IV.2 Az elektroszatika alaptörvényei felületi töltéseloszlás esetén

Az előző paragrafusban láttuk, hogy a töltések a vezető felületén helyezkednek el, gyakorlatilag kétdimenziós vagy más szóval felületi töltéseloszlást alkotva. (Természetesen atomi méretekben ez a kép már nem tartható: pl. a többletelektronok zöme a fémnek a vákuummal, vagy a levegővel érintkező határfelületének egy igen vékony, de mégiscsak véges zónájában található. Ez azonban a makroszkópikus elektrodinamikai leírás szempontjából olyan kis távolság, hogy a gyakorlatban a kétdimenziós töltéseloszlás teljesen elfogadható közelítés.) Felületi töltéseloszlás esetén bevezethetjük a σ felületi töltéssűrűséget

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA},$$

vagyis a felületegységre eső töltést, ami a térfogati töltéssűrűséggel analóg fogalom.

A következőkben szeretnénk az elektrosztatika alaptörvényeit megfogalmazni felületi töltéseloszlások esetére (egyelőre továbbra is vákuumban). Erre - azon túl, hogy felületi töltéseloszlások gyakran fordulnak elő - azért is érdemes sort keríteni, mert az elektrosztatika alaptörvényei ilyen esetben nagyon egyszerűek. E célból vezessük be egy $V(\mathbf{r})$ vektortér felületi forrássűrűségét az alábbi formában

$$\text{felületi divergencia} \equiv \mathbf{V}_n(2) - \mathbf{V}_n(1) ,$$

valamint a felületi örvénysűrűségét a

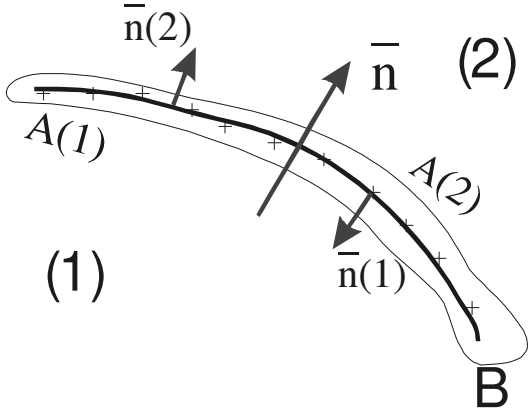
$$\text{felületi rotáció} \equiv \mathbf{V}_t(2) - \mathbf{V}_t(1)$$

alakban. ((1) és (2) arra a két térfélre utal, amelyeket a felület választ szét. Az n és t indexek a vektortér normális illetve tangenciális komponensét jelentik.

Ennek részletesebb magyarázatát lásd kicsit később. Ekkor az elektrosztatika alaptörvényeinek analóg megfogalmazásai a következők:

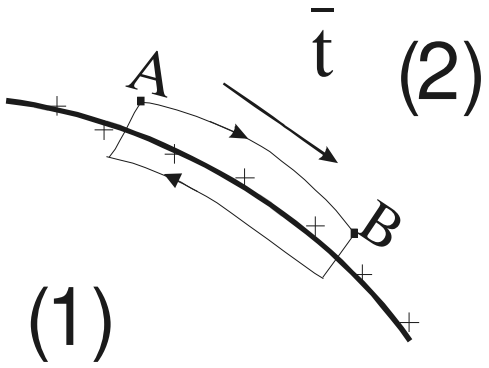
Az elektrosztatika alaptörvényei	Térfogati töltéseloszlás esetében	Felületi töltéseloszlás esetében
1. alaptörvény	$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho$	$\mathbf{D}_n(2) - \mathbf{D}_n(1) = \sigma$
2. alaptörvény	$\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$	$\mathbf{E}_t(2) - \mathbf{E}_t(1) = 0$

Szavakkal kifejezve az 1. alaptörvény felületi töltéseloszlásra azt mondja ki, hogy a **D**



4.1 Ábra

tér felületi forrássűrűsége egyenlő a felületi töltéssűrűséggel, a 2. alaptörvény szerint pedig a felületi örvénysűrűség zérus. E tételek belátásához tekintsük az 4.1 és 4.2 ábrát.



4.2 Ábra

A jelen esetben pozitív előjelű töltésfelhő (de persze lehetne negatív is) egy felületen (de nem feltétlenül egy vezető felületén!), helyezkedik el. A lényeg az, hogy valahogy létrejött ez a kétdimenziós töltéseloszlás, akár úgy, hogy például a töltéseket odaenyveztük a felülethez. A töltött felület válassza el az (1)-el és (2)-vel jelölt térfeleket egymástól, és a felület normálvektora mutasson az (1)-től a (2) felé. Ezek után az 1. alaptörvény felületi alakját az alaptörvény globális formájából kiindulva lehet bizonyítani.

