Stacionárius terek és egyenáramok

Egyenáramok

I. A stacionaritás fogalma

A stacionárius állapot hasonlít abban a sztatikára, hogy időben mindkét állapot állandó. De a sztatikától eltérően a stacionárius állapotban áramok is vannak. A különbséget talán a következő hasonlattal lehet érzékletessé tenni. Képzeljünk el egy kád vizet, melyben a víz szintje időben állandó. Ez kétféle módon jöhet létre. Az egyik esetben a kád lefolyója be van dugaszolva, és a csap is el van zárva. Ez a sztatika. A másik esetben a csap is és a lefolyó is nyitva van, de a befolyó és a kifolyó vízáram azonos, és a vízsszint ezért nem változik. Ez a második eset a stacionárius állapot.

II. Vezetők. Az áramerősség és az áramsűrűség

Mint tudjuk az anyagok az elektromos áram vezetése szempontjából két nagy csoportra oszthatók: vezetőkre és szigetelőkre. Míg a szigetelőkben a töltéssel bíró részecskék (elektronok, ionok) helyhez kötöttek, a vezetőkben vannak olyan töltött részecskék u.n. töltéshordozók, amelyek az elektromos tér hatására áramlani kezdenek. Egyelőre maradjunk a legegyszerűbb esetnél, tehát legyen ez a vezető egy fém, ahol mint tudjuk a töltéshordozók az u.n. vezetési sávban (lásd később) lévő elektronok. A fém - mint a legtöbb anyag - elktromosan semleges, tehát a mozgékony elektronok negatív töltését a helyhez kötött atomtörzsek pozitív töltése éppen kompenzálja. Ha elektromos teret létesítünk a fémben, akkor az elektronokra ez a tér erőt gyakorol, és ezért mozgásnak indulnak és valamilyen **v** sebességre gyorsulnak fel. (Úgy képzelhetjük el, hogy az elektrongázra mint valamilyen viszkózus fluidumra surlódási erő is hat, és ez tart egyensúlyt az elektromos erővel, ezért nem gyorsul tovább a fluidum. Megjegyzendő, hogy ezt a stacionárius sebességet nagyon gyorsan, szinte pillanatszerűen éri el a vezetési elektron.) A fémben tehát a ρ_{vez} töltéssűrűséggel elhelyezkedő vezetési elektronok **v** sebességgel áramlanak. Homogén teret és homogén fémet feltételezve a **v** sebességtér is homogén lesz, vagyis nem fog függeni a helytől. Ilyen esetben egy a **v** sebességre merőleges A felületen t idő alatt áthaladó Q_t töltés egyszerűen számítható:

$$Q_t = (\rho_{vez}\, v)\, A\, t.$$

(Egy olyan hasábban lévő töltést kell tekintenünk, melynek oldaléle v·t, alapja pedig A. A hasáb térfogata szorozva a vezetési elektronok sűrűségével adja a t idő alatt átment töltést.) Az időegység alatt áthaladó töltés, vagyis az elektromos áram pedig ebben az egyszerű esetben:

$$I = (\rho_{vez}\, v)\, A.$$

Az előbbi egyszerű esettől fokozatosan haladjunk az általános felé. Először tekintsük azt, amikor a sebességtér továbbra is homogén, de a **v** sebesség tetszés szerinti α szöget zár be a felülettel. Ekkor a sebességnek csak a felületre merőleges normálkomponensével v_n-el kell számolni:

$$I= (\rho_{vez}\, v_n)\, A.$$

Tekintetbe véve, hogy a **v** vektornak és az **n** normálvektornak a skalárszorzata v_n, az **n** vektor és az A felület szorzata pedig nem más, mint az **A** felület vektor, így

$$I= (\rho_{vez}\, v_n)\, A = (\rho_{vez}\, \mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\, A \quad I= (\rho_{vez}\, \mathbf{v})\cdot\mathbf{A}.$$

