A stacionárius elektromos áram és a mágneses tér kapcsolata

I. Az áramtól átfolyt vezető mágneses tere. Oersted és Ampère kísérletei.

Az elektromos és mágneses jelenségek sokban hasonlítanak egymásra, és ezért régóta gyanították, hogy a kettő között valamiféle kapcsolat van. Mi tudjuk, hogy ezt a létező kapcsolatot az első két Maxwell-egyenlet mutatja, amelyek értelmében az elektromos áram örvényes mágneses teret, a változó mágneses tér pedig örvényes elektromos teret kelt. A sztatikus térben azonban nincsen áram, és a mágneses tér sem változik. Ilyenkor tehát az elektromos és mágneses terek között nincs is kapcsolat: a mágnesrúd nem hat a megdörzsölt borostyánkőre és viszont. Ennek fényében érthetjük meg azt, hogy hiába ismertek jól bizonyos elektro- és magnetosztatikai jelenségeket már az ókorban is, miután nem tudtak elektromos áramot előállítani, ezért az elektrodinamika igazi kezdetére Oersted felfedezéséig kellett várni. 1820-ig a tudomány hivatalos álláspontja az volt, hogy elektromosság és mágnesség között nincsen kapcsolat.

Hans Christian Oersted dán természettudós (1770-1854) a tudomány professzora volt a Koppenhágai Egyetemen. Oersted filozófiai alapon hitt abban, hogy az elektromosság és mágnesség között igenis van kapcsolat. 1820. egy áprilisi estéjén természettudományos kísérletekre hívta meg a házába a hallgatóit és néhány barátját. Akkoriban újdonság volt a Volta-féle oszlop, amelynek segítségével addig nem látott nagy elektromos áramokat lehetett előállítani. Ez az áram egy vékony platina drótot akár az izzásig is fel tudott hevíteni. Természetesen Oersted is be akarta mutatni ezt a kísérletet a tanítványainak. De más célja is volt evvel a kísérlettel. Saját elbeszélése szerint (a történetnek ugyanis több variációja ismeretes) már egy korábbi előadásán az jutott eszébe, hogy nem lehetséges-e az, hogy amiként fény és hő sugárzik szét az izzó drótból, eközben mágneses hatás is emittálódik belőle. A demonstrációs asztalra ezért egy mágnestűt is készített. (Más elbeszélések szerint a felfedezés a véletlen műve volt, és a mágnestű csak azért volt az asztalon, mivel a későbbiekben mágneses kísérleteket is be kívánt mutatni.) Akárhogyan is volt, akár Oersted zseniális sejtését igazolva, akár az ő legnagyobb meglepetésére, de valahányszor áramot kapcsolt a platina drótra, hogy az felizzon, mindannyiszor az asztalon lévő iránytű is kilendült. Attól kezdve három hónapig a felfedezés lázában élt, és további kísérleteket végzett. Végül júliusban egy latin(!) nyelvű cikkben publikálta megfigyeléseit, amit hamarosan az összes nagyobb európai nyelvre lefordítottak. Érdekes megemlíteni, hogy egy olasz jogász (avagy jurista, ahogy akkoriban mondták) Gian Domenico Romagnosi már 1802-ben, vagyis Oersted előtt 18 évvel felfedezte az áram hatását a mágnestűre, bejelentését azonban közöny fogadta, és csakhamar el is felejtették. Oerstedre viszont jobban figyeltek, hiszen 1815-től haláláig a Dán Királyi Akadémia titkára volt, kora nagy hatású személyisége. A művészeteket is pártolta, többek között a híres meseírót, Hans Christian Andersent is támogatta pályája kezdetén. A vegyészeket még az is érdekelheti, hogy 1825-ben Oersted elsőként állított elő fém alumíniumot.

Oersted kvalitatív megfigyeléseit André-Marie Ampère (1775-1836) öntötte kvantitatív formába. Az Oersted-féle kísérlettel Ampère 1820. szeptember 11-én találkozott először a Francia Tudományos Akadémián. Ampère képzeletét annyira megragadta az, amit látott, hogy bár elméleti tudós volt, maga is kísérletezni kezdett az áram mágneses terével. Azonnal rájött, hogy Oersted nem értette meg teljesen a kísérletet, nem vette figyelembe ugyanis a Föld mágneses terét. Ezért Ampère olyan kísérleti kamrát épített, amelyben forgatható mágnesekkel semlegesíteni tudta a Föld mágneses terét, és így az áram által létrehozott mágneses teret a Föld külső mágneses terének zavaró hatása nélkül tudta tanulmányozni.

Az Ampère-féle gerjesztési törvény globális alakja

Amit Ampère méréseiből kikövetkeztetett, azt mai jelöléssel és szóhasználattal a következő állításban foglalhatjuk össze. A mágneses térnek egy zárt görbén vett görbementi integrálja (a **H** cirkulációja erre a zárt hurokra nézve) egyenlő a hurok belsejében folyó áramok algebrai összegével. A pozitív irányt a hurok körüljárási iránya és a jobbkézszabály együttesen szabja meg. Matematikai szimbólumokkal:

$$\oint \mathbf{H}\,\mathbf{dr} = \Sigma\, I_i$$

Az Ampère-féle gerjesztési törvény lokális alakja

A globális alakból a Stokes-tétellel juthatunk a lokális alakhoz. Azt az elektromos áramot ugyanis, amely a hurkon átfolyik, úgy is megkaphatjuk, ha a hurok mint perem által kifeszített felületre integráljuk az e felületen átfolyó elektromos áram sűrűségét. (Megjegyezzük, hogy ez az áramsűrűség nem szükségszerűen különbözik a nullától mindenütt ezen a felületen: ha az áramot szállító vezetékek keresztmetszete nem tölti ki a teljes keresztmetszetet, akkor az üres helyeken az áramsűrűség zérussal lesz egyenlő, és ezeken a helyeken evvel az értékkel kell a felületi integrálban figyelembe venni.) Tehát:

$$\oint \mathbf{H}\,\mathbf{dr} = \Sigma\, I_i = \int_A \mathbf{j}\,\mathbf{dA}$$