$$\oint_A \mathbf{D}\cdot d\mathbf{A} = Q$$

A Q töltés most felületi töltés legyen, és helyezkedjen el egy B felületen, vagyis

$$Q = \oint_B \sigma dA$$

(Felhívjuk a figyelmet, hogy itt a *dA* nem vektor, csak a felületelem nagysága.)
Tehát ezt a a B felületen elhelyezkedő Q töltést öleli körül a zárt A felület. Most zsugorítsuk rá az A felületet mindkét oldalról a B felületre. Az A felület ekkor lényegében két olyan A(1) és A(2) felületből áll, amelyek majdnem mindenben megegyeznek, miután rázsugorítottuk őket a B-re. Ezután ugyanis mindkettő nagysága B, csak míg az A(1) az (1)-es térfélben van, és ezért felületelemeinek iránya a helyi normálvektorral mindig ellentétes, addig az A(2) esetében, amely a (2)-es térfélben van, a felületelemek a helyi normálvektorral azonos irányúak. (A felületelemek irányát ugyanis az szabja meg, hogy A(1) és A(2) együtt egy zárt felületet alkot, és ilyenkor a felület iránya definíció szerint mindig kifelé mutat.) Tehát az ábrán is alkalmazott jelöléseinkkel

$d\mathbf{A}(1) = -dA\mathbf{n}$, $d\mathbf{A}(2) = dA\mathbf{n}$ és így $\mathbf{D}(1)d\mathbf{A}(1) = -D_n(1)dA$, $D(2)dA(2) = D_n(2)dA$.

Tekintettel arra, hogy a teljes zárt A felület két részre bontható, ezért

$$\oint_A \mathbf{D}\cdot d\mathbf{A} = \int_{A(1)} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{A} + \int_{A(2)} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{A} = \int_B (-D_n(1)dA) + \int_B (-D_n(2)dA).$$

A zsugorítás után ugyanis A(1) = A(2) = B. Ezek után az 1. alaptörvény globális alakja felületi töltéseloszlás esetén:

$$\int_B (D_n(2) - D_n(1))dA = \int_B \sigma dA.$$

Mivel ez az összefüggés, tetszés szerinti B felületre igaz, ebből következik, hogy nem csak az integrálok, hanem az integrandusok is megegyeznek, tehát

$$D_n(2) - D_n(1) = \sigma,$$

Ami nem más, mint az 1. alaptörvény lokális alakja felületi töltéseloszlás esetén.

A 2. alaptörvény felületi töltéseloszlásra érvényes alakját ugyancsak a globális alakból kiindulva vezethetjük le:

$$\oint_G \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

A zárt görbét vegyük fel úgy, hogy odafelé a felület felett, de annak közvetlen közelében haladjon a (2) térfélben, majd visszafelé a felület alatt az (1) térfélben, de ismét a felülethez igen közel, valamint közvetlenül az odaút alatt. Vagyis

$d\mathbf{r}(1) = -d\mathbf{t}$, $d\mathbf{r}(2) = d\mathbf{t}$ és így $\mathbf{E}(1)d\mathbf{r}(1) = -E_t(1)dt$, $\mathbf{E}(2)d\mathbf{r}(2) = E_t(2)dt$.

Itt $d\mathbf{t}$ mindenütt az odaút irányába mutató a felülethez képest tangenciális egységvektor. A zárt görbementi integrál két részre osztható, az odaút és visszaút szerint:

$$\oint_G \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{G(2)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_{G(1)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Mivel az oda és visszaút tulajdonképpen majdnem ugyanazon a H görbén történik, ezért felírható, hogy

$$\oint_G \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_H (E_t(2) - E_t(1))dt = 0$$

Miután ez az integrál tetszés szerinti H görbére zérus, ebből az következik, hogy maga az integrandus is nulla:

$$E_t(2) - E_t(1) = 0,$$

ami nem más, mint a 2. alaptörvény lokális alakja felületi töltéseloszlás esetén.

IV.3 Az elektroszatika alaptörvényei vezető felületre

Ha az elektrosztatika felületi töltéseloszlásokra érvényes alaptörvényeit erre az esetre akarjuk alkalmazni, akkor abból indulhatunk ki, hogy a vezető belsejében nincs elektromos tér, tehát ott mind **E**, mind **D** nulla. Ha tehát a töltött felületünk egy vezető közeg (1) felülete, amely vákuummal (2) érintkezik, akkor tudható, hogy

$$E(1) = 0 \text{ és } D(1) = 0.$$

Az ebből adódó egyenleteket összehasonlító táblázatos formában közöljük:

Az elektrosztatika alaptörvényei	Általános felületi töltéseloszlás esetében	Vezető felület esetén (1):vezető, (2):vákuum
1. alaptörvény	$D_n(2) - D_n(1) = \sigma$	$D_n(2) = \sigma$
2. alaptörvény	$E_t(2) - E_t(1) = 0$	$E_t(2) = 0$

Vagyis szavakban összegezve: az elektrosztatikus tér a vezető felületére mindig merőleges (mert a tangenciális komponense 0), a **D** tér normál komponense pedig

(ami vákuum estén maga a D vektor abszolút értéke) a felület egy pontján egyenlő az ugyanezen pontban mérhető σ felületi töltéssűrűséggel.

IV.4 A felületi töltéssűrűség függése a görbületi sugártól. Csúcshatás.

Kísérlet: elektromos Segner kerék, gyertyaláng elfújása elektromos széllel.
A csúcshatás azon alapszik, hogy a vezető élein, illetve csúcsain sokkal nagyobb a töltéssűrűség, és az

$$\varepsilon_0 E(2) = \sigma$$

összefüggés miatt, itt a lokális térerősség is sokkal nagyobb. A nagy térerősség ionizálja a levegő molekuláit, a töltött levegő pedig mozgásba jön az elektromos tér hatására. Ez az elektromos szél.

