A Maxwell-egyenletek és az elektromágneses hullámok

A hullámegyenlet

A Maxwell-egyenletek egyik legérdekesebb tulajdonsága, hogy ezeknek az egyenleteknek van hullámmegoldásuk is. A mechanikából már ismerjük a hullámegyenletet, amely egy háromdimenziós rugalmas közegben *c* sebességgel terjedõ hullámra az alábbi formában írható fel:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = c^2\,\Delta\Psi, \quad \text{ahol} \quad \Delta . = \frac{\partial^2 .}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 .}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 .}{\partial z^2},$$

ahol Ψ a rugalmas közeg kitérése az egyensúlyi helyzethez képest. Amennyiben ez a kitérés merõleges a hullámterjedés irányára, úgy transzverzális, ha pedig a kitérés egyirányú a hullámterjedés irányával, úgy longitudinális hullámokról beszélünk. Egy *x* tengely mentén terjedõ síkhullám esetében, amikoris a kitérés csak az *x* koordinátától függ, az *y*-tól és *z*-tõl nem, akkor a hullámegyenlet az alábbi formára egyszerûsödik:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}.$$

Könnyen meggyõzõdhetünk róla, hogy a fenti parciális differenciálegyenletnek van haladó hullámú megoldása. Ha ugyanis a Ψ kitérés tetszõleges függvénye az *(x - ct)* avagy az *(x + ct)* argumentumoknak , akkor a Ψ kitérés *c* sebességgel terjed a pozitív, illetve a negatív *x* tengely irányába. Arról pedig a differenciálegyenletbe való behelyettesítéssel gyõzõdhetünk meg, hogy a

$$\Psi(x,t) = \Psi(x - c\,t), \Psi(x,t) = \Psi(x + c\,t)$$

függvények kielégítik a differenciálegyenletet.

A hullámegyenlet levezetése a Maxwell-egyenletekbõl

Induljunk ki a Maxwell-egyenleteknek a vákuumra érvényes alakjából, feltételezve, hogy töltések nincsenek jelen, azaz ρ=0, és áram sem folyik **j=0**.

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \varepsilon_0\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mu_0\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\mathbf{H} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{E} = 0.$$

Képezzük az elsõ egyenlet mindkét oldalának a rotációját:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{H}) = \mathrm{rot}\left(\varepsilon_0\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{H}) - \Delta\mathbf{H} = \varepsilon_0\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\mathbf{E}),$$

majd pedig ebbe az egyenletbe helyettesítsük be a harmadik és a második Maxwell-egyenletet is:

$$-\Delta\mathbf{H} = \varepsilon_0\,\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0\,\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right), \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\,\Delta\mathbf{H}.$$

Látható tehát, hogy a **H** mágneses térerõsségre vonatkozó hullámegyenlethez jutottunk. Teljesen hasonló módon juthatunk az **E** elektromos térerõsségre vonatkozó hullámegyenlethez is. Ez utóbbi esetben a kiindulási pont a második Maxwell-egyenlet, és ennek képezzük a rotációját. A hullámegyenlettel összevetve az elektromágneses hullámok terjedési sebessége a vákuumban:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

Ha behelyettesítjük a számértékeket:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\, 9\cdot 10^9}\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}, \quad \mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}, \quad \Rightarrow \quad c_0 = 3\cdot 10^8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 300000\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}},$$

ami éppen a vákuumban mért fénysebességgel egyenlõ. Ez az összefüggés vezette Maxwellt arra a felismerésre, hogy a fény nem más, mint elektromágneses hullám. Az elektromágneses hullámok létét azonban minden kétséget kizáró módon csak Hertz híres kísérlete bizonyította be sok évvel késõbb. Megjegyezzük, hogy a Maxwell-egyenletekbõl az is levezethetõ, és ezt az *optika* tárgyalásánál be is fogjuk mutatni, hogy az idõben és térben változó elektromos és mágneses térerõsség a hullámterjedés irányára merõleges, vagyis az elektromágneses hullámok transzverzálisak. Egy másik érdekes és alapvetõ kérdés, amit szintén késõbbi tanulmányaink során fogunk megvizsgálni, miszerint mihez képest értendõ a fénysebesség? Erre a problémára a *speciális relativitás elmélete* ad választ, melyet Albert Einstein fejlesztett ki e század elején.