Ha a görbementi integrált most felületi integrállá alakítjuk a Stokes-tétellel, akkor az alábbi alakhoz jutunk:

$$\int_A \mathbf{rotH}\,\mathbf{dA} = \int_A \mathbf{j}\,\mathbf{dA}$$

vagyis a két felületi integrál egyenlő. Ebből általában még nem következne, hogy az integrandusok is egyenlőek, de mivel az egyenlőség *tetszés szerinti A felületre érvényes*, ez már csak úgy valósulhat meg, hogy maguk az integrandusok is egyenlőek, azaz

$$\mathbf{rot\ H} = \mathbf{j},$$

ami nem más, mint az Ampère-féle gerjesztési törvény lokális alakja.

II. Szolenoid mágneses tere. H mérése szolenoidos kompenzációval

Végtelen hosszú egyenes vezető mágneses tere

A mágneses tér nagyságát az egyenes vezetőtől merőlegesen mért R távolságban keressük. Ebben a vezetőben folyjon I áram, és merőlegesen döfje át egy képzeletbeli korong közepét. A zárt görbementi integrált képezzük egy olyan R sugarú körön, amely ezen korong peremét képezi. A körüljárási irányt úgy válasszuk meg, hogy az áramirány pozitív legyen. Ekkor a kör peremén egyik pont sincs kitüntetett helyzetben, és a kör menti érintőleges elmozdulás azonos irányú az ugyancsak érintőleges mágneses térrel. Vagyis ha az Ampère-féle gerjesztési törvényt egy ilyen körre felírjuk

$$\oint \mathbf{H}\,\mathbf{dr} = I\,,$$

akkor a **H** mágneses tér és a **dr** elmozdulás párhuzamos lévén a két vektor skalárszorzata megegyezik az abszolút értékeik szorzatával:

$$\mathbf{H}\cdot\mathbf{dr} = |\mathbf{H}|\cdot|\mathbf{dr}|.$$

Továbbá, mivel a mágneses tér abszolút értéke a kör mentén mindenütt azonos, ezért az integrál elé kiemelhető, vagyis

$$|\mathbf{H}|\cdot\oint|\mathbf{dr}| = I.$$

A kör menti kis $|\mathbf{dr}|$ elmozdulások összege viszont nem más, mint az R sugarú kör kerülete, tehát

$$|\mathbf{H}|2R\pi = I \qquad \text{vagyis} \qquad |\mathbf{H}| = I/2R\pi.$$

Tehát végtelen hosszú egyenes vezető mágneses tere a távolsággal fordítottan arányos, iránya pedig a már említett képzeletbeli korong érintőjének irányába mutat.

<u>Tekercs (szolenoid) mágneses tere</u>

Jó közelítés, ha a tekercs belsejében lévő mágneses teret homogénnek és a tekercs tengelyével párhuzamosnak képzeljük el. (A közelítés csak a tekercs végeinél problematikus, aholis szóródnak az erővonalak, és ezért ott inhomogén a mágneses tér. Ez viszont, hosszú tekercset feltételezve, a tekercs hosszához képest csak kis tartomány.) A másik közelítés, hogy a tekercsen kívüli mágneses teret elhanyagolhatónak tekintjük. Ezek után vegyünk egy olyan zárt görbét, amely a tekercsen belül a tengelyvonalban halad, és a tekercsen kívül záródik. Ha erre a zárt görbére felírjuk az Ampère-féle gerjesztési törvényt, akkor a tekercsen belül ismét azt írhatjuk, hogy $\mathbf{H}\cdot\mathbf{dr} = |\mathbf{H}|\cdot|\mathbf{dr}|$, a tekercsen kívül pedig a görbe menti integrál zérust ad, és így

$$\oint\mathbf{H}\,\mathbf{dr} = nI \quad\Rightarrow\quad |\mathbf{H}|\cdot\oint|\mathbf{dr}| = n\cdot I \quad\Rightarrow\quad |\mathbf{H}|\cdot L = n\cdot I \quad\Rightarrow\quad |\mathbf{H}| = n\cdot I/L,$$

ahol L a tekercs hossza, n pedig a menetszáma. (A zárt görbénken ugyanis a tekercs I árama n-szer folyik át.)

