Váltakozó elektromágneses terek

I. Váltakozó feszültség és váltóáram elõállítása

Az elektromos áram mindennapi életünk fontos része. A 19. században Thomas Alva Edison és az általa alapított laboratórium munkatársai mutatták meg elsőként az elektromosság számos gyakorlati alkalmazási lehetőségét. Tudjuk, hogy az izzólámpa is Edison találmánya. (Bár ő szénszálat használt. Megjegyezzük, hogy a ma használt wolframszálas izzóhoz számos magyar találmány is fűződik. Bródy Imre, Tungsram, Egyesült Izzó. Ma General Electric.) Edison azonban egyenáramot használt, és fiatal asszisztense a szerb Nikolas Tesla javaslatait a váltóáram használatára rendre figyelmen kívül hagyta. Úgyhogy Tesla végülis a konkurrens Westinghouse Electric Company-hoz csatlakozott, és a két vállalat között hatalmas harc indult. Ez végülis az 1893-as csikágói világkiállításon dőlt el, ahol a Westinghouse, azaz Tesla váltóáramú generátorai és motorjai átütő sikert arattak. Az alábbi kísérlet és a hozzá csatlakozó levezetés a váltóáramú generátor alapelvét ismerteti.

Kísérlet: nagy műszer és mágnes + tekercs

Tekintsünk egy lapos tekercset, melynek menetszáma legyen n, keresztmetszete pedig legyen A. Helyezzük ezt a tekercset egy **B** indukciójú mágneses térbe. A lapos tekercs keresztmetszetére merőleges **A** irány és a **B** vektor által közbezárt szög legyen α. Ekkor a **B** tér fluxusa:

$$\Phi_B = n\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = n(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}) = nBA\cos\alpha.$$

Ha a lapos tekercset egy olyan tengely körül forgatjuk, amely merőleges mind az **A**-ra, mind a **B**-re, akkor

$$\alpha = \omega t + \alpha_0,$$

ahol ω a forgás szögsebessége, α_0 pedig a kezdeti szög. Ekkor a Faraday féle indukció törvény szerint a lapos tekercsben indukálódó feszültség:

$$U^i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d[nBA\cos(\omega t + \alpha_0)]}{dt} = nBA\sin(\omega t + \alpha_0),$$

vagyis az indukált feszültség színuszosan váltakozik:

$$U^i = U_0\sin(\omega t + \alpha_0),$$

ahol U_0 a maximális feszültség, vagyis a rezgés (a harmonikusan rezgő feszültség) amplitúdója. Ha bevezetünk egy új kezdő φ fáziszöget, amely az eredeti α_0–al az alábbi összefüggésben áll:

$$\alpha_0 = \varphi + \frac{\pi}{2},$$

akkor az indukált feszültség az alábbi formában is írható:

$$U^i = U_0\cos(\omega t + \varphi).$$

A továbbiakban (a forgóvektoros ill. komplex írásmód miatt, lásd később) ebben az alakban tekintjük majd a váltakozó feszültséget.

II. A váltakozó feszültség és áram komplex írásmódja

Idõben szinuszosan változó, azonos körfrekvenciájú mennyiségek összeadása

Ha azonos ω körfrekvenciával idõben színuszosan változó két mennyiség összegére vagyunk kíváncsiak, pl. két harmonikus rezgõmozgás pillanatnyi kitéréseinek összegét szeretnénk kiszámítani, akkor viszonylag egyszerû dolgunk csak akkor van, ha a két rezgõmozgás fázisa megegyezik. Jelölje ugyanis az egyik harmonikus rezgõmozgás pillanatnyi kitérését, amplitúdóját és fázisát rendre x_1, A_1, φ_1, ugyanezeket a mennyiségeket pedig a második rezgõmozgásra jelölje x_2, A_2, φ_2. Ezekkel a jelölésekkel