Továbbá bevezethetjük az ún. áramsűrűséget

$$\mathbf{j} = \rho_{vez}\,\mathbf{v},$$

és így az áramerősségre a következő egyszerű formulát kapjuk:

$$I = \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}.$$

Végül, ha az áramsűrűség helyről helyre változik, és az A felület sem sík, akkor az egyes kis d**A** felületeken áthaladó dI áramokat kell összegezni, vagyis az általános A felületen áthaladó I áramot az alábbi felületi integrál adja:

$$I = \int_A \mathbf{j}\cdot d\mathbf{A}.$$

Természetesen az áramot és az áramsűrűséget tetszés szerinti vezetési mechanizmusra ill. ezek keverékére is értelmezni lehet a fentiek mintájára. Tehát egy A felületen átfolyó áram az ezen a felületen időegység alatt átmenő töltés. Egysége az Amper, amikoris a felületen másodpercenként 1 Coulomb töltés halad át. (Mint tudjuk azonban jobb mérhetősége miatt az Amper az alapegység, és Coulomb pedig a leszármaztatott C = A s. A dolgok megértésénél azonban ennek nincs jelentősége.) Az áramsűrűség normálkomponense pedig egy kis sík próbafelületen átfolyó áram, a felület egységére vonatkoztatva. Vagyis az áramsűrűség iránya az, amely irányú felületre a legnagyobb ez a normálkomponens, nagysága pedig az ekkor mérhető maximális nagyság. Dimenziója Amper/m^2.

III. Az Ohm törvény lokális és globális alakja

Mint láttuk stacionárius állapotban a töltéshordozók (elektronok vagy ionok) egyenletes sebességgel mozognak a vezető belsejében. Ez azt jelenti, hogy a rájuk ható erők eredője zérus. Tegyük fel, hogy egy passzív vezetőről van szó, vagyis nincs jelen ú.n. elektromotoros erő. (Az elektromotoros erőt később fogjuk tárgyalni.) Ekkor a töltéshordozóra mozgása közben csak két erő hat: az elektromos erőtér ereje és a súrlódási erő. Azt hogy ez a súrlódási erő hogyan jön létre, most részleteiben nem kutatjuk, de sokszor feltételezhető, hogy ez amolyan közegellenállás-szerű erő, amely kis sebességeknél a mozgó töltés sebességével arányos. (Ha például egy ion mozgását tekintjük egy vizes elektrolitban, ott tudjuk, hogy az ion mozgását a víz viszkozitása fékezi, és a gömbszerű hidratált ionra ható $\mathbf{F_S}$ súrlódási erő a Stokes törvény (George Gabriel Stokes 1851) értemében:

$$\mathbf{F} = -6\pi\eta r\mathbf{v},$$

ahol η a víz viszkozitása, r a hidratált ion sugara **v** pedig a sebessége. Ez a közbevetett példa most csak abból a szempontból érdekes, hogy a súrlódási erő ebben a szemléletes esetben is arányos a sebességgel, ahogyan azt a továbbiakban most már általában is fel fogjuk tételezni, a vezetés mechanizmusától függetlenül.)

Tehát ott tartottunk, hogy a mozgó töltésre két erő hat, az elektromos tér ereje és a súrlódási erő, és ennek a két erőnek az eredője zérus:

$$\mathbf{F}_{EL} + \mathbf{F}_S = 0,$$

$$Q\mathbf{E} - k\mathbf{v} = 0,$$

ahol Q a mozgó töltés nagysága, k pedig a súrlódással kapcsolatos arányossági tényező. Ez az egyenlet a **v** sebességre kifejezhető, és ha beszorozzuk a ρ töltéssűrűséggel, akkor az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\rho\mathbf{v} = \frac{\rho Q}{k}\mathbf{E},$$

amit röviden úgy írhatunk, hogy

$$\mathbf{j} = \sigma\, \mathbf{E},$$

ahol $\sigma = \frac{\rho Q}{k}$ a fajlagos vezetőképesség, maga az egyenlet pedig az Ohm törvénylokális alakja (amennyiben elektromotoros erő nincs jelen).