<u>H mérése szolenoiddal</u>

Az előző paragrafusban láttuk, hogy a tekercs belsejében homogén mágneses tér jön létre, amelynek iránya a tekercs tengelyébe esik, amely irányt tekercsen átfolyó áram a jobbkézszabály szerint határoz meg, nagysága pedig

$$H = n\cdot I/L.$$

Ez lehetőséget teremt arra, hogy egy ismeretlen mágneses teret kompenzációval mérjünk. Ha ugyanis az ismeretlen teret egy ismert térrel kioltunk, akkor tudhatjuk, hogy az ismeretlen tér ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú volt, mint az ismert terünk. (Természetesen ez elég sok vacakolást jelentene a gyakorlatban, hiszen nem csak a tekercsben folyó I áram nagyságát, de a tekercs irányát is változtatni kell ahhoz, hogy az ismeretlen teret az ismerttel ki tudjuk oltani. Ezzel a nehézkességgel azonban most nem törődünk, a számunkra jelenleg elég az, hogy egy elvi mérési módszert meg tudunk adni.)
A méréshez kell még egy nulldetektor is, amelyet a tekercs belsejében helyezünk el, és amely képes jelezni azt, hogy van-e mágneses tér a tekercs belsejében, ahol a kompenzációt létre akarjuk hozni. Egy iránytű, amely minden irányban elfordulhat (pl. Cardano-féle felfüggesztéssel), alkalmas lehet a célra. Amennyiben ugyanis van külső mágneses tér, az iránytű ebbe az irányba fog beállni, és oda vissza is tér, ha például elcsavarjuk onnan. Ha viszont nincs külső tér, akkor ott marad, ahová állítjuk. Amikor ilyen közömbös állapotot értünk el, az jelzi, hogy sikerült a kompenzáció, és ekkor elmondhatjuk, hogy megmértük az ismeretlen teret.

III. Laplace elemi törvénye és a Biot-Savart törvény

Az áramtól átfolyt vezető mágneses terére nézve az Ampére-féle gerjesztési törvénnyel ekvivalens megfogalmazást ad Laplace elemi törvénye, ami egy a koordinátarendszer origójába helyezett d**l** hosszúságú és irányú vezetőszakasz által a tér **r** pontjában létesített d**H** mágneses teret adja meg irány és nagyság szerint, feltéve, hogy a vezetőben I erősségű áram folyik (I pozitív, ha iránya d**l** irányával megegyezik, ellenkező esetben negatív):

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{e}_r}{r^2}.$$

ábra

Itt $\mathbf{e}_r$ az **r** irányba mutató egységvektor. (Laplace Ampère kortársa volt, nagytekintélyű matematikus-fizikus, akinek nevét őrzi az általa elsőként felírt $\Delta\phi = 0$ ún. Laplace-egyenlet, és az ennek nyomán jóval később bevezetett $\Delta=(\boldsymbol{\nabla})^2$ Laplace-operátor is. Elsősorban égi mechanikával foglalkozott, Napóleon alatt pedig egy ideig belügyminiszter is volt.)
Természetesen Laplace elemi törvénye a Maxwell-egyenletekből levezethető, ugyanúgy, mint a Coulomb-törvény is (amire egyébként eléggé hasonlít). Ezeket a levezetéseket az alábbi Olvasmányban ismertetjük.

A Coulomb törvény és Laplace elemi törvényének levezetése a Maxwell egyenletekből
(Olvasmány)

Laplace elemi törvényét az elektrosztatika Coulomb törvényének analógiájára lehet levezetni. Ezért elsőként a Coulomb törvényt vezetjük le a Maxwell egyenletekből.

A Coulomb törvény levezetése a Maxwell egyenletekből
Ha ezt a a törvényt a Maxwell egyenletekből akarjuk származtatni, akkor az elektroszatika mindkét alaptörvényét fel kell használnunk, vagyis:

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho \quad \text{és} \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0}.$$

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy vákuumban vagyunk, amikoris

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Az a feltétel, hogy az elektrosztatikai tér örvénymentes, egyenértékű avval, hogy egy ϕ potenciálból származtatható:

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\phi.$$

Ezekből az egyenletekből következik az ún. Poisson-egyenlet:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

ahol $\Delta\Phi=\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\Phi) = \partial^2\Phi/\partial x^2 + \partial^2\Phi/\partial y^2 + \partial^2\Phi/\partial z^2$. (Érdemes arra is felfigyelni, hogy a töltésmentes sztatikus potenciáltérre a Poisson-egyenletből éppen a $\Delta\Phi = 0$ Laplace-egyenlet adódik.) Ha viszont van töltés a térben, akkor általában a ρ töltéssűrűség a hely függvénye:

$$\rho = \rho(\mathbf{r}_Q),$$

ahol a szokásos **r** helyett azért jelöltük a helyvektort $\mathbf{r}_Q$ –val, hogy kihangsúlyozzuk: ez a töltés helvektora. Az index nélküli **r** pedig annak a pontnak a helyvektorát fogja itt jelölni, amely pontban a potenciált kérdezzük

$$\Phi = \Phi(\mathbf{r}).$$

Belátható, hogy a Poisson egyenlet megoldása az alábbi alakba írható:

$$\Phi(\mathbf{r}) = (1/4\pi\varepsilon_0)\int_V \rho(\mathbf{r}_Q)dV/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|.$$

Hogy ezt belássuk, tegyük fel, hogy a térnek egy $\mathbf{r}_Q$ pontjában egy pontszerű $dQ = \rho(\mathbf{r}_Q)dV$ töltés helyezkedik el. Ennek a pontszerű töltésnek a potenciálja az **r** pontban (a pontszerű töltés potenciálteréről tanultak alapján láthatjuk be, de e nélkül is bizonyítható):

$$d\Phi(\mathbf{r}) = (1/4\pi\varepsilon_0)dQ/|\mathbf{r} - \mathbf{r}| = (1/4\pi\varepsilon_0)(\rho(\mathbf{r}_Q)dV)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|.$$