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Amennyiben a két rezgés kezdõfázisa megegyezik, azaz

$$\varphi_1 = \varphi_2 =: \varphi,$$

akkor a két rezgés összege könnyen felírható:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi) + A_2 \cos(\omega t + \varphi) = (A_1 + A_2)\cos(\omega t + \varphi).$$

Tehát ebben az egyszerû esetben egy olyan harmonikus rezgõmozgást kapunk eredményül, amelynek kezdõfázisa ugyanakkora mint a két összeadandó rezgésé, amplitúdója pedig egyszerûen a két rezgés amplitúdójának az összege. Nehezebben áttekinthetõ a helyzet, ha a két rezgés kezdõfázisa különbözik egymástól. Ekkor ránézéssel még azt is nehéz eldönteni, hogy a két rezgés összege is harmonikus rezgõmozgás lesz-e. Trigonometriai átalakítások után belátható, hogy egymástól különbözõ kezdõfázisok esetén is koszínuszos függvényt kapunk a két rezgés összegére, nevezetesen

$$A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = A \cos(\omega + t + \varphi),$$

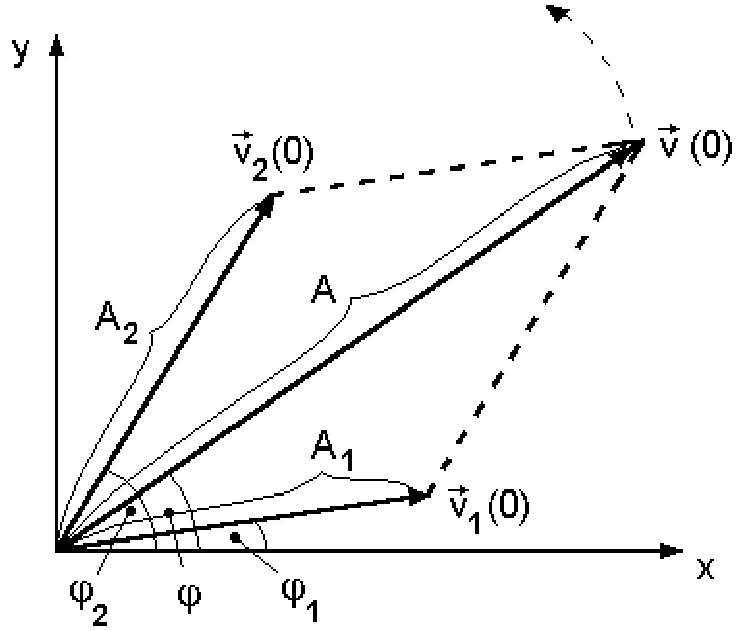
ahol

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad \text{valamint} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \right).$$

Ezeket a látszólag bonyodalmas összefüggéseket könnyen áttekinthetjük, ha a harmonikus rezgõmozgások összeadásához egy szemléletes geometriai módszert, a forgó vektorok módszerét alkalmazzuk.

Összeadás forgó vektorok segítségével

Mint tudjuk, az ω körfrekvenciájú harmonikus rezgõmozgás szemléletesen úgy fogható fel, mint egy ω szögsebességû körmozgás vetülete. Tekintsünk például az x-y síkban egy vektort, amely az origó körül forog egyenletes ω szögsebességgel az óramutató járásával ellentétes irányban. Ennek a vektornak az x tengelyen vett merõleges vetülete megadhatja pl. az elsõ harmonikus rezgõmozgásunk pillanatnyi $x_1(t)$ kitérését, feltéve, ha a $\boldsymbol{v}_1$(t)-vel jelölt forgó vektorunk hossza A_1, és a kezdeti idõpontban az x tengellyel bezárt szöge pedig φ_1. (Lásd az ábrát.) Ugyanígy $x_2(t)$ megadható, mint egy olyan $\boldsymbol{v}_2$ (t)-vel jelölt forgó vektor, melynek hossza A_2, az x tengellyel bezárt kezdeti szöge pedig φ_2.



