IV. A váltóáram teljesítménye. Az áramerősség és a feszültség effektív értéke

A pillanatnyi teljesítmény

A váltóáram pillanatnyi teljesítménye P(t) az adott pillanatban mért feszültség U(t) és áram I(t) szorzata:

$$P(t) = U(t)\, I(t).$$

Tételezzük fel, hogy a feszültség és az áram időfüggése az alábbi formában van adva:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t),$$
$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Ha φ pozitív, ez azt jelenti, hogy az áram siet a feszültséghez képest. Ez olyan impedanciát jelent, ahol az imaginárius rész negatív (pl. kondenzátorokat és ellenállásokat tartalmazó hálózat). Negatív φ esetén fordított a helyzet, ebben az esetben a feszültség siet az áramhoz képest (vagy azt is mondhatjuk, hogy az áram késik a feszültséghez viszonyítva). Ez utóbbi impedancia pedig pl. ellenállásokkal és tekercsekkel valósítható meg.(A tekercs és ellenállás mellet kondenzátor is előfordulhat, de a komplex impedancia imaginárius részének mindenképpen pozitívnak kell lennie.) Tehát a pillanatnyi teljesítmény

$$P(t) = U_0\, I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi).$$

Figyelembe véve, hogy

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)$$
$$P(t) = U_0\, I_0 [\cos^2(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin(\varphi)].$$

A fenti kifejezést még tovább alakíthatjuk az alábbi két trigonometrikus azonosság segítségével:

$$\cos^2(\alpha) = [1 + \cos(2\alpha)]/2, \quad \text{valamint} \quad \cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) = [\sin(2\alpha)]/2,$$
$$P(t) = [(U_0\, I_0)/2]\, [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t) \cos(\varphi) - \sin(2\omega t) \sin(\varphi)],$$

ami végülis az alábbi alakba írható:

$$P(t) = [(U_0\, I_0)/2]\, [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)].$$

Vagyis úgy foghatjuk fel, hogy a pillanatnyi teljesítmény egy időben állandó tag

$$P(\text{állandó}) = [(U_0\, I_0)/2] \cos(\varphi)$$

és egy időben az alapfrekvencia kétszeresével periódikusan változó tag

$$P(\text{változó}) = [(U_0\, I_0)/2] \cos(2\omega t + \varphi)$$

Összege. Tehát

$$P(t) = P(\text{állandó}) + P(\text{változó}).$$

Az átlagteljesítmény

Az átlagteljesítmény valamilyen időintervallumra úgy számítható, hogy a kérdéses intervallumban végzett munkát elosztjuk az intervallum hosszával:

$$P(álag) = \frac{W(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}.$$

A $W(t_1,t_2)$, vagyis a t_1 és t_2 időpontok között végzett munkát a pillanatnyi teljesítmény ezen határok közötti időszerinti integráljaként adhatjuk meg, azaz

$$W(t_1, t_2) = \int_1^2 P(t)dt.$$

Tudjuk, hogy a pillanatnyi teljesítmény egy állandó és egy periódikusan változó tag összege. Az állandó tag időátlaga nyilván állandó lesz, a periódikusé pedig hosszú idő után közel nulla, sőt amikor az időintervallum a periódusidő többszöröse, akkor pontosan is az, hiszen teljes perióusokra az integrál nulla. Tehát

$$W(t_1,t_2) \approx P(\text{állandó})\, (t_2 - t_1) = [(U_0\, I_0)/2] \cos(\varphi)\, (t_2 - t_1) \quad \text{és}$$

$$P(\text{átlag}) \approx P(\text{állandó}) = [(U_0 \cdot I_0)/2]\cdot\cos(\varphi)$$

Effektív feszültség és áramerősség

Bevezethetjük az effektív feszültség és áramerősség fogalmát úgy, hogy ezek legyenek a megfelelő amplitúdó értékek osztva négyzetgyök kettővel, azaz

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \qquad I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