A pontszerű töltés potenciálteréből pedig a folytonos töltéseloszlás potenciáltere integrálással kapható:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int d\Phi(\mathbf{r}) = (1/4\pi\varepsilon_0)\int_V \rho(\mathbf{r}_Q)dV/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|.$$

Mi fordított úton jártunk: a Coulomb törvényből vezettük le a pontszerű töltés potenciálterét, amiből folytonos töltéseloszlásra következik a fenti egyenlet. Ha a fenti egyenletet beírjuk az $\mathbf{E} = -\text{grad}\,\phi$ egyenletbe, és figyelembe vesszük, hogy

$$\text{grad}(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q| = -\mathbf{e}_r/(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)^2$$

akkor megkapjuk a folytonos töltéseloszlás erőterét

$$\mathbf{E} = (1/4\pi\varepsilon_0)\int_V \rho(\mathbf{r}_Q)dV\mathbf{e}_r/(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)^2,$$

alakban, amely ekvivalens a Coulomb törvénnyel. Hogy ez tényleg a Coulomb törvénnyel ekvivalens, azt például úgy láthatjuk be, hogy az origó közelében egy pontszerű töltéseloszlást képzelünk el, vagyis

$$\mathbf{r}_Q \approx 0 \quad \text{és} \quad \int_V \rho(\mathbf{r}_Q)dV = Q.$$

Ekkor az erőtér nem más mint az origóba helyezett pontszerű töltés erőtere:

$$\mathbf{E} = (1/4\pi\varepsilon_0)\int_V \rho(\mathbf{r}_Q)dV\mathbf{e}_r/(\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q)^2 = (1/4\pi\varepsilon_0)Q\mathbf{e}_r/\mathbf{r}^2,$$

amely összefüggést egyszer már levezettünk éppen a Coulomb törvényből kiindulva.

Laplace elemi törvényének a levezetése a Maxwell egyenletekből

Laplace elemi törvényének levezetése analóg utakat követ mint a Coulomb törvényé. A stacionárius mágneses térre vonatkozó mindkét Maxwell-egyenletet fel kell használni, tehát

$$\mathbf{rot\,H} = \mathbf{j}, \quad \text{és} \quad \text{div}\mathbf{B} = 0,$$

továbbá itt is feltételezzük, hogy vákuumban vagyunk:

$$\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{H}.$$

Az elektrosztatikában a potenciál bevezetését az a feltétel biztosítja, hogy a tér örvénymentes. A mágneses tér forrásmentes, és ez egy ún. vektorpotenciál bevezetését teszi lehetővé, vagyis

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot\,A},$$

ahol az **A** a vektorpotenciál. (Így ugyanis a div**B** = 0 feltétel automatikusan teljesül, mivel a div(rot **v**) mindig nulla. Az örvényfonalaknak nincs forrása.) Ezek után a fenti egyenletekből vektoranalitikai összefüggéseket felhasználva adódik egy a Poisson-egyenlettel analóg, de nem skalár, hanem vektori egyenlet:

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu_0\cdot\mathbf{j}$$

Ez az egyenlet úgy jön ki, hogy első lépésként a **B** = rot **A** egyenlet minkét oldalának a rotációját képezzük

$$\mathbf{rot\,(rot\,A)} = \mathbf{rot\,B}$$

A stacionárius terekre érvényes Maxwell egyenletekből tudjuk, hogy

$$\mathbf{rot\,H} = \mathbf{j}.$$

Ha ezen egyenlet mindkét oldalát μ_0-al megszorozzuk, akkor

$$\mathbf{rot}\,\mu_0\mathbf{H} = \mu_0\mathbf{j},$$

vagyis

$$\mathbf{rot\,(rot\,A)} = \mathbf{rot\,B} = \mu_0\mathbf{j}.$$

Másrészt felírható az alábbi vektoranalitikai összefüggés:

$$\mathbf{rot\,(rot\,A)} = \mathbf{grad}(\text{div}\,\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}$$

Ha a vektorpotenciált célszerűen úgy választjuk, hogy div**A** = 0, akkor rot (rot **A**) = - Δ**A**, tehát a fentiekből valóban következik, hogy

$$\Delta\mathbf{A} = -\mu_0\cdot\mathbf{j}.$$

A vektori jellegből következik, hogy itt tulajdonképpen három, a Poisson-egyenlettel most már tökéletesen analóg egyenletről van szó:

$$\Delta(A_x) = -\mu_0 \cdot j_x \qquad \Delta(A_y) = -\mu_0 \cdot j_y \qquad \Delta(A_z) = -\mu_0 \cdot j_z$$

amelyeknek a megoldásai a Poisson egyenlet megoldásának analógiájára:

$$A_x(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\pi)\int_V j_x(\mathbf{r}_j)dV/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|, \quad A_y(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\pi)\int_V j_y(\mathbf{r}_j)dV/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j| \quad \text{és}$$

$$A_z(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\pi)\int_V j_z(\mathbf{r}_j)dV/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|.$$

A fenti három egyenlet egyetlen vektoregyenletben foglalható össze:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\pi)\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}_j)dV/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|.$$

Az áramot általában „drótokban” vezetjük, vagyis a teljes térnek csak egy kis részében - konkrétan a vezetékekben – különbözik az áramsűrűség a nullától. Vagyis a fenti térfogati integrált csak az áramtól átfolyt vezetékek térfogatára kell tekintenünk, a tér többi részének hozzájárulása zérus.