Ohm törvényének lokális alakja egyrészt azt mondja, hogy egy adott helyen az áramsűrűség iránya megegyezik az elektromos erőtér irányával. (Ez izotróp anyagokra –ahol a tulajdonságok irányfüggetlenek – igaz, anizotróp anyagokra azonban általában nem. A legtöbb vezető azonban izotrópnak tekinthető, tehát ez nem jelent túlságosan nagy korlátozást). Másrészt a formula szerint az áramsűrűség arányos a térerősséggel, azaz lineárisan függ tőle. Ez sem tekinthető szigorú természeti törvénynek, de általában igen jó közelítéssel igaz. Az Ohm törvényt tehát talán helyesebb lenne Ohm szabálynak mondani (kifejezve evvel annak közelítő jellegét), de az általánosan elterjedt szóhasználaton most már nem célszerű változtatni.

A lokális Ohm törvényt írhatjuk az alábbi alakba is:

$$\mathbf{E} = \rho\, \mathbf{j},$$

ahol ρ a vezető fajlagos ellenállása. Középiskolai tanulmányainkban azonban az Ohm törvénnyel nem ilyen formában, hanem az alábbi közismert alakban találkoztunk:

$$U = R\, I.$$

Ez nem más, mint a törvény globális alakja. A globális jelző azt jelenti, hogy az összefüggés nem egy vezető egy pontjában, azaz lokálisan, az ottani mennyiségek között áll fenn, hanem globális – egy kiterjedt ellenállásra értelmezett – változók közötti összefüggésről van szó. Figyeljünk fel rá, hogy a lokális Ohm törvényben valamennyi változó (**E**, ρ és **j**) egy pontban van értelmezve, míg a globális törvényben az *U*, *R* és *I* változók is globálisak, a teljes ellenállásra vonatkoznak.

Ezekután nézzük meg, hogy a globális alak hogyan származtatható a lokálisból! Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy olyan homogén anyagból álló „drótszerű" vezetődarabot, amely egy egyenes henger. A nem feltétlenül kör keresztmetszetű henger alaplapja és fedőlapja is ekvipotenciális. A kettő közötti feszültség legyen *U*.

$$U = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int \rho\, \mathbf{j} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ebben az egyszerű esetben az áramsűrűség a helytől független és mindenütt a henger alkotójával párhuzamos, tehát

$$\mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} = j\, dl,$$

ahol *dl* az elmozdulásvektornak a henger alkotójának az irányába eső vetülete. Így tehát

$$U = \int \rho\ j\, dl = \rho\ j \int dl = \rho\ j\ L = \rho \frac{I}{A} L = \rho \frac{L}{A} I = R\, I.$$

ahol *L* a vezetődarab hossza, A a keresztmetszete, $R = \rho \frac{L}{A}$ pedig az ellenállása. Itt azt is kihasználtuk, hogy az áramsűrűség minden pontban azonos, tehát $j = \frac{I}{A}$. (Ez szimmetria megfontolásokból következik, ennek alapján ugyanis az egyenes hengerben csak homogén tér képzelhető el, amennyiben az alap és a fedőlap külön-külön ekvipotenciális.)

Megjegyezzük, hogy tetszőleges alakú vezető két ekvipotenciális határoló felülete között mindig helyettesíthető egyetlen ellenállással, ennek kiszámítása azonban még homogén vezető anyagot feltételezve is bonyolult lehet. A lineáris feszültség- áramerősség összefüggést a globális törvényben azonban biztosra vehetjük, mert ezt a lokális törvény lineáris térerősség-áramsűrűség összfüggése garantálja.