Mivel magyarázhatjuk, hogy a csúcsokon - vagyis ahol a felület görbületi sugara igen kicsi – nagyobb a töltéssűrűség, mint a felület kevésbé görbült részein? Hogy ezt megértsük, képzeljük el a következő kísérletet. Egy R_1 sugarú nagy vezető gömböt kössünk össze (ugyancsak vezetővel) egy kisebb R_2 sugarú gömbbel. A rendszert töltsük fel, és vizsgáljuk meg a két gömbön kialakuló σ_1 és σ_2 töltéssűrűségek arányát. Ha a gömbök egymástól viszonylag távol vannak, akkor az R_1 sugarú gömb felszínén a potenciált elsősorban az ott elhelyezkedő Q_1 töltés fogja megszabni. Az R_1 sugarú gömb potenciáltere a gömbön kívül ugyanolyan, mint a pontszerű töltés potenciáltere (**III.2** paragrafus), ezért

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{R_1}.$$

Ugyanilyen alapon

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{R_2}.$$

Viszont a két gömb ekvipotenciális, mivel vezetővel vannak összekötve, vagyis $\varphi_1=\varphi_2$. Ezért

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}.$$

Tekintetbe véve, hogy egy gömbön a felületi töltéssűrűség

$$\sigma = \frac{Q}{4R^2\pi},$$

a két gömb felületi töltéssűrűségeinek arányára azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_1}{R_2},$$

vagyis, minél kisebb egy gömb R sugara, annál nagyobb rajta a σ felületi töltéssűrűség, és következésképpen a térerő is.

V. Kapacitás, kondenzátorok

V.1 A kapacitás fogalma

Tekintsünk két vezető (mondjuk fém) darabot, melyek egymás közelében helyezkednek el.

V.1. Ábra

(Az „egymás közelében” persze relatív fogalom. Egyrészt azt értjük alatta, hogy a vezetődarabok átlagos távolsága a vezetődarabok geometriai méreteinek a nagyságrendjébe esik. Lásd a fenti V.1. ábrát. Másrészt pedig feltételezzük, hogy egyéb vezetődarabok illetve töltések nincsenek a közelben, másszóval elég távol vannak ahhoz, hogy ne zavarjanak.) Az egyik vezetőn – ezt fogjuk a továbbiakban a kondenzátor pozitív fegyverzetének tekinteni -–helyezkedjen el +Q töltés, a másik vezetőn pedig -Q. A kondenzátor fegyverzetei között mérhető feszültséget mindig úgy fogjuk számítani, hogy a térerősség görbementi integrálját a pozitív fegyverzettől indulva a negatív fegyverzetig eljutva számítjuk. (Így jutunk pozitív feszültség értékhez.) Elektrosztatikában a feszültség az úttól független, a kondenzátor lemezei pedig ekvipotenciálisak, ezért a fenti módon számított feszültség az egész kondenzátorra érvényes adat. Ezt fogjuk a kondenzátor feszültségének tekinteni.

$$U_{KONDENZÁTOR} = \int_{\mathbf{r}(+)}^{\mathbf{r}(-)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

A kondenzátor töltésének pedig a pozitív fegyverzeten lévő +Q töltést tekintjük.

Ha a kondenzátorra 2-szer annyi töltést viszünk fel akkor ezekből kétszerannyi erővonal indul ki (az elektrosztatika I. alaptörvénye értelében). Ha ugyanarról a helyről kétszerannyi erővonal indul ki, akkor kétszeres lesz az erővonalak sűrűsége is, azaz a térerősség mindenütt a kétszeresére nő. Ebből pedig az következik, hogy a feszültség is kétszeres, mivel a görbementi integrálban **E** mindenütt dupla akkora. Vagyis a feszültség arányos a kondenzátoron lévő töltéssel:

$$U = k\,Q.$$

A k arányossági tényező reciprokát C-vel jelöljük, és kapacitásnak hívjuk. Ha az egyenletet Q-ra explicit formára rendezzük, akkor

$$Q = C\,U.$$

Ez azt jelenti, hogy minél nagyobb a kondenzátor kapacitása, egy adott feszültségen annál több töltést tud tárolni. A dolgot ahhoz hasonlíthatjuk, hogy egy víztárolónak annál nagyobb a tárolókapacitása, minél több vizet tud befogadni egy adott magasság mellett. (Persze a víztárolónál az összes beléje férő vizet tekintik inkább - ami még nem csap túl a tároló peremén -, és nem a magasságegységre eső tárolóképességet. A kondenzátor kapacitásán viszont nem a bele tölthető legnagyobb töltést értik – ahol már pl. átütne a kondenzátor -, hanem e helyett a feszültségegységre jutó tárolt töltésmennyiséget.)

V.2 Síkkondenzátor, gömb- és hengerkondenzátor kapacitása

Amint arról az előző paragrafusban már volt szó, bármely két vezető darab képezhet egy kondenzátort. A kondenzátor kapacitása egyrészt attól fog függeni, hogy mekkorák a fegyverzetek, és ezeknek milyen a geometriai elrendezése, másrészt attól, hogy milyen szigetelő anyag, vagy anyagok, töltik ki a fegyverzetek közötti teret. Egyelőre fel fogjuk tételezni, hogy a fegyverzetek vákuumban vannak. Ekkor a kondenzátor kapacitása egyedül a geometriájától függ. A sokféle elképzelhető geometria között van három nevezetes eset, amit meg fogunk vizsgálni: a síkkondenzátor, a gömbkondenzátor és végül a hengerkondenzátor.