Tekintsünk most egy infinitézimálisan rövid dl hosszúságú vezetődarabot, amelynek a kereszmetszete legyen q. A vezetődarabka helyvektora legyen $\mathbf{r}_j$. Az általa létrehozott vektorpotenciál a tér $\mathbf{r}$ helyvektorú pontjában ekkor:

$$\mathbf{dA}(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\pi)\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}_j)dV/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j| = (\mu_0/4\pi)\left[\int_q \mathbf{j}(\mathbf{r}_j)dq\right] dl/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|.$$

Ha a q keresztmetszet igen kicsi, akkor a vezeték gyakorlatilag egydimenziós. Ilyenkor az áramsűrűség iránya mindenhol megegyezik a vezetékhez húzott érintő irányával. Az érintő irányú egységvektort jelöljük **t**-vel**.** Ekkor

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_j) = j(\mathbf{r}_j)\cdot\mathbf{t}.$$

A vezeték keresztmetszetére vett felületi integrál ebben az esetben

$$\int_q \mathbf{j}(\mathbf{r}_j)dq = \left[\int_q j(\mathbf{r}_j)dq\right]\cdot\mathbf{t} = I\cdot\mathbf{t},$$

mivel stacionárius állapotban a vezeték valamennyi keresztmetszetén ugyanaz az I áramerősség folyik. Ha ez az összefüggést beírjuk a **dA**(**r**) –t megadó térfogati integrálba, az akkor így a következő görbe menti integrállá alakítható

$$\mathbf{dA}(\mathbf{r}) = (\mu_0/4\pi)\cdot I\cdot\mathbf{dl}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_w|,$$

ahol bevezettük a dl·t = **dl** jelölést, valamint $\mathbf{r}_j$ az áramsűrűség helyvektorának helyére most $\mathbf{r}_w$, azaz a dl drótdarabka helvektora kerül. A **B** = rot **A** egyenletből következik, hogy a dl drótdarabka által létrehozott mágneses indukció:

$$\mathbf{dB} = \mathbf{rot\ dA}$$

vagyis

$$\mathbf{dB} = \mathbf{rot}\{(\mu_0/4\pi)\cdot I\cdot\mathbf{dl}/(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_w|)\} = (\mu_0/4\pi)\cdot I\cdot\mathbf{rot}\{\mathbf{dl}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_w|\}.$$

Vektoranalitikai összefüggés, hogy a **v**(**r**) vektortér és az s(**r**) skalártér szozatának a rotációja felírható az alábbi két tag összegeként:

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{v}\cdot s) = \mathbf{v}\times\mathrm{grad}(s) + s\cdot\mathbf{rot}(\mathbf{v}).$$

Esetünkben $\mathbf{v} = \mathbf{dl}$, $s = 1/(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_w|)$. **dl** azonban csak $\mathbf{r}_w$-től függ, **r**-től nem, ezért **rot**(**dl**) = 0. Ezért

$$\mathbf{rot}\{\mathbf{dl}/(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_w|)\} = \mathbf{dl}\times\mathrm{grad}(1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_w|) = \mathbf{dl}\times\mathbf{e}_r/(\mathbf{r}-\mathbf{r}_w)^2,$$

vagyis

$$\mathbf{dB} = (\mu_0/4\pi)\cdot I\cdot\mathbf{dl}\times\mathbf{e}_r/(\mathbf{r}-\mathbf{r}_w)^2,$$

vagy mivel $\mathbf{dB}/\mu_0 = \mathbf{dH}$ Laplace elemi törvénye végül az alábbi formába írható:

$$\mathbf{dH} = (I/4\pi)\cdot\mathbf{dl}\times\mathbf{e}_r/(\mathbf{r} - \mathbf{r}_w)^2,$$

ami, ha a drótdarabka az origóban van

$$\mathbf{dH} = (I/4\pi)\cdot\mathbf{dl}\times\mathbf{e}_r/r^2$$

Ha van egy zárt vezető hurok, amelyben áram folyik, akkor a tér egy pontjában valamennyi elemi áram kifejti hatását. Ahhoz, hogy megkapjuk a mágneses térerősséget ebben a pontban, az elemi hatásokat integrálni kell a zárt áramhurokra. Az eredmény pedig nem más, mint az ún. Biot-Savart törvény:

$$\mathbf{H} = \int d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\oint\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{e}_r}{r^2}.$$

IV. A mágneses tér hatása az áramtól átfolyt vezetőre

Kísérlet: inga

Ha egy áramtól átfolyt $\Delta\mathbf{l}$ hosszúságú és irányú vezetőt egy olyan térbe helyezünk, ahol a mágneses indukció vektora **B**, akkor a vezetőre erő hat (ezt mutatta az ingás kísérlet is **ábra**), amelyet irány és nagyság szerint a következő formulával számolhatunk:

$$\Delta\mathbf{F} = I\,[\Delta\mathbf{l}\times\mathbf{B}].$$

Az I áram akkor tekintendő pozitívnak, ha ugyanabba az irányba mutat, mint a $\Delta\mathbf{l}$ vektor. Az egyszerűség kedvéért e két irányt mindig azonosan szokás felvenni, és így I mindig pozitív. Ez a formula az, amit „FIB szabály” néven lehet memorizálni, az egyes betűket (pontosabban a három vektor irányát) a jobb kezünk hüvelyk, mutató és középső ujjához rendelve.