Ekkor az átlagteljesítmény

$$P(\text{átlag}) = (U_{eff}\, I_{eff})\cos(\varphi).$$

Ezekután az effektív értékeket úgy értelemzhetjük, hogy ezek olyan egyenfeszültséget illetve egyenáramot jelentenek, amelyek teljesítménye egy ohmikus ellenálláson megegyezik a váltóáram teljesítményével. Az ohmikus ellenálláson ugyanis az áram és a feszültség szinkronban vannak, azaz $\varphi=0$ és $\cos(\varphi) =1$. Ekkor

$$P(\text{átlag}) = U_{eff}\, I_{eff},$$

ami analóg az egyenáramra jól ismert

$$P = U\, I$$

formulával. Ohmikus ellenállásra a fentiekből adódóan érvényesek az egyenáramú teljesítményre megismert alternatív képletek analógjai is:

$$P(\text{átlag}) = U_{eff}\cdot I_{eff} = R\,(I_{eff})^2 = (U_{eff})^2/R.$$

Nulla és negatív teljesítmény értelmezése váltóáram esetén

Tisztán kondenzátorokból, vagy ideális tekercsekből, avagy a kettő keverékéből álló hálózatokra a $\cos(\varphi) = 0$ (mert $\varphi=\pi/2$ vagy $\varphi=-\pi/2$), vagyis ezeken az elemeken az átlagteljesítmény zérus, a pillanatnyi teljesítmény azonban általában nem 0. Hogyan értelmezhető ez? A pillanatnyi teljesítmény két komponenséből a P(állandó) most zérus lesz, mert $\cos(\varphi) =0$. A P(változó) viszont nem 0, hanem

$$P(\text{változó}) = [(U_0\, I_0)/2]\cos(2\omega t + \varphi),$$

és tekintetbe véve, hogy $\varphi=\pm\pi/2$, így

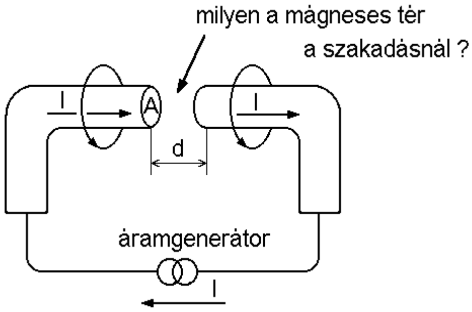
$$P(\text{változó}) = \pm[-U_0\, I_0)/2]\sin(2\omega t).$$

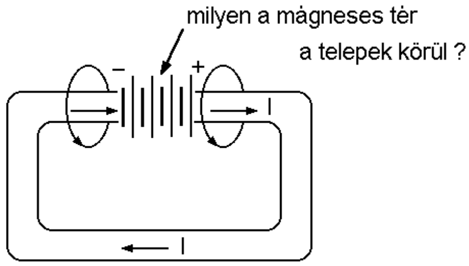
Tehát a változó rész mindenképpen egy olyan periódikus függvény, amely a periódusidő egyik felében pozitiv, a másik felében pedig negatív, és csak a teljes periódusidőre érvényes az, hogy a teljesítmény átlagban zérus. Mit értsünk pozitív illetve negatív teljesítményen? Az ohmikus ellenálláson egyszerű a helyzet: a pilanatnyi teljesítmény ott csak pozitív lehet (miért? Bizonyítsuk!), és ott az elektromos tér munkája hő formájában disszipálódik a környezetbe. De mi a helyzet a kondenzátoron és a tekercsen? Nos a kondenzátorban a periódusidő felében a kondenzátor töltődik. Az elektromos tér munkát végez, ami a kondenzátor elektromos terének a felépítésére fordítódik. Ekkor a hálózat teljesítménye pozitív. A periódusidő másik felében a kondenzátor lemezei között feszülő elektromos tér lebomlik, és energiáját visszaadja a hálózatnak. A hálózat teljesítménye eközben negatív. A tekercsnél a tekercs belsejében periódikusan fel és leépülő mágneses térrel kapcsolatban mondhatjuk el ugyanezeket a dolgokat.