Síkkondenzátor

A síkkondenzátort vázlatosan a V.2 ábra mutatja.

V.2. Ábra

Lényegében két egymással párhuzamos A felületű vezető lemezből áll, melyek egymástól mért távolsága d. Lényeges, hogy a d távolság aránylag kicsi legyen a kondenzátor többi méretéhez képest. Ekkor ugyanis az elektromos erőtér a kondenzátor belsejében nagyjából homogén. Igaz ugyan, hogy a kondenzátor-lemezek széleinél a tér gyengül, mert az erővonalak egy része kívűlre kerül, de az a terület, ahol ez jelentős gyengülést okoz egyre kisebb, ahogy d-t csökkentjük. A levezetésnél tehát azzal a közelítéssel fogunk élni, hogy az elektromos erőtér homogén a kondenzátor lemezei között.

Lássuk akkor a levezetést! Egy kondenzátor kapacitása a rajta lévő töltés osztva a kondenzátor feszültségével:

$$C = \frac{Q}{U}.$$

Feltételezzük, hogy a töltések homogén σ felületi töltéssűrűséggel oszlanak el a fegyverzetek felületén, tehát a kondenzátor töltése

$$Q = A\,\sigma.$$

Továbbá már láttuk, hogy egy vezető felületén az elektrosztatika I. alaptörvénye szerint

$$\sigma = D.$$

Az elektromos eltolás vektora pedig vákuumban felírható, mint a vákuum ε_0 permittivitásának és az elektromos térerősségnek a szorzata:

$$D = \varepsilon_0\, E.$$

Tehát síkkondenzátor esetén írható, hogy

$$Q = A\,\varepsilon_0\, E.$$

A kondenzátor feszültségét homogén tér esetén egyszerűen felírhatjuk, mint az E térerősség és a d távolság szorzatát:

$$U = E\,d.$$

Mivel

$$U_{KONDENZÁTOR} = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \int E\,dr = E\int dr = E\,d,$$

mert az $\mathbf{E}$ és $d\mathbf{r}$ vektorok egymással párhuzamosak (ilyen utat választunk), és ezért a skalárszorzatuk egyenlő a nagyságaik szorzatával, az E pedig független a helytől (homogén tér), és ezért az integráljel elé kiemelhető.

Visszatérve a síkkondenzátor kapacitására: a töltésre és a feszültségre kapott összefüggéseket helyettesítsük be a kapacitás kifejezésébe

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{A\,\varepsilon_0\,E}{E\,d} = \frac{A\,\varepsilon_0}{d}.$$

Vagyis arra a eredményre jutottunk, hogy a síkkondenzátor kapacitása arányos a fegyverzetek felületével, és fordítva arányos a lemezek egymástól mért távolságával.

Ezt az eredményt egy olyan kísérlettel lehet szemléltetni (V.3. Ábra), ahol a kondenzátor egyik fegyverzete egy elektroszkóp lemezéhez, a másik fegyverzete pedig ennek az elektroszkópnak a házához van kötve (ami földelve van).

V.3. Ábra

Az elektroszóp lemezéhez kötött kondenzátor fegyverzetére megdörzsölt üvegrúddal pozitív töltést viszünk, és ezután az elektroszkóp kitér.

Ha most a kondenzátor fegyverzeteit közelítjük egymáshoz, akkor az elektroszkóp lemezei összébb esnek, ha viszont távolítjuk egymástól a fegyverzeteket, akkor az elektroszkóp lemezei is távolodnak egymástól. Ezt úgy interpretálhatjuk, hogy a kondenzátor U feszültsége nő, ha a fegyverzeteit távolítjuk egymástól (mert ilyenkor a kapacitása csökken, a töltése viszont nem változik, tehát a feszültségnek nőnie kell a $U=Q/C$ formula értelmében), és ezt a megnövekedett feszültséget jelzi az elektroszkóp.

Itt álljunk meg egy szóra. Azt mondtuk – és helyesen – hogy az elektroszkóp a rajta lévő töltést méri, és feszültségmérésről pedig nem szóltunk. Valóban, a lemezek közötti taszitóerő a rajtuk lévő töltéstől függ a Coulomb törvény értelmében. Miért mondjuk akkor mégis azt, hogy a fenti kísérletben az elektroszkóp a kondenzátor feszültségét méri? Nos, itt nincs ellentmondás, mert az elektroszkóp mindkettőt méri. Mivel az elektroszkóp házát földeljük, ezért az elektroszkóp is egy kondenzátor. Minél nagyobb ezen a kondenzátoron az elektromos töltés, annál nagyobb rajta az elektromos feszültség is az

$$U_{ELEKTROSZKÓP} = \frac{Q_{ELEKTROSZKÓP}}{C_{ELEKTROSZKÓP}}$$

összefüggés értelmében. Mivel az elektroszkóp kapacitása állandó, ezért az elektroszkóp feszültsége arányos lesz a rajta lévő töltéssel. Az elektroszkóp tehát feszültségmérő műszer is, csak a mérőlemezeinek kivezetését és a házát párhuzamosan kell kötni a mérendő feszülséggel (mint minden feszültségmérő műszer esetében). Jelen kísérletünkben a kondenzátor fegyverzeteivel kötöttük párhuzamosan, tehát az elektroszkóp így valóban a kondenzátor feszültségét fogja mérni (amellett, hogy a saját magán lévő töltést továbbra is méri, csakhogy ez a töltés most arányos a kondenzátor feszültségével).

