A stacionárius elektromos áram és a mágneses tér kapcsolata

I. Az áramtól átfolyt vezető mágneses tere. Oersted és Ampére kísérletei.

Kísérletek: egyenes vezető, szolenoid és más vezetők mágneses tere vasreszelékkel

II.Szolenoid mágneses tere. H mérése szolenoidos kompenzációval

Karcsi féle kísérlet (két tekercs között egy iránytű)

III. Laplace elemi törvénye és a Biot-Savart törvény

Az áramtól átfolyt vezető mágneses terére nézve az Ampére féle gerjesztési törvénnyel ekvivalens megfogalmazást ad Laplace elemi törvénye, ami egy a koordinátarendszer origójába helyezett d**l** hosszúságú és irányú vezetőszakasz által a tér **r** pontjában létesített d**H** mágneses teret adja meg irány és nagyság szerint, feltéve, hogy a vezetőben I erősségű áram folyik (I pozitív, ha iránya d**l** irányával megegyezik, ellenkező esetben negatív):

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{e}_r}{r^2}.$$

ábra

Itt $\mathbf{e}_r$ az **r** irányba mutató egységvektor.(Laplace Ampére kortársa volt, nagytekintélyű matematikus-fizikus, akinek a nevét őrzi az általa elsőként felírt $\Delta\phi = 0$ ú.n. Laplace egyenlet, és az ennek nyomán jóval később bevezetett $\Delta=(\nabla)^2$ Laplace operátor is. Elsősorban égi mechanikával foglalkozott, Napóleon alatt pedig egy ideig belügyminiszter is volt.)

Természetesen Laplace elemi törvénye a Maxwell egyenletekből levezethető, ugyanúgy, mint a Coulomb törvény is (amire egyébként eléggé hasonlít). Ezeket a levezetéseket most nem ismertetjük. (Majd később apró betűs olvasmányként iktatjuk be. Itt zárójelben egyelőre csak a levezetések kiindulási pontjait érdemes megmutatni.) A Coulomb törvény levezetéséhez az elektroszatika mindkét alaptörvényét fel kell használni, vagyis:

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho \quad \text{és} \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathbf{0},$$

valamint feltételezzük, hogy vákuumban vagyunk, tehát

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}.$$

Az a feltétel, hogy az elektrosztatikai tér örvénymentes egyenértékű avval, hogy egy ϕ potenciálból származtatható:

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\phi.$$

Ezekből az egyenletekből következik az ú.n. Poisson egyenlet:

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

amelyből azután levezethető Coulomb törvénye. Érdemes felfigyelni rá, hogy a töltésmentes sztatikus potenciáltérre a Poisson egyenletből éppen a Laplace egyenlet adódik.

Laplace elemi törvényének levezetése analóg utakat követ. A stacionárius mágneses térre vonatkozó mindkét Maxwell egyenletet fel kell használni, tehát

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \text{és} \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0,$$

továbbá itt is feltételezzük, hogy vákuumban vagyunk:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

Az elektrosztatikában a potenciál bevezetését az a feltétel biztosítja, hogy a tér örvénymentes. A mágneses tér forrásmentes, és ez egy ú.n. vektorpotenciál bevezetését teszi lehetővé, vagyis

$$\mathbf{H} = \text{rot}\ \mathbf{A},$$

ahol az **A** a vektorpotenciál. (Így ugyanis a div**B** = div(μ_0**H**) = 0 feltétel automatikusan teljesül, mivel a div(rot **v**) mindig nulla. Az örvényfonalaknak nincs forrása.) Ezekután a fenti egyenletekből vektoranalitikai összefüggéseket felhasználva adódik egy a Poisson egyenlettel analóg, de nem skalár, hanem vektori egyenlet:

amiből azután Lapalce elemi törvénye levezethető. A vektori jellegből következik, hogy itt

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{\mathbf{j}}{\mu_0},$$

tulajdonképpen három, a Poisson egyenlettel most már tökéletesen analóg egyenletről van szó. Pl.az x komponensekre áll az alábbi egyenlet:

Ha van egy zárt vezető hurok, amelyben áram folyik, akkor a tér egy pontjában valamennyi

$$\Delta(A_x) = -\frac{j_x}{\mu_0},$$

elemi áram kifejti hatását. Ahhoz, hogy megkapjuk a mágneses térerősséget ebben a pontban, az elemi hatásokat integrálni kell a zárt áramhurokra. Az eredmény pedig nem más mint az u.n. Biot-Savart törvény:

$$\mathbf{H} = \int d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\oint\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{e}_r}{r^2}.$$