Gyorsan változó terek és elektromágneses hullámok

Az eltolási áram

Tekintsük az alábbi a) ábrán látható elektromos áramkört, amely egy állandó *I* áramot adó áramgenerátorból, továbbá egy vastag -például körkeresztmetszetű- vezetőből áll, amely vezető egy ponton át van vágva:





a)
Maxwell problémája

b)
Ampere problémája

Az elvágott felületek egymáshoz közel, d távolságra helyezkedjenek el egymástól, és ezt a térközt egy ε permittivitású szigetelőanyag töltse ki. Így tehát tulajdonképpen egy síkkondenzátorhoz jutunk, amelynek kapacitása:

$$C = \frac{\varepsilon A}{d},$$

ahol A a vezeték keresztmetszete, amely jelen esetben egyúttal a kondezátor egyik vagy másik fegyverzetének a felülete is. A síkkondenzátoron az I áram a töltést egyenletesen növeli:

$$\frac{dQ}{dt} = I,$$

és így az áramkörben annak dacára folyhat áram, hogy benne szakadás van, mivel ez az áram nem más, mint az említett kondenzátor töltőárama. A kondenzátor fegyverzetei között azonban természetesen nem folyik olyan vezetési áram, mint amilyet a vezeték egyéb, el nem vágott keresztmetszetein keresztül mérhetünk. Ezeken a keresztmetszeteken ugyanis töltés halad át, míg a kondenzátor fegyverzetei között elhelyezkedő keresztmetszeteken nem, hiszen ezt a részt szigetelő anyag tölti ki. Fölmerül a kérdés, hogy vajon "észreveszi-e" a mágneses tér, hogy a kondenzátor lemezei között nincs vezetési áram? (Például úgy, hogy a kérdéses részen másmilyen, pl. nem örvényes a máneses tér, esetleg nincs is jelen.) Ezen a kérdésen egy skót fizikus, bizonyos James C. Maxwell gondolkozott el elsőként, és a kérdésre adott válaszával pedig teljessé tette az elektrodinamika elméletét. Mielőtt azonban Maxwell válaszát ismertetnénk, hadd említsük meg, hogy ehhez némileg hasonló problémával már André Marie Ampere francia fizikus is szembetalálkozott majd fél évszázaddal korábban. Ampere, mint tudjuk, az áramtól átfolyt vezetők mágneses terét tanulmányozta, és kísérleteiben áramforrásként galvánelemeket alkalmazott. Ampere azt a kérdést is feltette magának, hogy vajon egy galvánelem körül létesül-e mágneses tér, miközben elektromos áramot ad le. Ezt kísérletileg is meg tudta vizsgálni. Azt tapasztalta, hogy a galvánelem körül ugyanolyan mágneses tér jön létre, mint egy fémes vezető körül, a mágneses tér pedig csakis az áram erősségétől függ, a vezetés mechanizmusától (fémes, illetve ionos vezetés mai fogalmaink szerint) viszont nem. Ha tehát egy galvánelem sarkait egy fémdróttal kötjük össze, akkor a dróton átfolyó áram a drót körül örvényes mágneses teret létesít (*b)* ábra). Ez a mágneses tér azonban nem szűnik meg a telep sarkainál, hanem a telep belsejében folyó áramot ugyanolyan örvényesen öleli körül, mint ahogy kívül, a fémdróton folyó áramot. A mágneses tér tehát "nem veszi észre", hogy a telep belsejében valamiféle "másfajta" áram folyna, mint a fémdrótban. Maxwell az általa felvetett problémára hasonló választ adott. Szerinte a feltöltődő kondenzátor lemezei között ugyanolyan örvényes mágneses tér létesül, mintha a töltőáramnak megfelelő áram folyna a fegyverzetek között is, bár ott mint láttuk, vezetési áram nincs. Ezt a fegyverzetek között feltételezett áramot nevezzük eltolási áramnak. (Ha zárójelben is, de rá kell mutatnunk ennek az egyszerű gondolatnak a zsenialitására. Maxwell ugyanis jóval nehezebb feladatot oldott meg, mint Ampere. Egyrészt az áramfogalmat kellett merészen általánosítania, másrészt neki a kísérleti ellenőrzésre sem volt lehetősége. Feltételezéseit Hertz kísérletei csak 20 ével később igazolták.) Most térjünk vissza az eltolási áram magyarázatához az a) ábra segítségével. A kondenzátor fegyverzetei között, vagyis a vezetékszakadás helyén, szeretnénk egy fizikailag mérhető mennyiséget definiálni, ami egyenlő a vezetőben folyó áramerősséggel, mivel tudjuk, hogy ugyanolyan mágneses teret kelt. Ezt a szimbolikus áramot azonban nem lehet úgy meghatározni, ahogy megszoktuk, vagyis mint a keresztmetszeten az időegység alatt átmenő töltésmennyiséget, hiszen a kondenzátor lemezei között nincsen semmiféle töltés. Van azonban egy időben változó **E** és **D** tér, amit mérni lehet, és amelyeknek a változási sebességét kapcsolatba hozhatjuk a vezetőben folyó *I* árammal. Az *I* áram ugyanis ahogy tölti a kondenzátort, úgy növeli annak feszültségét, és ezzel **E**-t és **D**-t is:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(C\,U) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon A}{d}U\right) = A\frac{d}{dt}\left(\varepsilon\frac{U}{d}\right) = A\frac{d}{dt}(\varepsilon E) = A\frac{dD}{dt},$$