E formulával kapcsolatban (amit most csak úgy „kapásból” írtunk fel) két jogos kérdés merülhet fel:

1) levezethető-e a Maxwell-egyenletekből,

2) miért jelenik meg itt a **B** a **H** helyett?

Az első kérdésre a válasz -mint sejthetjük- igen, és ez a levezetés arra is választ ad, hogy miként jelenik meg a **B** a formulánkban. Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk meg egy d**l** nagyságú és irányú I áramtól átfolyt vezetődarab és egy tőle **r** irányban elhelyezkedő p nagyságú mágneses pólus kölcsönhatását. A vezető a p pólus helyén

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{e}_r}{r^2}$$

nagyságú és irányú teret létesít. (A koordinátarendszerünk origójában most a vezetődarab van.) Ez a mágneses tér

$$d\mathbf{F}_{\mathbf{p,dl}} = p\,d\mathbf{H}$$

erővel hat a mágneses pólusra. Feltételezhető továbbá, hogy Newton 3. axiómája szerint a pólus is ugyanekkora, csak ellentétes irányú erővel hat a vezetődarabra, vagyis:

$$d\mathbf{F}_{\mathbf{dl,p}} = -d\mathbf{F}_{\mathbf{p,dl}}\,,$$

$$d\mathbf{F}_{\mathbf{dl,p}} = -p\frac{I}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{e}_r}{r^2}$$

Azt is tudjuk, hogy a p pólus tőle **r** távolságban és irányban **H** mágneses teret létesít, amelyet a mágneses Coulomb-törvényre alapozva az alábbi formula ad meg:

$$\mathbf{H'} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{p\mathbf{e}_r}{r^2}$$

ha a koordinátarendszerünk origójában éppen a p pólus lenne. Megállapodásunk értelmében azonban az origóban a vezetődarab van, ezért a vezetődarab helyén a mágneses tér

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{p\mathbf{e}_r}{r^2}$$

$$d\mathbf{F}_{\mathbf{dl},\mathbf{p}} = I[d\mathbf{l} \times \mu_0 \mathbf{H}],$$

Ha ezt a mágneses teret helyettesítjük be a vezetődarabkára ható erő kifejezésébe, akkor a következő összefüggéshez jutunk:
ami éppen a keresett FIB szabály, tekintetbe véve, hogy vákuumban

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}.$$

V. A mágneses tér hatása az áramtól átfolyt vezető keretre. B mérése magnetométerrel

Kísérlet: vezető keret

Az egyetlen vezető szakaszra ható erő pontos mérése általában nem olyan egyszerű, mivel a hozzávezetések drótjaira is többé-kevésbé hathat a mágneses tér (hacsak a mágneses teret nem lokalizáljuk gondosan a kérdéses vezető szakaszra). Ennél egyszerűbb probléma, ha a teljes áramkört belehelyezzük a mágneses térbe, vagyis nemcsak egyetlen vezető darabra, hanem egy teljes vezető keretre nézzük az erőhatást, pontosabban az eredő forgatónyomatékot. Homogén térben ugyanis a vezető keretre eredő erő nem hat, csak forgatónyomaték, amelyet az alábbi formulával számíthatunk:

$$\mathbf{M}_{KERET} = I[\mathbf{A}\times\mathbf{B}],$$

ahol **A** a sík vezetőkerethez rendelt felületvektor, melynek irányítottságát a keretben folyó áram és a jobbkézszabály szabja meg. (A jobb kezünk behajlított 4 ujja mutatja az áramirányt, a hüvelykujjunk pedig az **A** vektor irányát.) A forgatónyomaték fenti kifejezése természetesen nem egy független szabály: az egyenes vezetőre ható erő már ismertetett kifejezéséből származtatható. Ez a levezetés téglalap alakú keretre a legegyszerűbb, de tetszőleges alakú síkkeretekre is bizonyítható. Ha n menetes sík tekercset alkalmazunk, a forgatónyomaték n-szer nagyobb lesz:

$$\mathbf{M}_{TEKERCS} = n\mathbf{M}_{KERET} = nI[\mathbf{A}\times\mathbf{B}].$$

A fenti összefüggést használhatjuk a mágneses indukció vektorának (azaz **B**-nek) a mérésére, ezért a lapos síktekercset szokás magnetométernek is nevezni. (A módszer elvileg csak homogén terek esetén pontos; inhomogén tér esetén valamiféle átlagot mér. A tekercs méreteinek csökkentésével azonban ezt a hibát tetszés szerint lehet csökkenteni.) **B** meghatározása magnetométerrel a következőképpen történik.
1) Először is meghatározzuk a **B** irányát. Ez nem más, mint a tekercs stabil egyensúlyi helyzetével kijelölt **A** irány. Ha ugyanis **A** és **B** párhuzamos, a kettő vektorszorzata zérus. Két ilyen helyzet van, de amikor **A** és **B** egymással ellentétes irányú, akkor az egyensúly nem stabil.

2) Ha megtaláltuk **B** irányát, utána a nagyságát a maximális forgatónyomatékból tudjuk meghatározni. Ez akkor lép fel, amikor a tekercs **A** vektorát a **B**-re merőlegesem állítjuk. Ekkor

$$M_{max} = nIAB,$$

ahol a B kivételével valamennyi változó értékét ismerjük. **B** nagysága tehát kifejezhető ismert mennyiségekkel. A magnetométer tekercs természetesen árammérésre is használható, így működik a laborban megismert Deprez-műszer.