Olvasmány

Annak illusztrálására, hogy milyen problémák léphetnek fel egy tetszőleges alakú vezető ellenállásának kiszámításánál, tekintsünk az alábbi egyszerű példát. Vegyünk két egyforma egyenes hengert, melyek azonos anyagból is készültek. Ekkor mindkét henger ellenállása az alap és fedőlapja között

$$R = \rho \frac{L}{A}.$$

Ha a két hengert úgy illesztjük össze, hogy az első fedőlapja és a második alaplapja tökéletesen illeszkedik, akkor az így keletkező henger ellenállása *2R*. De mi van akkor, ha az első henger fedőlapja és a második alaplapja csak részben fed át? Ekkor a szimmetria megbomlik, és az ellenállás (amely természetesen ilyenkor is létezik) kiszámítása általában numerikus módszereket igényel. Tudniillik ilyenkor a potenciálteret a Laplace egyenlet ($\Delta\varphi=0$) megoldásaként nyerjük, a megfelelő peremfeltételek figyelembevételével. (A peremfeltételek az alábbiak: van két ekvipotenciális felület, ahol adott a potenciál: az első henger alaplapja, és a második henger fedőlapja. Ezt a két felületet köti össze a két hengerből álló rendszer. A hengerek palástján és az egymással érintkező lapok „fedetlen" részeire pedig az érvényes, hogy ezen felületeken át nem folyik áram, tehát a potenciálgradiensnek a normális irányú komponense zérus ezeken a felületeken.) A vezető minden pontjában érvényes a lokális Ohm törvény:

$$j = \sigma \mathbf{E},$$

valamint a stacionaritás feltételéből adódóan az is, miszerint

$$div\mathbf{j} = 0.$$

Ha ide behelyettesítjük az Ohm törvényt, és azt is tekintetbe vesszük, hogy az elektromos erőtér a potenciál negatív gradiense, akkor jutunk a Laplace egyenlethez**:**

$$div\mathbf{j} = div(\sigma\,\mathbf{E}) = div(\sigma\,(-grad\varphi)) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad div(grad\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 0.$$

A fenti levezetés feltételezte, hogy σ, a fajlagos vezetőképesség helytől független állandó. Inhomogén anyagoknál azonban ez nem érvényes, és ezért ott az eredeti egyenletet kell megoldani

$$div(\sigma\ grad\varphi) = 0,$$

ugyanazokkal a peremfeltételekkel, mint az előbb. Az ilyen problémák megoldására ma már kész számítógépes programok állnak a rendelkezésünkre.

IV. A vezetés mechanizmusai. Elektromos áram fémekben, elektrolitokban, gázokban és vákuumban

Kísérlet: vezetés vízben (desztillált víz, sós víz, csapvíz), vezetés hevített üvegben, gázkisülés, katódsugárcsövek

V. A félvezetők sávmodellje, saját és szennyezéses vezetés

(Ezt a laborban alaposan elmagyarázzuk, ezért a sávmodell lényegének ismertetése után most csak címszavakban beszélek erről.)

A szilárd testek energiasáv modellje: megengedett és tiltott sávok. Mindegyik megengedett sáv igen sok (de véges számú) egymáshoz nagyon közel eső energianívót tartalmaz és minden ilyen nívón a Pauli elv értelmében legfeljebb két

elektron lehet. Az egyes sávok tulajdonképpen a diszkrét atomi energianívók felhasadásaként jönnek létre a kristályba zárt atomok kölcsönhatása miatt. A legfelső teljesen betöltött sáv az u.n. alapsáv (vagy más szóval vegyértéksáv), a felette lévő félig betöltött, vagy üres sáv pedig az u.n. vezetési sáv.

Vezetők és szigetelők. Félvezetők. Szennyezéses vezetés.

VI. Az elektromos áram munkája és teljesítménye. Joule törvénye lokális és globális formában

Egy fém belsejében legyen az elektromos térerősség **E**. A benne lévő vezetési elektronokra ható elektromos és a súrlódási erő egymással egyensúlyt tartanak, és ennek hatására az elektronok állandó **v** sebességgel mozognak, vagyis áram folyik a vezetőben. (Természetesen ez egy erősen leegyszerűsített kép, amely az elektronok rendezetlen mozgásaitól eltekint. De jelen céljainknak ez a modell teljesen megfelel.) Egy elektronra ható elektromos erő

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E},$$

ahol e az elektron töltése ($-1{,}6\cdot10^{-19}$ C). A mechanikából tudjuk, hogy az **F** erő W munkája, illetve P teljesítménye:

$$W = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad \text{és} \qquad P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