Nagyon zárójelesen még azt is megjegyezzük, hogy amikor feszültséget mérünk az elektroszkóppal egy kondenzátoron, akkor az elektroszkóp általában nem tekinthető ideális sztatikai feszültségmérő műszernek. Az elektroszkóp kapacitása ugyanis hozzáadódik a mérendő kondenzátor kapacitásához, és ezért az elektroszkóp beiktatásával a feszültség egy kicsit csökken. Ez a hatás annál kisebb, minél kisebb az elektroszkóp kapacitása. Egy ideális elektroszkóp feszültségmérő kapacitása tehát zérus.

Gömbkondenzátor

Tekintsünk most két koncentrikus gömbfelületet, mint kondenzátort.

V.3. Ábra

Legyen például a belső gömb pozitív, a külső pedig negatív töltésű. A belső gömbből induló erővonalak, a külső gömbön végződnek. Ez most nem homogén tér, hiszen az erővonalak iránya sem azonos a legtöbb helyen, és a térerősség nagysága is csökken, ahogy belső gömbtől távolodunk. Ilyen térrel azonban már találkoztunk, hiszen a pontszerű töltés tere is gömbszimmetrikus tér. A gömb felületén kívül nem tudjuk megállapítani, hogy az elektromos teret egy pontszerű töltés, avagy egy vezető gömb felületén eloszló töltés hozza létre. (Persze a gömb felületén belülre menve már nagy a különbség: pontszerű töltés esetén a térerő egyre nő az origóhoz közeledve, gömb esetén viszont a gömbön belül zérus a térerő.) Szóval a gömbön kívül a térerősség és a potenciál is úgy változik, mint pontszerű töltés esetén:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathbf{e}_r \qquad \textit{és} \qquad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r},$$

ahol *r* a gömb középpontjától mért távolság. Ezek szerint ha a belső gömb sugara R_1, a külső gömbé pedig R_2, akkor akkor a potenciáljuk

$$\varphi(R_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_1} \qquad \textit{és} \qquad \varphi(R_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_2}.$$

A két gömb közötti feszültség ezek szerint:

$$U = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right],$$

ahonnan a gömbkondenzátor kapacitása:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Feladatok, kérdések:

1) hasonlítsuk össze ezt a formulát a síkkondenzátorra kapott képlettel! Mit kapunk eredményül, ha a két gömbfelület nagyon közel van egymáshoz?
2) 2) Mit kapunk eredményül, ha a második gömb sugara igen nagy, vagy második gömb egyáltalán nincs is jelen?
3)

Hengerkondenzátor

Két *L* hosszúságú koncentrikus hengerből álló kondenzátor kapacitása

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_2 / R_1)},$$

ahol R_1 és R_2 a belső és a külső henger rádiusza.

Ezt a formulát úgy vezethetjük le, ha az elektrosztatika I. alaptörvényére támaszkodva felírjuk az elektromos térerősséget mint a hely függvényét egy olyan hosszúkás hengerkondenzátorban, amelynek töltése *Q*:

$$\mathrm{E} = \frac{\text{a Q töltésbõl kilépõ erõvonalak száma}}{\text{annak az r sugarú hengernek (R1 < r < R2) a felülete ahol az E - t kérdezzük}}.$$

Ezután a kondenzátor *U* feszültségét kell kiszámolni, figyelembevéve, hogy az elektromos tér mindig radiális irányú a hengerkondenzátorban. Ha tehát radiális utat választunk a feszültség kiszámításához, akkor igaz, hogy

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E \cdot dr,$$

és így

$$U_{KONDENZÁTOR} = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r},$$

Magát a levezetést nem közöljük, de kérjük az olvasót, hogy gondoljon utána.

V.3 Kondenzátorok soros és párhuzamos kapcsolása

Párhuzamos kapcsolás

Párhuzamos kapcsolásról akkor beszélünk, ha két vagy több áramköri elem, jelen esetben kondenzátor, ugyanazt a két pontot köti össze. Ekkor valamennyi elemen ugyanaz az U feszültség van. Ilyenkor logikus kérdés, hogy a párhuzamosan kapcsolt elemeket lehetséges-e egyetlen eredővel helyettesíteni, amely ekvivalens módon viselkedik, és mekkora ez az eredő? Például három párhuzamosan kapcsolt kondenzátor esetén az a feladat, hogy mekkora annak ez eredő kondenzátornak a kapacitása, amely minden feszültségen ugyanannyi töltést tárol, mint a három kondenzátor együttesen?

Ábra: 3 párhuzamosan kötött kondenzátor

Ennek a kondenzátornak a kapacitása tehát

$$C_{EREDŐ} = \frac{C_{EREDŐ}}{U} \qquad Q_{EREDŐ} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$C_{EREDŐ} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{U} \qquad Q_{EREDŐ} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} + \frac{Q_3}{U} = C_1 + C_2 + C_3.$$

Vagy általában *n* darab párhuzamosan kapcsolt kondenzátor esetén:

$$C_{EREDŐ} = \sum_{i=1}^{n} C_i.$$

Soros kapcsolás

Mint láttuk kondenzátorok párhuzamos kapcsolása esetén a feszültség azonos minden kondenzátoron, mert ugayanazt a két pontot kötik össze. Kondenzátorok soros kapcsolásánál minden kondenzátoron ugyanaz a töltés jelenik meg, mert elágazás nélkül egymás után vannak kötve. Ekkor ugyanis az első kondenzátor pozitív fegyverzetére felvitt töltés az elektromos megosztás révén ugyanazt a töltést jeleníti meg valamennyi kondenzátoron.

