tud fennmaradni, hogy most az R ellenálláson is átfolyik. Az áramnak az ellenálláson végzett munkája csökkenti a tekercs energiáját. Ha tehát meg tudjuk határozni, hogy az R ellenálláson összesen mennyi energia disszipálódik a K kapcsoló nyitása után, akkor, az energia megmaradása miatt, ez az R ellenálláson végzett összes munka nem lesz más, mint a tekercs energiája. Nézzük ezután a számolás részleteit! A maradék áramkörre felírhatjuk a Kirchhoff-féle huroktörvényt:

$$U_R+U_L=0,\quad \text{azaz}\quad RI+L\frac{dI}{dt}=0.$$

A fenti differenciál-egyenletnek a kezdeti feltételt is kielégítõ megoldása:

$$I = I_0 \exp(-\frac{R}{L} t).$$

Az ellenálláson végzett összes munkát megkaphatjuk, mint a rajta létrejövõ teljesítmény idõ szerinti integrálját :

$$W_R = \int_0^\infty P_R \, dt = \int_0^\infty I^2 R dt = I_0^2 R \int_0^\infty \exp(-2\frac{R}{L} t) \, dt = \frac{1}{2} L I_0^2.$$

Ehhez az eredményhez még rövidebben is eljuthatunk az alábbi megfontolásokkal:

$$W_R = \int_0^Q U_R \, dQ, \quad U_R = -U_L = -L\frac{dI}{dt}, \quad W_R = -L\int_0^Q \frac{dI}{dt} dQ = -L\int_0^\infty \frac{dI}{dt} I \, dt = -L\int_{I_0}^0 I \, dI = \frac{1}{2} L I_0^2.$$

A tekercs energiáját mágneses tér formájában tárolja. Érdekes kiszámítani a térfogategységben tárolt energiát, azaz a mágneses tér energiasûrûségét. Ehhez felhasználjuk a tekercs önindukciós együtthatójára már korábban levezetett formulánkat, miszerint

$$L = \frac{\mu n^2 A}{l},$$

ahol μ a tekercs belsejét kitöltõ anyag permeabilitása, n a tekercs menetszáma, A a keresztmetszete, l pedig a hossza. Ezt a kifejezést tehát behelyettesítjük a tekercs mágneses energiáját megadó képletbe:

$$E_M = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2}\frac{\mu n^2 A}{l} I^2 = \frac{1}{2}\frac{nI}{l}\cdot\frac{\mu nI}{l} A l = \frac{1}{2} H B V,$$

ahol V a tekercs térfogata. Innen a tekercs mágneses terének energiasûrûségét máris kifejezhetjük:

$$\rho_{E.MÁGNESES} = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}.$$

Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy amennyiben egy anizotróp közegrõl van szó, ahol H és B nem szükségszerûen kollineáris, akkor az energiasûrûség formulájában a H és B vektorok skalárszorzata veendõ. A skalárszorzattal megadott kifejezés az általánosabb, mivel az minden esetben érvényes.

Glimmlámpás kisérlet.

Kikapcsoláskor gyakran keletkezik szikra, ami nagy feszültségre utal. A kikapcsolási kisérletné is azt láthatjuk, hogy R ellenállás helyére kapcsolt glimmlámpa felvillan ami 80 V feletti feszültséget jelez, holott a telep feszültsége csak kb. 5-6V. Hogyan lehetséges ez? A kapcsoló zárt állásánál folyó áram

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{R_0}.$$

A kapcsoló kikapcsolásakor az R ellálláson létrejövő feszültség

$$U_0 = RI_0 = \frac{R}{R_0}\varepsilon_0.$$

Tehát amennyiben annyival nagyobb az R ellenállás az R_0-hoz képest a kezdeti feszültség is ugyanilyen arányban múlja felül az elektromotoros erőt, azaz a telep tehetetlen állapotban vett kapocsfeszültségét.

Kondenzátor kisütése ellenálláson keresztül. Kondenzátor energiája

Érdemes megjegyezni, hogy nemcsak egy tekercs energiáját mérhetjük meg úgy,hogy a kikapcsolási jelenség révén mérjük a mágneses térben tárolt eneriát, hanem a kondenzátor energiáját is megmérhetjük úgy, hogy egy ellenálláson keresztül kisütjük, és mérjük eközben az elektromos tér által az ellenálláson végzett munkát. Ennek belátásához tekintsük az alábbi hálózatot, amely egy C kapacitású kondenzátorból, egy R ellenállásból és egy K kapcsolóból áll.

Ábra

A kapcsoló zárásával indul meg a kondenzátor kisütése az ellenálláson keresztül. A kondenzátor kezdeti töltése legyen Q_0. Ha az áramkör induktivitását elhanyagoljuk, akkor az elektromos tér örvénymentes lesz, és ezért felírhatjuk a Kirchhoff huroktörvényt:

$$U_C + U_R = 0, \quad ahol \quad U_C = \frac{Q}{C} \quad és \quad U_R = I\,R.$$

Mivel az áram nem más mint a töltés idő szerinti deriváltja, ezért az alábbi szeperálható differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC},$$

amelynek megoldása:

$$Q(t) = Q_0 \exp\left[-\frac{t}{RC}\right].$$

Az áram ennek megfelelően

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{RC}\exp\left[-\frac{t}{RC}\right] = -I_0 \exp\left[-\frac{t}{RC}\right].$$

(Az áram azért negatív, mert az U_C felírásánál megállapodás szerint a feszültséget mindig úgy számítjuk, hogy a kondenzátor pozitív fegyverzetétől haladunk a negatív felé. Ez meghatározza azután a körüljárási irányt, amivel a kondenzátort kisütő áram iránya azonban ellentétes. Az ellenálláson ugyanis az áram ugyancsak a pozitív fegyverzettől a negatív felé irányul, ez azonban fordított körüljárásnak felel meg. (Miért?)

Még rövidebben azt mondhatjuk, hogy a kondenzátort töltő áram pozitív, a kisütő áram viszont negatív, jelen esetben pedig a kondenzátort éppen kisütjük, és ezért negatív az áram.)

A pillanatnyi teljesítmény az előbbiek alapján:

$$P = I^2 R = (I_0)^2 \exp\left[-\frac{2t}{RC}\right] R.$$

A kondenzátor teljes kisütése során végzett munka:

$$W = \int dW = \int_0^\infty P dt = \int_0^\infty (I_0)^2 R \exp\left[-\frac{2t}{RC}\right] dt = \frac{(Q_0)^2}{2C} = \frac{Q_0 U_0}{2} = \frac{(U_0)^2 C}{2},$$

ahogyan azt már a kondenzátor energiájának a kiszámításánál is láthattuk.

Szorgalmi feladat: egy töltetlen kondenzátort fel szeretnénk tölteni egy ε elektromotoros erejű teleppel egy R ellenálláson keresztül. E célból a kondenzátor egyik fegyverzetéhez kötjük a telep pozitív sarkát, a másik fegyverzethez pedig egy kapcsolót, amely egy ellenálláson keresztül létesít kapcsolatot a telep negatív sarka felé. A nulla időpillanatban zárjuk a kapcsolót. Hogyan változik a kondenzátor feszültsége és a töltő-áram az idő függvényében? Mekkora a feltöltött kondenzátor energiája, és mekkora munkavégzés történik az ellenálláson?