VI. A FIB szabály lokális alakja. Az elektromágneses tér hatása a mozgó töltésre. A Lorentz-féle erőtörvény

Kísérlet: elektronsugárra ható mágneses erő

Tekintsünk egy henger alakú egyenes vezető szakaszt, amelynek irányvektora (hossza és iránya) $\Delta\mathbf{l}$, keresztmetszete pedig A. A benne folyó áram a vezető keresztmetszetén homogénen oszoljon el. Ezt a vezetőt homogén mágneses térbe

$$\Delta\mathbf{F} = I[\Delta\mathbf{l} \times \mathbf{B}] = A\Delta l[\mathbf{j} \times \mathbf{B}].$$

helyezve a rá ható erőt az áramsűrűséggel is ki tudjuk fejezni:
Továbbá érdemes bevezetni az erősűrűség fogalmát, így a FIB szabály lokális alakjához juthatunk:
Az erősűrűségnek ez a kifejezése alkalmas arra, hogy belőle a Q töltéssel rendelkező

$$\mathbf{f} = \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta V} = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}].$$

és a mágneses térben **v** sebességgel mozgó töltésre ható erőt levezessük. Úgy foghatjuk fel ugyanis, hogy a mozgó töltés minden pontjában

$$\mathbf{j} = \rho\,\mathbf{v}$$

áramsűrűségű áram folyik, és ennek következtében ott az erősűrűség $[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]$. A részecskére ható teljes erőt az erősűrűség térfogati integráljaként kapjuk:

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}dV = \int_V [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]dV = \int_V [\rho\mathbf{v} \times \mathbf{B}]dV = [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]\int_V \rho dV = Q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}],$$

mivel a **v** sebesség a részecskében mindenütt ugyanaz (ne forogjon), és a **B** tér is, ezért a $[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]$ szorzat is állandó, és az integráljel elé kiemelhető. A $\int\rho dV$ integrál pedig nem más, mint a részecske töltése.

Ha a mágneses tér mellett elektromos tér is van, akkor a **v** sebességgel mozgó Q töltéssel bíró részecskére ható ún. Lorentz-féle erő:

$$\mathbf{F} = Q([\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \mathbf{E}),$$

a Lorentz-törvény lokális alakja pedig:

$$\mathbf{f} = [\mathbf{j}\times\mathbf{B}] + \rho\mathbf{E}.$$

VII. Az áramok közötti erőhatás és az Amper definíciója

Kísérlet: két vezető inga kivetítve

Egyszerű formulát tudunk levezetni, ha két egymástól d távolságra lévő végtelen hosszú párhuzamos vezető közötti erőhatást vizsgálunk, mondjuk az első vezetőben folyó I_1 áram hatását második vezető Δl hosszúságú szakaszára, amely vezetőben folyjon I_2 áram. Tekintsük a következő ábrát:

ÁBRA: két párhuzamos vezető, a bennük folyó egyirányú áramok, a mágneses térerősség, a mágneses indukció iránya, valamint az erőhatás iránya a FIB szabály alapján

A végtelen hosszú első vezetőben folyó I_1 áram tőle d távolságra

$$H = \frac{I_1}{2d\pi}$$

mágeneses teret létesít, amely

$$B = \mu_0 \cdot H$$

mágeneses indukciót hoz létre a második vezetőre merőlegesen. A FIB szabály szerint a második vezető Δl hosszúságú szakaszára ható ΔF erő

$$\Delta F = I_2 \cdot \Delta l \cdot B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\Delta l}{d} \cdot I_1 \cdot I_2$$

melynek iránya a FIB szabály értelmében az első vezető felé mutat (azaz vonzóerő), ha a két áram iránya azonos, és ezzel ellentétes(tehát taszítóerő), ha a két áram iránya egymással ellentétes.

Abban a speciális esetben, ha $\Delta l = d$ – pl. mindkettő 1 m – és mindkét áram pontosan 1 amper, akkor a ΔF erő pontosan $2 \cdot 10^{-7}$ Newton, amit az amper definíciójának tekinthetünk. A definíció alapján a vákuum permittivitása:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A \cdot m}.$$

A $\frac{V \cdot s}{A \cdot m}$ mértékegység úgy jön ki, ha tekintebe vesszük, hogy $N = \frac{J}{m} = \frac{V \cdot A \cdot s}{m}$.

VIII. H és B mérése. Összefoglalás

H és B mérése vákuumban

A magnetosztatika tárgyalásánál már volt arról szó, hogy mi módon mérhető a **H** mágneses térerősség. Akkor azt mondtuk, hogy a mágneses térerősség az elektromos térerősséghez hasonlóan az egységnyi póluserősségű északi pólusra ható erő, azaz

