II.11 Az elektromos feszültség

Két pont között az elektromos feszültséget az alábbi görbementi integrállal definiáljuk:

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

Ez nem más, mint az a töltésegységre vonatkoztatott munka, amit az elektromos tér végez, miközben a Q_P próbatöltést az A pontból kiindulva az adott görbe mentén a B pontig mozgatja, vagyis

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q_P} = \frac{\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{Q_P} = \int_A^B \frac{\mathbf{F}}{Q_P} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

A feszültség egysége a Volt. 1 Volt a feszültség egy A pontból B pontba vezető görbe mentén, ha a tér ezen az úton 1 Joule munkát végez egy 1 Coulomb-os töltésen. Vagyis V = J/(As). A térerősség egységét is szokás a Voltra visszavezetve V/m alakban felírni, mivel N/C = N/(As) = [Nm/(As)]/m = [J/(As)]/m = V/m. A Q_P próbatöltéssel való osztásra ugyanolyan okból kerítünk sort, mint a térerősség fogalmának a bevezetésénél: a töltésegységre vonatkoztatott munka, vagyis az U_{AB} feszültség így a mérőeszközünktől (a próbatöltés nagyságától) független lesz. Az U_{AB} feszültség tehát az elektromos térre jellemző mennyiség, amely egy adott tér esetén általában a kiindulási és végponton kívül még a két pontot összekötő úttól is függ.

Egy homogén (helytől független) elektromos térben az U_{AB} feszültséget viszonylag könnyű felírni:

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{E} \cdot \left(\int_A^B d\mathbf{r} \right) = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{r} .$$

Az **E** elektromos térerősség ugyanis ilyenkor az integráljel elé kiemelhető, mivel a helytől független; az infinitézimális kis d**r** elmozdulásvektorok összege pedig a teljes $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ elmozdulásvektort adja.

Még tovább egyszerűsödik a formula, ha a mozgás az erővonalak mentén történik, vagyis amikor az elmozdulásvektor és az erőtér párhuzamos:

$$U_{AB} = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{r} = E \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha = E \cdot \Delta r,$$

mivel ilyenkor $\cos\alpha = 1$, mert $\alpha = 0$. Ebben a speciális esetben tehát a térerősség és az elmozdulás vektorok abszolút értékének szorzata adja a feszültséget, vagy –fordítva okoskodva– az 1 méteres elmozdulásra jutó feszültség mutatja a térerősség nagyságát.

II.12 Az elektrosztatika második alaptörvényének globális és lokális alakja

Egy elektromos térben mérhető feszültség általában nem csak a kezdő és a végpontnak, hanem az ezeket összekötő útnak is a függvénye lehet. Az előző paragrafusban azonban már láthattunk egy példát (a homogén tér esetében) arra, hogy a feszültség az úttól független volt és csak a kiindulási és a végponttól függött. Az elektrosztatika második alaptörvénye tulajdonképpen azt mondja ki, hogy elektrosztatikus terekben ez mindig így van. Más szavakkal megfogalmazva az elektrosztatika második alaptörvénye azt állítja, hogy a sztatikus tér örvénymentes; nincsenek benne zárt erővonalak.

Kísérleti háttérként itt is a Coulomb-törvényre hivatkozhatunk: belátható ugyanis, hogy a pontszerű töltés erőterének egy Q_P próbatöltésen végzett munkája csak attól függ, hogy mennyi a kezdőpont r_A és a végpont r_B távolsága a teret létrehozó ponttöltéstől. (Ennek bizonyításához elég azt végiggondolnunk, hogy bármilyen centrális erőtérben −vagyis egy olyan erőtérben, ahol az erő radiális, azaz egy az erőt kifejtő centrum felé vagy attól elfelé irányul− a centrumot körülvevő gömbök felületén mozogva az erőtér munkája csakis zérus lehet. Ez abból következik, hogy az elmozdulás e gömbök felületén az erőtérre mindig merőleges, azaz $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Tetszés szerinti utat gömbfelszínek menti és arra merőleges infinitézimális kis elmozdulások összegére bontva láthatjuk, hogy csak a gömbfelszínre merőleges elmozdulások munkájával kell számolnunk. Tehát két gömbfelszín között végzett munka tetszés szerinti úton haladva ugyanaz lesz. Ezek után világos, hogy az A és B pontok között végzett munkát kizárólag az fogja megszabni, hogy milyen r_A illetve r_B sugarú gömbök felszínén helyezkednek el, és független lesz attól, hogy milyen úton jutottunk az A-ból a B-be.)