Ábra: 3 sorosan kötött kondenzátor

A kondenzátorokon eső feszültség összeadódik, tehát

$$U_{EREDŐ} = U_1 + U_2 + U_3,$$

$$\frac{Q}{C_{EREDŐ}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \quad \Rightarrow \qquad \frac{1}{C_{EREDŐ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3},$$

vagy általában

$$\frac{1}{C_{EREDŐ}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}.$$

V.4 Kondenzátor és elektrosztatikus tér energiája

Kondenzátor energiája

Egy feltöltött kondenzátor energiáját úgy határozhatjuk meg, hogy megmérjük: kisütése közben az elektromos tér mekkora munkát végez. Ez a munkavégzőképesség a kondenzátor energiája. Amikor dQ töltés megy át a pozitív fegyverzetről a negatív fegyverzetre, ekkor a dQ töltésen a tér által végzett munka

$$dW = U\ dQ.$$

Q most az átvitt töltést jelenti. (Tehát az átvitt töltés a folyamat kezdetén 0, miután pedig kisütöttük a kondenzátort az átvitt töltés a kondenzátor kezdeti teljes töltésével egyenlő, amit Q_0-al jelölünk.) A kondenzátoron maradó töltés

$$Q_C = Q_0 - Q,$$

a kondenzátor feszültsége pedig

$$U = \frac{Q_C}{C} = \frac{Q_0 - Q}{C}.$$

A kondenzátor teljes kisütése során végzett munka:

$$W = \int dW = \int_0^{Q_0} \frac{Q_0 - Q_C}{C}\, dQ = \frac{Q_0^2}{C} - \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C}.$$

Tehát a kondenzátor energiája:

$$\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C} = \frac{1}{2}U_0 Q_0 = \frac{1}{2}U_0^2 C.$$

Az eredményt (és az ½-es szorzótényezőt) szemléletesen úgy is értelmezhetjük, hogy a kondenzátor feszültsége a kisütés közben a rajta lévő töltéssel arányban lineárisan csökken nullára. Az átalgos feszültség pedig ennek következtében a kezdeti és végső feszültség számtani átlaga:

$$U_{ÁTLAG} = \frac{1}{2}U_0.$$

A végzett munka pedig

$$U_{ÁTLAG}\ Q_0 = \frac{1}{2}U_0\ Q_0.$$

Olvasmány: az előjel és a potenciális energia

A kondenzátor energiáját megadó formulát úgy is le lehet vezetni, hogy Q-val nem az átvitt töltést, hanem a kondenzátoron lévő töltést jelöljük. A kisütés során végzett munka ekkor azonban kicsit más

$$dW = U(-dQ).$$

Ugyanis ha kisütésről van szó, akkor a kondenzátor töltése csökken, tehát *dQ* negatív. A tér által végzett dW munka viszont pozitív, mert a pozitív töltés egy kis részét (ami *–dQ*-ként irandó ebben az esetben, hiszen így lesz pozitív) visszük át a pozitív fegyverzetről a negatív fegyverzetre. A kisütésnél végzett munka evvel a jelöléssel:

$$W = \int dW = \int_{Q_0}^{0} U(-dQ) = \int_{0}^{Q_0} U\ dQ = \int_{0}^{Q_0} \frac{Q}{C}\ dQ = \frac{Q_0^2}{2C}.$$

Mint látható ez a levezetés talán egyszerűbb, de a dQ előjelének megértése több figyelmet igényel. Az előjel mint látható fontos dolog, és akármilyen egyszerű, mégis alaposan oda kell figyelni, nehogy elhibázzuk. Gyakorlásul ajánlott, hogy a kondenzátor energiáját most a feltöltésekor végzett munkából kiindulva vezessük le.

Segítség: a feltöltéskor az elektromos erőtér munkája negatív, valamilyen, a feltöltést végző erő munkája pedig pozitív. A feltöltött kondenzátor energiája természetesen pozitív. Tehát a kondenzátor energiája vagy a feltöltést végző erő munkájával egyenlő, vagy pedig az elektromos erő munkájának a mínusz 1-szeresével. Ez az előjelkonvenció onnan adódik, hogy az energia az nem munka, hanem munkavégző**képesség**. Ha tehát a tér munkát végez, akkor annyivel csökken a munkavégző képessége amennyi munkát végzett. A tér energiájának a változása tehát az általa végzett munkának a mínusz 1-szerese:

$$\Delta E_{POT} = -W.$$

Tulajdonképpen már az első levezetésnél használtuk a fenti összefüggést, amikor azt mondtuk, hogy a kondenzátor energiája az a munka amit a feltöltött kondenzátor erőtere végez a kisütés során:

$$\Delta E_{POT} = E_{POT}(2) - E_{POT}(1) = E_{POT}(\textit{kisütött kond.}) - E_{POT}(\textit{töltött kond.}) = -W.$$

A kisütött kondenzátor energiáját nullának tekintve kapjuk a kiindulásul használt formulát:

$$E_{POT}(\textit{töltött kond.}) = W.$$

Az elektrosztatikai tér energiája

Azt szeretnénk bebizonyítani, hogy az elektrosztatikus tér energiasűrűsége a tér egy pontjában

$$\rho(\textit{energia}) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}.$$

A levezetést az egyszerűség kedvéért egy síkkondenzátor lemezei között feszülő homogén elektromos térre végezzük el, és még azt is feltételezzük, hogy a kondenzátor lemezei között vákuum van. Belátható azonban (bár ennek bizonyítását itt nem közöljük), hogy az eredmény nem csak erre a speciális esetre, hanem általában is igaz.