A töltésmérleg és -megmaradás levezetése a Maxwell-egyeletekbõl

Mérlegegyenlet és megmaradási törvény

Mielõtt rátérnénk a levezetés ismertetésére, röviden ismételjük át, hogy mit is értünk mérlegegyenleten, illetve mit is jelent egy megmaradási törvény. A mérlegegyenlet extenzív, az anyagmennyiséggel arányos mennyiségekre vonatkozik. Példának okáért legyen ez egy kémiai komponens -mondjuk sósav- mennyisége egy kémiai reaktorban. A reaktorba folyamatosan áramoljon be hidrogén- és klórgáz, amelyek a reaktorban sósavgázzá égnek el. A sósavgáz móljainak számát a reaktor belsejében jelölje N_{HCl}. A sósavgázra vonatkozó globális (integrális) mérlegegyenlet ekkor a következõ:

$$\frac{dN_{HCl}}{dt} = -I_{HCl} + P_{HCl},$$

ahol P_{HCl} a sósavgáz forráserõssége a reaktorban (a reaktorban idõegység alatt képzõdõ sósavmólok száma), I_{HCl} pedig a sósavnak a reaktor felületére vonatkozó áramerõssége (amely megmutatja, hogy idõegység alatt hány mól sósav távozik a reaktorból). A mérlegegyenlet tehát azt mondja, hogy a sósav mennyisége két ok miatt változhat meg a reaktorban: 1.) a ki- és beáramlás miatt, 2.) avagy a képzõdés illetve a bomlás miatt. Megmaradó menyiségre a forráserõsség zérus. A fenti reaktorban például a klóratomokra érvényes a megmaradási törvény. Ez nem jelenti azt, hogy a reaktorban ne változhatna a klóratomok száma -pl. a reaktor leállításánál megszûntetjük a klór beáramlását, és ekkor a reaktorban lévõ klóratomok száma csökken - hanem csak annyit, hogy a reaktorban nem ***képzõdnek***, avagy nem ***semmisülnek meg*** klóratomok**.** A sósavra vonatkozó mérlegegyenletet lokális alakban is felírhatjuk:

$$\frac{\partial [\mathrm{HCl}]}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}_{HCl} = \sigma_{HCL},$$

ahol $[\mathrm{HCl}]$ a sósavkoncentráció a reaktor egy pontjában, $\mathrm{div}\,\mathbf{j}_{HCl}$ a sósavgáz áramsûrûségének a forrássûrûsége a reaktornak ugyanabban a pontjában, és végül σ_{HCl} pedig a sósav képzõdési (produkció-) sûrûsége ismét csak a reaktornak ugyanazon pontjában. A lokális mérleg tehát a reaktor, avagy általánosságban a tér egy pontjára vonatkozik. A megmaradó mennyiségeket az jellemzi, hogy a térnek egyetlen pontjában sem képzõdnek, avagy semmisülnek meg, azaz produkciósûrûségük a tér minden pontjában zérus.

Ezekután térjünk vissza a töltésmérleg, illetve -megmaradás levezetésére a Maxwell-egyenletekbõl kiindulva.

Töltésmérleg és -megmaradás

Az elsõ Maxwell-egyenletbõl induljunk ki, és képezzük mindkét oldal divergenciáját:

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{H}) = \mathrm{div}\left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right), \quad \Rightarrow \quad 0 = \mathrm{div}\mathbf{j} + \mathrm{div}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{div}\mathbf{j} + \frac{\partial(\mathrm{div}\mathbf{D})}{\partial t} = 0,$$

mivel bármely vektortér rotációjának a divergenciája zérus. Ezekután vegyük figyelembe a IV. Maxwell-egyenletet, és helyettesítsük be a fenti eredményünkbe. Tehát:

$$\frac{\partial(\mathrm{div}\mathbf{D})}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{D} = \rho, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0.$$

Vagyis az elektromos töltésre vonatkozóan egy olyan lokális mérlegegyenlethez jutottunk, ahol a produkciósûrûség mindenütt zérus. Ez tehát nem más, mint a töltésmegmaradás törvénye. Vagyis a Maxwell-egyenletekben benne van a töltésmegmaradás törvénye, miszerint elektromos töltés nem keletkezhet és nem is semmisülhet meg. Ez azonban nem jelenti azt, hogy pl. töltött részecskék ne keletkezhetnének, avagy ne tûnhetnének el, csak e folyamatok közben a töltésmegmaradásnak mindig teljesülnie kell. Például egy negatív töltésû elektron és egy pozitív töltésû pozitron egymással találkozva eltûnik (annihilálódik), és eközben két gamma foton keletkezik (annihilációs sugárzás). Töltés azonban nem tûnik el a folyamatban, mert a negatív és pozitív töltések ***összege*** nem változik.