Még arra kell rámutatni, hogy elektrosztatikus tereket töltések hoznak létre, így tetszés szerinti elektrosztatikus tér visszavezethető valamilyen diszkrét vagy folytonos töltéseloszlás elektromos terére. Vagyis pl. diszkrét töltéseloszlás esetén a tér egy pontjában a térerősséget pontszerű töltések tereinek összegeként foghatjuk fel, és így a Coulomb-törvényre alapozott megfontolásunk továbbra is alkalmazható. (Szorgalmi feladat: először igazoljuk azt, hogy két pontszerű töltés terében a végzett munka független az úttól, majd gondolatmenetünket általánosítsuk n darab töltés esetére!)

Kimondható tehát, hogy elektrosztatikus terekben az U_{AB} feszültség az úttól független: valamennyi A-ból B-be vezető úton ugyanaz. Ha azonban fordítva haladunk végig ugyanazon az úton a B-ből az A-ba, akkor az így számolt U_{BA} feszültség az U_{AB} mínusz egyszerese lesz

$$U_{BA} = -U_{AB} \,,$$

mivel a BA úton most a $d\mathbf{r}$ elmozdulásvektorok az eredetivel ellentétes irányúak. Így értelemszerűen az elektrosztatikus térben tetszés szerinti A-ból B-be, majd onnan ismét vissza vezető zárt görbére a feszültség zérus, mert

$$0 = U_{AB} + U_{BA} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\int_A^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\substack{\text{zárt görbe} \\ \text{mentén}}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Ezt az alakot szokás az elektrosztatika második alaptörvénye globális alakjának tekinteni. A lokális alakot úgy kaphatjuk meg, hogy a zárt görbe menti integrált a Stokes-tétel segítségével felületi integrállá alakítjuk:

$$\oint_G \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_A \mathbf{rot}\,\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Mivel tetszőleges felületre érvényes, hogy a **rot E** vektor felületi integrálja zérus, ezért ez csak úgy lehet, ha maga az integrandus zéró, vagyis

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0},$$

ami nem más, mint az elektrosztatika második alaptörvényének a lokális alakja.

III. Az elektromos potenciál.
Az elektromos erőtér mint a potenciál negatív gradiense

III.1 Az elektromos potenciál

Mint azt az előző paragrafusban részletesen tárgyaltuk, az elektrosztatikus erőtér örvénymentes. A mechanikából tudjuk, hogy ilyen esetben az erőtér potenciálos; vagyis a Q_P próbatöltésre ható $\mathbf{F}_P$ erő az E_{pot} potenciális energia negatív gradienseként adható meg:

$$\mathbf{F}_P = -\mathbf{grad}\, E_{pot}\ .$$

Az elektromos erőtérben azonban mind az $\mathbf{F}_P$ erő, mind az E_{pot} potenciális energia nem csak a tértől függ, hanem arányos a térbe helyezett Q_P próbatöltés nagyságával is. Ismét célszerű tehát az egyenletünket Q_P-vel osztani, hogy kizárólag csak a térre jellemző mennyiségeket kapjunk:

$$\frac{\mathbf{F}_P}{Q_P} = -\mathbf{grad}\left(\frac{E_{pot}}{Q_P}\right)$$

Azt már az előzőekből tudjuk, hogy az $\mathbf{F}_P/Q_P$ nem más, mint az $\mathbf{E}$ elektromos térerősség. Az E_{pot}/Q_P hányadost, vagyis a töltésegységre eső potenciális energiát **elektromos potenciál**nak nevezzük és φ-vel fogjuk jelölni. Ezekkel a jelölésekkel:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}(\varphi)$$

A fenti bevezető után lássuk, hogy mi a kapcsolat az elektromos feszültség és a potenciál között. Láttuk már, hogy két pont –A és B– közötti U_{AB} feszültség nem más, mint a tér által a Q_P próbatöltésen végzett W_{AB} munka a töltésegységre vonatkoztatva:

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{Q_P}\ .$$

Az elektrosztatikus térben a W_{AB} munka csak a kezdő- és végponttól függ. Bevezethetünk tehát egy potenciális energiát, melynek segítségével a munka az alábbi formában számítható:

$$W_{AB} = E_{pot}(A) - E_{pot}(B) = -\Delta E_{pot}\ .$$

Itt felhívjuk a figyelmet a negatív előjelre. Ez azt jelzi, hogy ha a tér munkát végez, akkor a munkavégző-képessége csökken. (Hasonlatként gondoljunk bele, hogy amikor költünk a pénzünkből, akkor a pénzköltő képességünk ugyanígy csökken. Az elköltött pénz –pl. 321 Ft– tehát negatív előjellel egyenlő a pénzköltő-képességünk megváltozásával, ami ebben a konkrét példában -321 Ft.)
Az előbbi egyenletet végigosztva a próbatöltés nagyságával kapjuk a feszültség és a potenciál közötti jól ismert relációt:

$$\frac{W_{AB}}{Q_P} = \frac{E_{pot}(A)}{Q_P} - \frac{E_{pot}(B)}{Q_P}\ ,$$

$$U_{AB} = \varphi(A) - \varphi(B) = -\Delta\varphi\ .$$

Látható, hogy az elektromos potenciál –ugyanúgy, mint a mechanikából ismeretes potenciális energia– egy additív konstans erejéig szabadon választható, hiszen csak a különbsége mérhető. Tetszés szerint kereshetünk tehát olyan pontot, ahol a potenciált önkényesen zérusnak fogjuk tekinteni. Jelöljük R-rel ezt a pontot. Ezek szerint mivel

$$\varphi(R) = 0, \quad \text{ezért} \qquad U_{A0} = \varphi(A) - \varphi(R) = \varphi(A).$$

Tehát a tér egy A pontjában a potenciál az alábbi módon számítható:

$$\varphi(A) = U_{AR} = \int_A^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

azaz

$$\varphi(A) = \frac{W_{AR}}{Q_P}.$$

Szavakkal megfogalmazva: a tér egy A pontjában a potenciál számértékileg egyenlő azzal a munkával, amit a tér végez, amikor az egységnyi töltést az A pontból a nulla potenciálú pontig mozgatja.
Megjegyezzük, hogy az elektrosztatikában általában a nulla potenciálú pontnak a végtelen távoli pontot szokás választani.

III.2 Pontszerű töltés és diszkrét töltéseloszlás potenciáltere

Egy koordinátarendszer origójában elhelyezkedő pontszerű Q töltés erőterét még a **II.6** pontból ismerjük:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathbf{e}_r.$$

Tehát ezt az erőteret kell behelyettesíteni a potenciált megadó kifejezésbe. Az elektrosztatikában szokásos konvenció szerint a nulla potenciálú pontnak a végtelent választjuk. A teret létesítő Q töltéstől r_A távolságban elhelyezkedő A pontban ekkor a potenciál az alábbi módon számítható:

$$\varphi(A) = \int_A^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^\infty \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r}$$

Az $\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r}$ skalárszozat éppen a $d\mathbf{r}$ sugárirányú vetülete, vagyis $\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{r} = dr$, az integrálás eredménye pedig:

$$\varphi(A) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^\infty \frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_A^\infty = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_A},$$

ami tetszőleges **r** helyvektorú pontra rövidebben így is írható:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

Vagyis így a tér minden egyes pontjához egy φ potenciál rendelhető. Ezt a skalárteret nevezzük a ponttöltés potenciálterének.

Pontszerű töltésekből álló töltésrendszer potenciáljának meghatározásánál abból indulhatunk ki, hogy a térerősség ilyenkor az egyes töltések által létrehozott rész-erőterek eredője:

$$\varphi(A) = \int_A^\infty \left(\sum \mathbf{E}_i\right) \cdot d\mathbf{r} = \sum \int_A^\infty \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{r} = \sum \varphi_i(A), \qquad \mathbf{E} = \Sigma\, \mathbf{E}_i .$$

ahol

$$\varphi_i(A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{r_{iA}},$$

r_{iA} az A pont távolsága a Q_i töltéstől. Tehát arra az eredményre jutottunk, hogy az eredő potenciál az egyes töltések által létrehozott részpotenciálok összege.