Tekintsünk tehát egy feltöltött síkkondenzátort, amelyben a homogén elektromos térerősség **E**. Ekkor a kondenzátor feszültsége:

$$U = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E \cdot d,$$

ahol *d* a kondenzátor lemezeinek a távolsága. (Az integrálás itt a homogén tér miatt szorzássá egyszerűsödik.) A kondenzátor energiája mint láttuk:

$$E_{POT} = \frac{1}{2} U^2 C.$$

E formulában a feszültségre helyettesítsük be, hogy $U=Ed$, valamint a síkkondenzátor kapacitását $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$. Ezután azt kapjuk, hogy

$$E_{POT} = \frac{1}{2}(E\ d)^2 \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{1}{2}(E\ \varepsilon_0 E)(A\ d) = \frac{1}{2}(E\ D)V$$

ahol *V* a kondenzátor térfogata. Innen már egyszerű feladat az energiasűrűség kifejezése:

$$\rho(energia) = \frac{E_{POT}}{V} = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D},$$

ami nem más, mint a bizonyítani kívánt formulának a síkkondenzátor esetére érvényes alakja.

VI.1 Dipólusmomentum. Dipólus és töltésrendszer potenciáltere

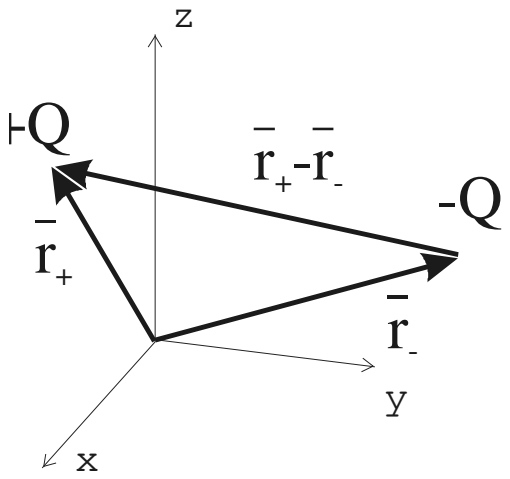
Egy töltésrendszer momentumán az alábbi kifejezést értjük:

$$\mathbf{m} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \mathbf{r}_i$$

vagyis a töltéseket súlyozzuk a hozzájuk tartozó helyvektorokkal. Az azonos nagyságú de ellentétes előjelű +Q és –Q töltésekből álló töltésrendszert dipólusnak nevezzük. Ennek a töltésrendszernek a momentuma a dipólusmomentum, amit **p**-vel jelölünk:

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_+ Q - \mathbf{r}_- Q = Q\ (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = Q\Delta\mathbf{r}.$$

Tehát a dipólusmomentum vektora a negatív töltésből a pozitív felé mutat. (Miért? Indokoljuk! Használjuk ehhez a mellékelt ábrát is.)

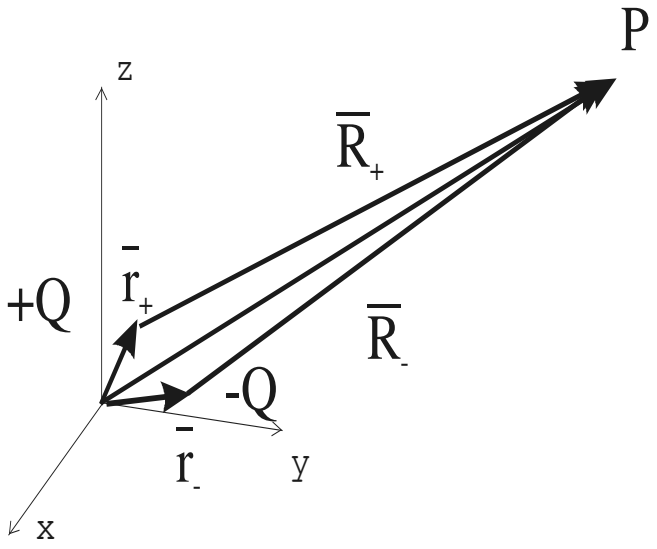


4.3 Ábra

A dipólusmomentum nagysága pedig a Q töltésnek és a töltéseket elválasztó $\Delta r = |\Delta \mathbf{r}|$ távolságnak a szorzata.

A továbbiakban azt szeretnénk belátni, hogy tetszés szerinti töltésrendszer erőtere „messziről nézve" olyan, mint egy dipólus tere. Ezt a kérdést azért érdemes megvizsgálni, mert a szigetelőanyagok molekulákból állnak, amelyekben a töltés eloszlása meglehetősen bonyolult is lehet. Ha viszont tetszés szerinti töltésrendszer a távolból nézve dipólussal helyettesíthető, akkor makroszkópikus mérések szempontjából a szigetelő anyagokat úgy tekinthetjük, mintha egyszerű dipólusokból állnának.(A molekuláris méretekhez képest ugyanis távolról vizsgáljuk ezeket a töltéseloszlásokat.)