A két rezgõmozgás összeadásának a feladata ezekután az alábbi formában írható fel:

$$x_1(t) + x_2(t) = Vet\{\mathbf{v}_1(t)\} + Vet\{\mathbf{v}_2(t)\},$$

ahol a "*Vet*" mûvelet alatt az értendõ, hogy vegyük a $\boldsymbol{v}$ vektornak az x tengelyre esõ vetületét, vagyis az x komponensét. Eddig a pontig a forgó vektoros módszer csak felesleges komplikációnak látszik. A módszer elõnyei a következõ lépésekben mutatkoznak meg. Elõször is, mivel a vektorok összeadása a megfelelõ komponensek összeadását jelenti, ezért a $\boldsymbol{v}_1$ és a $\boldsymbol{v}_2$ vektorok vetületeinek összegét úgy is ki lehet számítani, hogy elõbb a két vektort összeadjuk, és az eredõ vektornak képezzük a vetületét, vagyis

$$Vet\{\mathbf{v}_1(t)\} + Vet\{\mathbf{v}_2(t)\} = Vet\{\mathbf{v}_1(t) + \mathbf{v}_2(t)\} = Vet\{\mathbf{v}(t)\}.$$

Továbbá még azt is fontos észrevenni, hogy a két vektor ***azonos szögsebességgel forog***, és ezért a forgás közben az egymáshoz viszonyított ***relatív helyzetük nem változik.*** Ezért megtehetjük, hogy a két forgó vektort egy adott pillanatban, például a kezdõpillanatban összeadjuk,

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_1(0) + \mathbf{v}_2(0),$$

és a kezdõpillanatra így kijött eredõ $\boldsymbol{v}(0)$ vektort ω szögsebességgel "megforgatjuk". Vagyis a feladatot fix (rögzített) vektorok összeadására lehet visszavezetni, az eredõ vektor forgását elég késõbb számításba venni. A kétdimenziós álló és forgó vektorok matematikai leírására viszont a komplex számok a legalkalmasabbak. (Hiszen a komplex számokat szokás úgy is meghatározni, mint olyan kétdimenziós vektorokat, melyekre a skalár algebra valamennyi szabálya érvényes.) Ezért a vektoros számítási módot ezekután komplex számokkal fogjuk felírni.

Komplex írásmód, komplex amplitúdó

Az $x_1\,(t)$ -vel jelölt harmonikus rezgõmozgásunkhoz tehát rendeljük hozzá az alábbi, ω szögsebességgel forgó komplex számot:

$$\overline{\mathbf{X}_1(t)} = A_1 \exp\{i(\omega t + \varphi_1)\},$$

ahol a rezgõmozgásunk nem más, mint a fenti forgó komplex számnak a valós tengelyen vett vetülete, azaz

$$x_1(t) = \mathrm{Re}\{\overline{\mathbf{X}_1(t)}\}.$$

Mielõtt visszatérnénk eredeti feladatunkhoz, a két szinuszosan változó mennyiség összeadásához, írjuk fel a harmonikus rezgõmozgáshoz rendelt forgó komplex számot egy kissé más formában:

$$\overline{\mathbf{X}_1(t)} = A_1 \exp\{i(\omega t + \varphi_1)\} = A_1 \exp(i\varphi_1)\exp(i\omega t) = \overline{\mathbf{X}_1(0)}\exp(i\omega t),$$

ahol $A_1 \exp(i\varphi_1) = \overline{\mathbf{X}_1(0)}$ az ún. komplex amplitúdó. Ez nem más, mint a forgó komplex szám a t=0 idõpillanatban, és ennek a komplex számnak a forgatásáról az $\exp(i \cdot \omega \cdot t)$ szorzótényezõ "gondoskodik". Most már visszatérhetünk eredeti feladatunkhoz, aholis a két harmonikus rezgõmozgás eredõjét kerestük. Oldjuk meg ezt a feladatot a forgó komplex számok segítségével:

$$x_1(t) + x_2(t) = \mathrm{Re}\{\overline{\mathbf{X}_1(t)}\} + \mathrm{Re}\{\overline{\mathbf{X}_2(t)}\} = \mathrm{Re}\{\overline{\mathbf{X}_1(t)} + \overline{\mathbf{X}_2(t)}\} = \mathrm{Re}\left\{\left[\overline{\mathbf{X}_1(0)} + \overline{\mathbf{X}_2(0)}\right] \cdot \left[\exp(i\omega t)\right]\right\}.$$