III.3 Ekvipotenciális felületek és potenciálgradiens. Az elektrosztatika 2. alaptörvényének alternatív alakja

Ezt a fejezetet azzal kezdtük, hogy –részben mechanikai tanulmányainkra támaszkodva– felírtuk, hogy a térerősség a potenciálból annak negatív gradienseként származtatható:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}(\varphi).$$

Mivel ez egy igen fontos reláció, és a szemléletes jelentését is szeretnénk alaposabban megérteni, ezért ezt a relációt most az elektromos potenciál fogalmából kiindulva is levezetjük. Abból indulhatunk ki, hogy a potenciál változását kétféle módon is felírhatjuk. Egyrészt, mint tudjuk

$$\Delta\varphi = -U_{AB} = \int_B^A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}\,.$$

Másrészt ezt a potenciálváltozást abból kiindulva is kiszámíthatjuk, hogy φ egy skalártér, melynek teljes differenciálja

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

Figyelembe véve, hogy

$$\mathbf{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} \qquad \text{és} \qquad d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}\ \text{, ezért}$$

$$d\varphi = \mathbf{grad}(\varphi)\ d\mathbf{r}\,.$$

Ennek megfelelően a φ megváltozása A és B között

$$\Delta\varphi = \int_A^B d\varphi = \int_A^B \mathbf{grad}(\varphi)\cdot d\mathbf{r}\,.$$

Mivel $\Delta\varphi$-nek ugyanazt kell kiadni mindkét módon, és tetszőleges A és B pontokra, ez csak úgy lehet, ha

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}(\varphi).$$

Tudjuk, hogy egy skalártér gradiense mindig merőleges a skalártér szintfelületeire, és abba az irányba mutat, amelyben a skalártér a leggyorsabban növekedik. Ebből következik, hogy az elektromos térerősség merőleges az ekvipotenciális felületekre, és a potenciál leggyorsabb csökkenésének az irányába mutat. (Szorgalmi feladat: rajzoljuk fel egy pontszerű töltés erővonalait és ekvipotenciális felületeit. Milyen irányba mutat a potenciálgradiens? Rajzoljuk fel ugyanezeket egy kondenzátor lemezei között feszülő homogén térre is!)

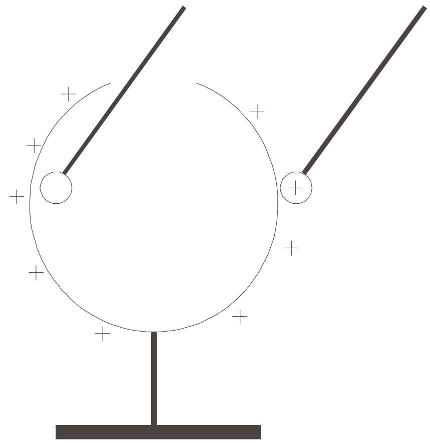
Végül megjegyezzük, hogy minden vektortér, amely egy skalártér gradienseként származtatható, örvénymentes. Ezért az $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}(\varphi)$ reláció tekinthető az elektrosztatika második alaptörvénye alternatív megfogalmazásának is, hiszen belőle automatikusan következik, hogy

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

IV. Felületi töltéseloszlások

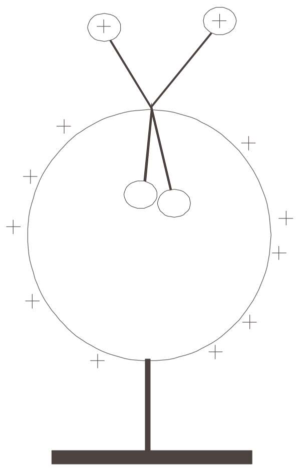
IV.1 Töltés elhelyezkedése vezető felületén

Bevezetőnek nézzünk meg egy kísérletet. A kísérlethez egy szigetelő talapzathoz rögzített üreges fémgömböt használunk,