Elsőnek egy egyszerű dipólus terét vizsgáljuk meg, és ne is az erőterét, hanem a potenciálterét számoljuk ki. Az erőtér ugyanis ebből a potenciáltérből gradiensképzéssel leszármaztatható, viszont a potenciáltérrel egyszerűbb számolni, mivel az skalártér. Tehát tekintsük az alábbi ábrát, ahol a dipólus potenciálját a dipólustól aránylag távol lévő **r** helyvektorú P pontban kívánjuk kiszámítani. A dipólusról tudjuk, hogy a koordinátarendszerünk origója közelében helyezkedik el. Jelölje $\mathbf{r}_+$ és $\mathbf{r}_-$ a pozitív és negatív töltés helyvektorát, R_+ és R_- pedig ugyanezen töltéseknek a P ponttól mért távolságát.

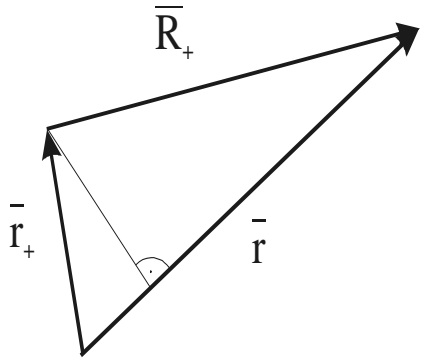


4.4 Ábra

A P pontban mért potenciál a +Q és –Q töltés által e pontban létrehozott φ_+ és φ_- potenciálok összege (**III.2**):

$$\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_+}{R_+} - \frac{Q_-}{R_-}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right)$$

Ez eddig minden közelítés nélküli precíz eredmény. Viszont eddig még nem használtuk ki, hogy r_+ és r_- sokkal kisebb, mint R_+, vagy R_-, vagy akár r. Ezek a relációk annak a következményei, hogy a P pont sokkal messzebb van az origótól, mint a dipólus. Elsőnek most próbáljuk meg R_+-at közelíteni ennek figyelembevételével. Ha a P ponttal, mint középponttal egy R_+ sugarú kört rajzolunk ez természetesen a P ponttól R_+ távolságra metszi az **r** helyvektort.



4.5 Ábra

A közelítésünk abban fog állni, hogy az $\mathbf{R}_+$ vektor merőleges vetülete az **r** vektoron közelítőleg egyenlő $\mathbf{R}_+$-al, tekintve, hogy **r** és $\mathbf{R}_+$ kis szöget zár be, és ilyenkor a körív és az **r**-re merőleges egyenes egymáshoz közel esik.
A vetületet mint tudjuk skalárszorzattal számíthatjuk, tehát:

$$R_+ \approx \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}_+}{r}.$$

Az ábra szerint $\mathbf{r}_+ + \mathbf{R}_+ = \mathbf{r}$, azaz $\mathbf{R}_+ = \mathbf{r} - \mathbf{r}_+$, és így

$$R_+ \approx \frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_+)}{r} = r - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_+}{r} = \frac{1}{r}\left(1-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_+}{r^2}\right).$$

A második átalakítást azért hajtottuk végre, hogy az R_+ reciprokában egy további közelítést tegyünk:

$$\frac{1}{R_+} \approx \left\{r\left(1-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_+}{r^2}\right)\right\}^{-1} \approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_+}{r^2}\right).$$

Hasonló megfontolásokkal

$$\frac{1}{R_-} \approx \left\{r\left(1-\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_-}{r^2}\right)\right\}^{-1} \approx \frac{1}{r}\left(1+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_-}{r^2}\right).$$

Ha ezt a két közelítést behelyettesítjük a dipólus potenciál kifejezésébe, akkor a következő eredményt kapjuk:

$$\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+}-\frac{1}{R_-}\right) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}[\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}_+-\mathbf{r}_-)],$$

vagyis a dipólus potenciálterét az alábbi kifejezéssel közelíthetjük:

$$\varphi \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{r^3},$$

ahol $\mathbf{p} = Q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)$, a dipólusmomentum.

Ezek után nézzük meg egy tetszés szerinti töltésrendszer potenciálterét. Itt is fel fogjuk tételezni azonban, hogy a töltések az origóhoz aránylag közel, a P pont pedig – ahol a töltésrendszer potenciálterét vizsgáljuk – az origótól távol helyezkedik el. A dipólus potenciálterének számításához hasonló megfontolásokat és elhanyagolásokat alkalmazva:

$$\varphi = \sum \varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{Q_i}{R_i} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\sum Q_i}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \left(\sum Q_i \mathbf{r}_i \right)}{r^3} \right].$$

Ha most azt is feltételezzük, hogy egy elektromosan semleges molekuláról van szó, akkor $\Sigma Q_i=0$. Továbbá ismét felhasználjuk, hogy egy töltésrendszer momentuma $\mathbf{m} = \Sigma \mathbf{r}_i Q_i$, és így egy semleges töltésrendszer potenciálja az **r** pontban:

$$\varphi \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{m}}{r^3}.$$

Látható tehát, hogy a töltésrendszer ugyanolyan potenciálteret hoz létre mint egyetlen **p=m** dipólusmomentumú dipólus. Vagyis ilyen alapon mindenfajta töltéseloszlással rendelkező molekulát bátran helyettesíthetünk egyetlen dipólussal.