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{F}}{p},$$

ahol p a mágneses póluserősség. (A p póluserősség egysége különben a Weber, amely SI egységekben kifejezve Vs, de ritkán szoktuk használni.) Ha csak a magnetosztatikát tekintjük, akkor a **H** fenti definíciója, illetve mérési utasítása teljesen kielégítő lenne, és minden az elektrosztatika analógiájára volna mérhető. (Az egyetlen különbséget csak az okozná, hogy valódi mágneses töltések nincsenek, csak polarizációs töltések. Ezért a felhasznált mérőeszköz nem egy különálló északi pólus lenne, hanem egy hosszú mágnesrúdnak az északi pólusa. Ettől eltekintve azonban a méréseket az elektrosztatika analógiájára lehetne végrehajtani.) **H**-t azonban az eddig elmondottakkal szemben mégsem magnetosztatikai módszerekkel mérjük. Ennek oka az, hogy az elektromos áram is mágneses teret kelt, és mi valamennyi mérésünket az elektromos áram és az ezzel kapcsolatos erőhatások mérésére kívánjuk visszavezetni. (Ez az MKSA mértékrendszer miatt van így.) Az áramtól átfolyt vezetődarabra ható erőhatás, illetve az áramtól átfolyt vezetőhurokra ható forgatónyomaték viszont -mint láttuk- nem a **H**, hanem a **B** vektorral van kapcsolatban. Ezért így **B** lesz az erőhatással kapcsolatos mágneses térmennyiség, és nem a **H**. **B**-t az ún. magnetométerrel mérjük, amely egy n menetszámú lapos kis tekercs. Legyen a tekercsben folyó áram erőssége I. Ekkor a tekercsre a **B** mágneses indukciójú térben ható **M** forgatónyomaték:

$$\mathbf{M} = n\,I\,\mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

ahol **A** a lapos tekercs keresztmetszete, mint vektor. Az **A** vektor a lapos tekercs síkjára merőleges olyan vektor, melynek irányítottságát a tekercsben folyó áram iránya és a jobbkézszabály adja meg. (Tehát az **A** irányát jobb kezünk hüvelykujja adja meg, feltéve, hogy behajlított jobb kezünk többi ujja az áram irányába mutat.) **B** meghatározása a magnetométerrel két lépésben történik. Először meghatározzuk **B** irányát. Ez úgy történik, hogy megkeressük a magnetométer stabil egyensúlyi helyzetét. **A** és **B** ekkor azonos irányba mutat. (A forgatónyomaték akkor is nulla, ha **A** és **B** éppen ellentétes irányú, ez azonban a magnetométernek nem a stabil, hanem az instabil egyensúlyi helyzete.) Miután megvan **B** iránya, ezek után nagyságát úgy határozzuk meg, hogy magnetométerünket erre az irányra merőlegesen állítjuk be. Ebben a pozícióban hat a maximális forgatónyomaték, amelyből **B** nagysága számítható:

$$|\mathbf{B}| = \frac{|\mathbf{M}_{\max}|}{n\,I\,|\mathbf{A}|}.$$

Megjegyzendő, hogy inhomogén **B** tér esetén a magnetométer tekercs A keresztmetszetét minél kisebbre kell választani, hogy a tér a magnetométer környezetében még jó közelítéssel homogénnek legyen tekinthető, mivel a fenti összefüggések homogén térre érvényesek.

A **H** mágneses térerősség mérése a gerjesztési törvény alapján kompenzációs módszerrel történhet. Az ismeretlen térerősségű mágneses térrel szembe azonos nagyságú, de ellentétes irányú mágneses teret kapcsolva a mágneses tér megszűntethető. Azt, hogy a mágneses tér megszűnt, valamilyen nulldetektor, például egy iránytű jelezheti. (Mágneses tér híján a mágnestű minden irányba egyformán beállítható, nincs a mágneses tér által kijelölt irány.) Az azonos nagyságú, de ellentétes irányú ismert teret például egy szolenoiddal állíthatjuk elő, melynek belsejében a tér nagysága:

$$H = \frac{n\,I}{l},$$

ahol n a tekercs menetszáma, l a hossza, I pedig a benne folyó áram. Feladatunk tehát abban áll, hogy a tekercs irányát és a benne folyó áram nagyságát úgy szabályozzuk, hogy a tekercs belsejében elhelyezett mágnestű zérus mágneses teret jelezzen. Ekkor az ismeretlen tér nagysága megegyezik a szolenoid által létrehozott térrel, iránya pedig éppen ellentétes vele.

H és B mérése anyagi közegben

Mérőeszközeink az anyagi közegben is ugyanazok lesznek, mint vákuumban, csak ezeknek a mérőeszközöknek üreget kell vájnunk az anyagi közeg belsejében. A probléma tehát hasonló, mint az elektrosztatikában: nevezetesen az, hogy milyen üregeket célszerű a mérésekhez kialakítani? Mivel a **B** tér forrásmentes tér (hasonlóan mint a **D** tér szigetelőanyag belsejében, ha ott nincs valódi töltés), ezért ha a **B** térre merőleges üreget vájunk, akkor ebben az üregben ugyanakkora lesz a mágneses indukció vektora, mint az anyag belsejében. A **B** teret tehát ilyen üregben mérjük, a már ismert magnetométerrel.

A **H** méréséhez az **M** mágneses polarizációval párhuzamos hosszúkás üreget kell vájni, hasonlóan, mint **E** méréséhez az elektrosztatikában. Ekkor ugyanis a hosszúkás üreg palástján nem keletkezik polarizációs mágneses töltés, az üreg alap- és fedőlapján keletkező polarizációs töltések hatása pedig elhanyagolható. Így a **H** mágneses térerősség az üreg belsejében ugyanakkora lesz, mint az anyag belsejében. Izotróp közegben **H** és **M** párhuzamos, és így a mágneses térerősség párhuzamos lesz a hosszúkás üreg tengelyével. Ebbe a hosszúkás üregbe kell azután mérőeszközünket, a szolenoidot a mágnestűvel együtt elhelyezni.