Töltött gömbhéj

amelynek a tetején egy kis nyílás lehetővé teszi, hogy a gömb belsejébe is be tudjunk nyúlni. Ezt a gömböt töltsünk fel sztatikus elektromossággal pl. úgy, hogy bőrdarabbal megdörzsölt üvegrudat többször végighúzunk a gömbön. Hogy a gömb valóban fel van töltve, arról úgy tudunk meggyőződni, hogy egy szigetelő nyéllel ellátott kis fémgolyót érintünk a gömbhöz kívülről, majd ezután a golyót egy elektroszkóp kivezetéséhez érintjük. Az elektroszkóp lemeze ekkor kitér, jelezve, hogy töltést kapott. Ezt a töltést a fémgolyó szállította át a gömb külsejéről. Most ismételjük meg



A manóantenna csak kívül jelez.
[Ez egy másik kísérlet a töltések felületi eloszlásának bizonyítására. Fémhenger külsejéhez és belsejéhez is rögzítünk egy-egy bodzabél golyópárt („manóantenna”), amelyek úgy működnek, mint az elektroszkóp lemezei.]

a kísérletet úgy, hogy a fémgolyót az üreges gömb belsejéhez érintjük. (A már említett nyíláson át a szigetelő nyéllel be tudjuk vinni a fémgolyót a gömb belsejébe.) Ezután viszont a golyót hiába érintjük az elektroszkóp kivezetéséhez, az elektroszkóp nem fog kitérni. (Vigyázzunk, hogy miközben kivesszük a golyót a gömbből, ne érjen hozzá a nyílás pereméhez!) A kísérletet többször is meg lehet ismételni azonos eredménnyel: a gömb külsejéről a kis golyó töltést tud levenni, de a belsejéből nem képes erre. Tehát levonhatjuk azt a következtetést, hogy a vezető gömb belsejében nincs töltés, csak a felületén. (Gyorsan jegyezzük meg, hogy a fém belsejében természetesen továbbra is vannak mozgékony töltéshordozók –mint tudjuk, ezek egy fém esetében az elektronok–, de ennek ellenére a töltéssűrűség zérus, mivel a pozitív atomtörzsek töltése az elektronok negatív töltését pontosan ellensúlyozza. Tehát amikor azt írjuk, hogy a vezető belsejében nincs töltés, akkor ezen azt értjük, hogy nincs többlet-töltés („excess charge").)

Miért nem marad töltés a gömb belsejében? Megtehetjük például azt is, hogy a kis golyóval töltést viszünk be a gömb belsejére, de azt fogjuk tapasztalni, hogy a gömb belseje nem marad töltött. (Ezt az elektroszkóppal könnyen ellenőrizhetjük.) Vagyis a töltés a gömb belsejéből gyorsan annak felületére áramlik, és ott jut nyugalomba. Mindez annak a következménye, hogy sztatikus esetben nem lehet elektromos tér egy vezető belsejében, ugyanis ekkor a vezetőben megindulna a töltéshordozók árama. (Természetesen áram létrejöhet egy vezetőben, ez nem tilos, csakhogy ebben az esetben már nem beszélhetünk sztatikáról.) Ha egy térrészben nincsen elektromos tér, vagyis nincsenek benne erővonalak, akkor ebben a térben töltés sem lehet. (Az állítás ellentettje viszont nem igaz. Tehát ha egy térrészben vannak elektromos erővonalak, abból még nem feltétlenül következik, hogy ugyanott elektromos töltések is vannak. Gondoljunk ebbe bele.) Összefoglalva: ha egy térrészben nincsenek erővonalak, akkor ez a tér ott homogén, tehát forrása vagy nyelője sem lehet, vagyis sem pozitív, sem negatív többlet-töltés nem lehet ebben a térben az elektrosztatika első alaptörvénye szerint.

Végül egy fontos következmény: ha az elektromos térerősség zérus, akkor az

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}(\varphi)$$

összefüggés értelmében az elektromos potenciálgradiens is nulla, tehát **a vezető belseje ekvipotenciális**:

$$\varphi = \text{konst.},$$

vagyis a potenciál a helytől független állandó. (Egy homogén skalártér gradiense nulla. Gondoljunk például a hőmérséklettérre: egy izoterm térben a hőmérsékletváltozás minden irányban nulla.)