Ha tehát a kondenzátor felületének és a lemezek között mérhető dielektromos eltolás vektor változási sebességének a szorzatát képezzük, akkor egy olyan mennyiséghez jutunk, ami egyenlő az áramkör más helyein folyó vezetési árammal, és amit eltolási áramnak nevezünk:

$$I_{\text{ELTOLÁSI}} = A\dot{D}.$$

Az eltolási áram sűrűsége pedig

$$j_{\text{ELTOLÁSI}} = \dot{D}.$$

Természetesen ez az eltolási áram csak abból a szempontból tekinthető áramnak, hogy ugyanúgy mágneses teret kelt, mint a töltések mozgása, de ezt anélkül teszi, hogy a vizsgált keresztmetszeten ténylegesen töltések haladnának át. (Ha tehát áramon továbbra is csak a töltések mozgását értjük, akkor ilyen értelemben az eltolási áram nem "igazi" áram. Ha viszont mindent, ami örvényes mágneses teret kelt, áramnak nevezünk, akkor az eltolási áram is az áram egyik fajtája.) Megjegyzendő, hogy fenti példánkban, mivel a vezeték keresztmetszete éppen egyenlő a kondenzátor lemezfelületével, nemcsak a vezetőben folyó áram egyezik meg a kondenzátor lemezei között folyó eltolási árammal, de itt még kivételesen a vezetési és az eltolási áram sűrűsége is ugyanaz. Az eltolási áramsűrűség levezetése erre alapozva még egyszerűbb lehet. Ugyanis

$$I_{\text{VEZETÉSI}} = \frac{dQ}{dt}, \quad I_{\text{VEZETÉSI}} = A\,j_{\text{VEZETÉSI}}, \quad Q = A\cdot\sigma, \quad \Rightarrow \quad j_{\text{VEZETÉSI}} = \dot{\sigma}.$$

Továbbá vezető felületén érvényes, hogy $\mathcal{D} = \sigma$, és így

$$j_{\text{VEZETÉSI}} = \dot{\sigma}, \quad \sigma = D, \quad j_{\text{VEZETÉSI}} = j_{\text{ELTOLÁSI}}, \quad \Rightarrow \quad j_{\text{ELTOLÁSI}} = \dot{D}.$$

A fenti példa abból a szempontból is speciális volt, hogy a vezetőben csak vezetési, a szigetelőben pedig csak eltolási áramot tételeztünk fel. A valóságban ez általában nincs így, hiszen nincsenek tökéletes vezetők és szigetelők. Például, ha a kondenzátor lemezei közötti teret desztillált vízzel töltjük ki, akkor az eltolási áram mellett egy pici vezetési áram is fel fog lépni. A létrejövő mágneses tér örvényességét pedig ebben az esetben nyilván a kétféle (vezetési és eltolási) áram ***összege*** fogja megszabni. Ezt fejezi ki az első Maxwell egyenlet, miszerint:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\mathrm{ELTOLÁSI}} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$