Ebbõl a megoldásból jól látható, hogy az eredõ rezgés komplex amplitúdóját úgy kapjuk, mint két rezgés komplex amplitúdóinak összegét, és ez egy egyszerû, könnyen érthetõ és megjegyezhetõ szabály. Ezt a komplex amplitúdót azután az $\exp(i\omega t)$ szorzótényezõ ω szögsebességgel forgatja, és ennek a forgó komplex számnak a valós tengelyre vett vetülete adja az eredõ rezgést, mint az idõ függvényét.

Váltakozó áram és váltakozó feszültség komplex írásmódja

Az Olvasónak bizonyára feltűnt, hogy eddig a rezgések összetevésérõl beszélve elektromosságról nem sok szó esett, a rezgésekrõl mint mechanikai rezgésekrõl beszéltünk. Ez szándékosan történt így, mivel az idõben színuszosan változó mennyiségek komplex leírása volt a cél, és ennek illusztrálására bármilyen, mechanikai avagy elektromos rezgés egyaránt megfelel. x tehát egyaránt jelenthet mechanikai kitérést, elektromos áramot, avagy feszültséget is. A "a rend kedvéért" azonban most írjuk fel a váltakozó áramra illetve feszültségre érvényes analóg formulákat is:

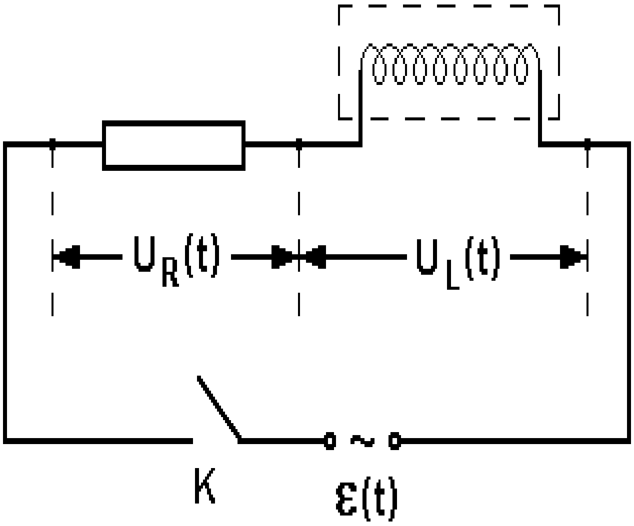
$$I(t) = I_{\max}\cos(\omega t + \varphi), \quad I(t) = \mathrm{Re}\{\overline{\mathbf{I}(t)}\}, \quad \overline{\mathbf{I}(t)} = \overline{\mathbf{I}(0)}\exp(i\omega t), \quad \overline{\mathbf{I}(0)} = I_{\max}\exp(i\varphi),$$

$$U(t) = U_{\max}\cos(\omega t + \varphi), \quad U(t) = \mathrm{Re}\{\overline{\mathbf{U}(t)}\}, \quad \overline{\mathbf{U}(t)} = \overline{\mathbf{U}(0)}\exp(i\omega t), \quad \overline{\mathbf{U}(0)} = U_{\max}\exp(i\varphi).$$

II. Váltakozó áramú áramkörök, komplex impedancia

Egy sorbakapcsolt tekercsbõl és ellenállásból álló váltóáramú hálózat számítása

Nézzük meg ezekután, hogy az elõzõekben ismertetett komplex írásmód hogyan segíti a váltóáramú számításokat! Ehhez tekintsük az alábbi áramkört:



Az áramkör szinte ugyanaz, mint amit már a bekapcsolási jelenségnél is tárgyaltunk, csak itt most nem egy idõben állandó ε elektromotoros erejû telepet kapcsolunk be, hanem egy idõben koszínuszosan váltakozó elektromotoros erõt:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{\max} \cos(\omega t + \varphi).$$

Ha a tekercsen kívül megyünk körbe az áramkörben, akkor felírható Kirchhoff huroktövénye (mert örvényes elektromos tér csak a tekercs belsejében van), tehát

$$U_R(t) + U_L(t) = \varepsilon(t), \quad \text{azaz} \quad R\,I(t) + L\frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon_{\max}\cos(\omega t + \varphi).$$

Ennek a differenciál-egyenletnek az $I(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítõ megoldása

$$I(t) = \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\left[\cos(\omega t + \varphi - \vartheta) + \exp(-\frac{R}{L}t)\cos(\varphi - \vartheta)\right], \quad \text{ahol} \quad \vartheta = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right).$$

Az idõ múlásával a bekapcsolási jelenséget leíró exponenciálisan csökkenõ tranziens tag hatása rohamosan csökken. Ezért a továbbiakban ezekkel a tranziensekkel nem kívánunk foglalkozni és feltételezzük, hogy a váltóáramú körben minden áram és feszültség tisztán koszínuszosan változik. Ekkor viszont nyugodtan alkalmazhatjuk a komplex írásmódot. Most nézzük meg, hogyan alkalmazható a komplex számítási mód a fenti probléma megoldására! Írjuk be tehát az áramot és az elektromotoros erõt komplex írásmóddal a fenti differenciál-egyenletbe:

$$R\ \mathrm{Re}\{\overline{\mathbf{I}(0)}\ \exp(i\,\omega t)\} + L\frac{d}{dt}\left[\mathrm{Re}\{\overline{\mathbf{I}(0)}\ \exp(i\,\omega t)\right] = \mathrm{Re}\{\overline{\varepsilon(\mathbf{0})}\ \exp(i\,\omega t)\}.$$

A fenti egyenletet célszerûen átrendezve a következõ alakra hozható:

$$\mathrm{Re}\left\{\left[R\ \overline{\mathbf{I}(0)} + i\,L\omega\overline{\mathbf{I}(0)} - \overline{\varepsilon(0)}\right]\exp(i\,\omega t)\right\} = 0.$$

A fenti forgó komplex szám valós része csak úgy lehet minden idõpillanatban zérus, hogy a komlex amplitúdó egyenlõ nullával, vagyis

$$R\ \overline{\mathbf{I}(0)} + i\ L\omega\overline{\mathbf{I}(0)} - \overline{\varepsilon(0)} = 0, \quad \text{ahonnan} \quad \overline{\mathbf{I}(0)} = \frac{\overline{\varepsilon(0)}}{R + i\ L\omega}.$$

Látható tehát, hogy a komplex számítási móddal a differenciál-egyenletbõl egy algebrai egyenlethez jutottunk, amely algebrai egyenletbõl az áramerõsség komplex amplitúdóját ki tudtuk fejezni. Ez pedig a feladat megoldását jelenti, hiszen a komplex amplitúdóból mind az áramerõsség maximumát, mind az áramerõsségnek a kapocsfeszültséghez képesti fázisszögét ki tudjuk számolni. Elõször az áramerõsség maximumát számoljuk ki, ami nem más mint a komplex áramamplitúdó abszolút értéke:

$$I_{\max} = \left|\overline{\mathbf{I}(0)}\right| = \frac{\left|\overline{\varepsilon(0)}\right|}{\left|R + i\,\omega L\right|} = \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Az áramerõsség pedig nyilvánvalóan akkora fázisszöggel lesz lemaradva a kapocsfeszültséghez képest, amennyit az $R+i\omega L$ komplex számmal való osztás jelent. Ez pedig könnyen számítható:

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right).$$

Így tehát felírhatjuk az áramerõsséget, mint az idõ függvényét

$$I(t) = \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cdot \cos(\omega t + \varphi - \vartheta),$$

ami nem más, mint a differenciál-egyenletünk megoldása a tranziens tagtól eltekintve. Az igazság azonban az, hogy az áramot mint az idõ függvényét a legritkább esetben szokás csak felírni, mert majdnem soha nem vagyunk arra kiváncsiak, hogy mekkora az áram egy adott idõpillanatban. (Azt úgyis tudjuk felírás nélkül is, hogy idõben koszínuszos függvényrõl van szó, melynek körfrekvenciája ω.) Ennél fontosabb számunkra az, hogy mekkora a maximális áramerõsség (vagy ami ezzel szorosan összefügg, mennyi az áramerõsség effektív értéke, amirõl majd késõbb lesz szó), avagy, hogy mennyi a fázisszög. Az áramerõsség komplex amplitúdója pedig mint láttuk, mindkét információt tartalmazza, tehát erre van igazán szükségünk.

A komplex impedancia bevezetése

Az elõzõekben láttuk, hogyan számítható ki az áramerõsség komplex amplitúdója. Most ezt ismét írjuk fel, de vezessünk be egy új jelölést .

$$\overline{\mathbf{I}(0)} = \frac{\overline{\varepsilon(0)}}{R + i\,\omega L} = \frac{\overline{\varepsilon(0)}}{\overline{\mathbf{Z}}_{RL}}, \quad \text{ahol} \quad \overline{\mathbf{Z}}_{RL} = R + i\,\omega L.$$

A $\overline{\mathbf{Z}}_{RL}$ komplex számot a fenti soros RL kör ***komplex impedanciájának*** mondjuk. Hasonló összefüggések írhatók fel a feszültség és az áramerõsség komplex amplitúdói között külön az ellenálláson és a tekercsen is:

$$\overline{\mathbf{I}_R(0)} = \frac{\overline{\mathbf{U}_R(0)}}{\overline{\mathbf{Z}}_R}, \quad \text{ahol} \quad \overline{\mathbf{Z}}_R = R, \quad \text{valamint} \quad \overline{\mathbf{I}_L(0)} = \frac{\overline{\mathbf{U}_L(0)}}{\overline{\mathbf{Z}}_L}, \quad \text{ahol} \quad \overline{\mathbf{Z}}_L = i\,L\,\omega.$$

Eddig még nem volt szó a kondenzátorról, mint áramköri elemrõl a váltakozó áramú hálózatban. A kondenzátoron átfolyó áram komplex amplitúdója és a rajta esõ feszültség komplex amplitúdója között formailag hasonló összefüggést írhatunk fel, mint a tekercs és az ellenállás esetében, de a kondenzátor komplex impedanciája természetesen másként számítandó. A levezetésnél a kondenzátor feszültsége, töltése és kapacitása között fennálló ismert összefüggésbõl indulunk ki:

$$U_C = \frac{Q_C}{C}, \quad \Rightarrow \quad U_C(t) = \frac{Q_C(t)}{C} = \frac{\int I_C(t)dt}{C}, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\{\overline{\mathbf{U}_C(t)}\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\int \overline{\mathbf{I}_C(t)}dt}{C}\right\}.$$

Ezekután ismét felhasználjuk a váltakozó feszültség és áram komplex irásmódját:

$$\overline{\mathbf{U}_C(t)} = \overline{\mathbf{U}_C(0)} \cdot \exp(i\,\omega t), \quad \text{valamint} \quad \overline{\mathbf{I}_C(t)} = \overline{\mathbf{I}_C(0)} \cdot \exp(i\,\omega t).$$

A kondenzátoron átfolyó komplex áramerõsség integrálja ezekután kiszámítható:

$$\int \overline{\mathbf{I}_C(t)}dt = \overline{\mathbf{I}_C(0)} \int \exp(i\omega t)dt = \frac{\overline{\mathbf{I}_C(0)}}{i\omega}\exp(i\omega t).$$