Az elektromos térnek tehát egy vezetési elektronra eső teljesítménye:

$$P = e\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}.$$

Amennyiben a térfogategységben n darab vezetési elektron található, akkor az elektromos tér téfogategységre jutó teljesítménye, vagyis a teljesítménysűrűség:

$$\frac{dP}{dV} = ne\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}.$$

Tekintetbe véve, hogy az *ne* szorzat nem más mint a vezetési elektronok töltéssűrűsége

$$ne = \rho_{vez},$$

továbbá ezen töltéssűrűség és a sebesség szorzata az áramsűrűséget adja,

$$\mathbf{j} = \rho_{vez}\,\mathbf{v},$$

ezért a teljesítménysűrűség az alábbi egyszerű alakba írható:

$$\frac{dP}{dV} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}.$$

Ez a Joule törvény lokális alakja. Ez a lokális kifejezés inhomogén tér és fém esetén is igaz, hiszen lokálisan nem „érződik” hogy a tér, vagy a fém inhomogén. (Ott csak a helyi tér számít. A pont környezetét pedig minden határon túl nagyítva a közvetlen környezet egyre inkább homogénnek tűnik.) Ha viszont ténylegesen homogén térről valamint homogén és izotróp fémről van szó, akkor ezt a lokális törvényt könnyű integrálni. Példaként tekintsünk egy olyan hengert, melynek alkotói párhuzamosak a térrel, alap és fedőlapja pedig erre merőleges. Legyen a henger alaplapjának területe A, hossza pedig L. A hengerben létrejövő teljesítmény ekkor

$$P = \int \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\,dV = jE\,V = jE\,AL.$$

Tekintetbe véve, hogy most az áramerősség egyszerűen az áramsűrűség és a keretszmetszet szorzata (j A =I), valamint az U feszülség itt U = E L, megkapjuk a jólismert formulát

$$P = U\cdot I.$$

Ez a formula azonban általában is igaz egy tetszés szerinti vezetődarab két olyan ekvipotenciális keresztmetszete közötti térfogatában létrejövő teljesítményre, amely keresztmetszetek között eső feszültség U. Ha ugyanis csupa olyan dV térfogatelemet veszünk fel, amelyek alap és fedőfelülete ekvipotenciális (ezek most már általában görbült felületek és nem síkok), a közöttük lévő potenciálkülönbség pedig dU, akkor

$$P = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\, dV = \iint (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})(d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}) = \iint (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{A})(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}) = \int_A \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} \int_G \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = IU.$$

E merőleges az ekvipotenciális felületre, ezért **E** és d**A** párhuzamos. Ezért a fenti szorzatban kicserélhető **E** és d**A** anélkül, hogy az eredmény változna (Lássuk be, hogy miért!?). Az E dr szorzat a két felület közötti dU feszültség, amely minden helyen ugyanaz, hiszen ez két ekvipotenciális felület közötti feszültség. A ∫jdA integrál pedig nem más, mint az I áramerősség.

Egy gyakorlatilag egydimenziósnak tekinthető vezetéken folyó áram esetében a fenti problémák nem merülnek fel. A t idő alatt valamennyi keresztmetszetén Q_t töltés halad át, és egy dr szakaszon

$$dW = Fdr = Q_t E\, dr$$

munkavégzés történik, ahol $Q_t = I\, t$. Ez a teljes hosszra integrálva:

$$W = Q_t \int E\, dr = U\, I\, t.$$

A vezetőben létrejövő teljesítmény pedig

$$P = U \cdot I.$$

Ez a Joule törvény megszokottabb globális alakja. Amikor olyan feladatot kell megoldani, ahol ohmikus ellenálláson létrejövő hőteljesítmény a kérdés, akkor a Joule törvényt az Ohm törvénnyel együtt alkalmazzuk:

$$P = U\, I = R\, I^2 = \frac{U^2}{R} \quad \text{(globális alakok)}$$

$$\frac{dP}{dV} = jE = \rho\, j^2 = \frac{E^2}{\rho} \quad \text{(lokális alakok)}$$