A Poynting-vektor és az energiamérleg levezetése a Maxwell-egyenletekbõl

A kondenzátor, illetve a tekercs energiájának kapcsán már volt szó az elektromos, illetve a mágneses tér energiasûrûségérõl:

$$\rho_{\mathrm{ENERGIA,ELEKTROMOS}} = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}, \quad \rho_{\mathrm{ENERGIA,MÁGNESES}} = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}.$$

Ha mindkét tér jelen van, akkor ennek az elektromágneses térnek az energiasûrûsége nyilvánvalóan az elõbbi két energiasûrûségnek az összege:

$$\rho_{\mathrm{ENERGIA}} = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}.$$

Most szeretnénk az elektromágneses energiára vonatkozó mérlegegyenletet felírni. Még mielõtt felírnánk ezt az egyenletet, feleljünk arra a kérdésre, hogy vajon itt érvényes lesz-e a megmaradás. Az energiamegmaradás törvényére asszociálva elõször talán azt válaszolnánk, hogy igen. Jobban belegondolva azonban rá kell jönnünk, hogy az elektromágneses energia, ugyanúgy mint pl. a mechanikai energia, az energiának csak egy ***fajtája***, és mint ilyenre nem szükségszerûen érvényes rá a megmaradás. Jelen esetben pl. engedjük meg, hogy ohmikus ellenállásokon folyjon át az elektromos áram. Ilyenkor az elektromágneses energia belsõ energiává alakul az ellenálláson, amelyet mint hõt ad át az ellenállás a környezetének. A korábbiakban már megismerkedtünk a Joule-törvény lokális alakjával, amelyik megadja, hogy mekkora az elektromos áram teljesítménysûrûsége a tér egy adott pontjában:

$$\frac{dP}{dV} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}.$$

Ez a hõteljesímény azonban az elektromágneses energia szempontjából nem nyereség, hanem veszteség. Az elektromágneses energia mérlegegyenletében ez tehát mint negatív produkciósûrûség fog szerepelni:

$$\sigma_{\mathrm{ENERGIA}} = -\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}.$$

Lassan tehát összegyûjtögettük az elektromágneses energia mérlegegyenletének valamennyi szereplõjét, egyedül az energiaáramról, illetve annak sûrûségérõl nem esett még szó. Ehhez vezessük be **S**-et, az ún. Poynting-vektort:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

amelyrõl be fogjuk bizonyítani, hogy nem más, mint az elektromágneses energiaáram-sûrûség vektora. (Tehát **S** megmutatja, hogy melyik irányba áramlik az elektromágneses energia, és hogy mennyi energia áramlik át az **S**-re merõleges egységnyi felületen idõegység alatt.) A bizonyításhoz képezzük az $\mathbf{S}$ Poynting-vektor divergenciáját:

$$\mathrm{div}\mathbf{S} = \mathrm{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \nabla[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \mathbf{H} \cdot [\nabla \times \mathbf{E}] - \mathbf{E} \cdot [\nabla \times \mathbf{H}] = \mathbf{H} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H}.$$

Az elektromos és mágneses térerõsség rotációját az elsõ és második Maxwell-egyenletbõl helyettesítsük be a fenti kifejezésbe:

$$\mathrm{div}\mathbf{S} = \mathbf{H} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \mathbf{E} \cdot \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E},$$

és vegyük még figyelembe az alábbi összefüggést:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\mathrm{ENERGIA}}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Ez utóbbi összefüggés felírásánál figyelembe vettük, hogy amennyiben ε és μ állandó, akkor $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, valamint $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Ezekkel az összefüggésekkel már felírhatjuk az alábbi egyenletet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right) + \mathrm{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E},$$

ami nem más, mint az elektromágneses energia mérlegegyenlete:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{\mathrm{ENERGIA}}) + \mathrm{div}\mathbf{S} = \sigma_{\mathrm{ENERGIA}},$$

ahol valóban az $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ Poynting-vektor játssza az energiaáramsûrûség szerepét.