(Itt tulajdonképpen még egy integrációs állandónak is kellene szerepelnie, ami a kondenzátor átlagfeszültségét jelenti. Ez azonban váltakozó áramkörben a bekapcsolás után hosszú idõvel zérus.) Ha az integrálra kapott eredményt ezekután felhasználjuk, akkor hasonló átalakítások után, mint amilyeneket az RL kör esetében is csináltunk, a komplex amplitúdók közötti alábbi összefüggéshez jutunk:

$$\overline{\mathbf{U}_C(0)} = \frac{\overline{\mathbf{I}_C(0)}}{i\omega C}, \quad \text{vagy} \quad \overline{\mathbf{I}_C(0)} = \frac{\overline{\mathbf{U}_C(0)}}{\overline{\mathbf{Z}}_C}, \quad \text{ahol} \quad \overline{\mathbf{Z}}_C = \frac{1}{i\omega C}.$$

Tehát most már ismerjük a tekercs és az ellenállás mellett a kondenzátor komplex impedanciáját is. A következõ kérdés, hogyan számíthatók olyan hálózatok, amelyek e háromféle komplex impedanciát tartalmazzák valamilyen tetszõleges kapcsolásban? E számításokhoz a Kirchhoff-féle törvények komplex analogonjára van szükségünk.

A Kirchhoff-törvények a komplex amplitúdókra

Amint arról már szó volt, egy zárt hurokban a pillanatnyi feszültségekre érvényes a Kirchhoff-féle huroktörvény, feltéve, hogy a tekercseken kívül és nem belül zárul a hurok. Tehát felírható, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} U_i(t) = \varepsilon(t), \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Re}\left\{\overline{\mathbf{U}_i(t)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\overline{\varepsilon(t)}\right\}, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\left\{\left[\overline{\varepsilon(\mathbf{0})} - \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathbf{U}_i(0)}\right]\exp(i\omega t)\right\} = 0,$$

amibõl következik a komplex feszültség-amplitúdókra érvényes huroktörvény:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathbf{U}_i(0)} = \overline{\varepsilon(0)}.$$

Hasonló módon látható be a csomóponti törvény is. A pillanatnyi áramokra felírt csomóponti törvénybõl vezethetõ le a komplex áramamplítúdókra érvényes csomóponti törvény, mely szerint:

$$\sum_{k=1}^{m} \overline{\mathbf{I}_k(0)} = 0,$$

vagyis egy csomópontra nézve a komplex áramamplitúdók összege zérus.

Komplex impedanciák soros és párhuzamos kapcsolása

Komplex impedanciák soros kapcsolása esetén az eredõ komplex feszültség-amplitúdó egyenlõ az egyes impedanciák komplex feszütség-amplitúdóinak összegével. (Huroktörvény.) Továbbá felírhatjuk a komplex feszültség- és áramamplitúdók közötti összefüggést is, figyelembevéve, hogy soros kapcsolás lévén valamennyi impedancián azonos az áram. Tehát

$$\overline{\mathbf{U}_E(0)} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathbf{U}_i(0)}, \quad \overline{\mathbf{U}_E(0)} = \overline{\mathbf{Z}}_E\, \overline{\mathbf{I}(0)}, \quad \overline{\mathbf{U}_i(0)} = \overline{\mathbf{Z}}_i\, \overline{\mathbf{I}(0)}, \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathbf{Z}}_E = \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathbf{Z}}_i,$$

vagyis soros kapcsolás esetén az eredõ komplex impedancia egyenlõ a részimpedanciák összegével.

A párhuzamos kapcsolásra érvényes formula levezetésénél a csomóponti törvénynek a komplex áramamplitúdókra érvényes alakjából indulhatunk ki, továbbá figyelembe kell venni, hogy párhuzamos kapcsolásnál valamennyi impedancián azonos a feszültség. A levezetés végeredménye az a jól ismert képlet, miszerint

$$\frac{1}{\overline{\mathbf{Z}}_E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\overline{\mathbf{Z}}_i},$$

vagyis párhuzamosan kapcsolt komplex impedanciák eredõjének a reciproka egyenlõ a részimpedanciák reciprokainak összegével.