IV. A mágneses tér hatása az áramtól átfolyt vezetőre

Kísérlet: inga

Ha egy áramtól átfolyt $\Delta\mathbf{l}$ hosszúságú és irányú vezetőt egy olyan térbe helyezünk, ahol a mágneses indukció vektora **B**, akkor a vezetőre erő hat (ezt mutatta az ingás kísérlet is **ábra**), amelyet irány és nagyság szerint a következő formulával számolhatunk:

$$\Delta\mathbf{F} = I\,[\Delta\mathbf{l}\times\mathbf{B}].$$

Az I áram akkor tekintendő pozitívnak, ha ugyanabba az irányba mutat, mint a $\Delta\mathbf{l}$ vektor. Az egyszerűség kedvéért e két irányt mindig azonosan szokás felvenni, és így I mindig pozitív. Ez a formula az, amit „FIB szabály” néven lehet memorizálni, az egyes betűket (pontosabban a három vektor irányát) a jobbkezünk hüvelyk, mutató és középső ujjához rendelve.

E formulával kapcsolatban (amit most csak úgy „kapásból” irtunk fel) két jogos kérdés merülhet fel.

1) Levezethető-e a Maxwell egyenletekből,

2) miért jelenik meg itt a **B** a **H** helyett?

Az első kérdésre a válasz mint sejhetjük igen, és ez a levezetés arra is választ ad, hogy miként jelenik meg a **B** a formulánkban. Az egyszerűség kedvéért vizsgáljuk meg egy d**l** nagyságú és irányú I áramtól átfolyt vezetődarab és egy tőle **r** irányban elhelyezkedő p nagyságú mágneses pólus kölcsönhatását. A vezető a p pólus helyén

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{e}_r}{r^2}$$

nagyságú és irányú teret létesít. (A koordinátarendszerünk origójában most a vezetődarab van.) Ez a mágneses tér

$$d\mathbf{F}_{\mathbf{p,dl}} = p\ d\mathbf{H}$$

erővel hat a mágneses pólusra. Feltételezhető továbbá, hogy Newton 3. axiómája szerint a pólus is ugyanekkora csak ellentétes irányú erővel hat a vezetődarabra, vagyis:

$$d\mathbf{F}_{\mathbf{dl,p}} = -d\mathbf{F}_{\mathbf{p,dl}},$$

$$d\mathbf{F}_{\mathbf{dl,p}} = -p\frac{I}{4\pi}\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{e}_r}{r^2}$$

Azt is tudjuk, hogy a p pólus a tőle **r** távolságban és irányban **H** mágneses teret létesít, amelyet a mágneses Coulomb törvényre alapozva az alábbi formula ad meg:

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{p\mathbf{e}_r}{r^2}$$

Ha a koordinátarendszerünk origójában éppen a p pólus lenne.Megállapodásunk értelmében azonban az origóban a vezetődarab van ezért a vezetődarab helyén a mágneses tér

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{p\mathbf{e}_r}{r^2}$$

Ha ezt a mágneses teret helyettesítjük be a a vezetődarabkára ható erő kifejezésébe, akkor a következő összefüggéshez jutunk

$$d\mathbf{F}_{dl,\mathbf{p}} = I[d\mathbf{l}\times\mu_0\mathbf{H}],$$

ami éppen a keresett FIB szabály tekintetbe véve, hogy vákuumban

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}.$$

V. A mágneses tér hatása az áramtól átfolyt vezető keretre. B mérése magnetométerrel

Kísérlet: vezető keret

Az egyetlen vezető szakaszra ható erő pontos mérése általában nem olyan egyszerű, mivel a hozzávezetések drótjaira is többé-kevésbé hathat a mágneses tér (hacsak a mágneses teret nem lokalizáljuk gondosan a kérdéses vezető szakaszra). Ennél egyszerűbb probléma, ha a teljes áramkört belehelyezzük a mágneses térbe, vagyis nemcsak egyetlen vezető darabra, hanem egy teljes vezető keretre nézzük az erőhatást, pontosabban az eredő forgatónyomatékot. Homogén térben ugyanis a vezető keretre eredő erő nem hat, csak forgatónyomaték, amelyet az alábbi formulával számíthatunk:

$$\mathbf{M} = I[\mathbf{A}\times\mathbf{B}],$$

ahol **A** a sík vezetőkerethez rendelt felületvektor, melynek irányítottságát a keretben folyó áram és a jobbkézszabály szabja meg. (A jobbkezünk 4 ujja mutatja az áramirányt, a hüvelykujjunk pedig az **A** vektor irányát.) A forgatónyomaték fenti kifejezése természetesen nem egy független szabály: az egyenes vezetőre ható erő már ismertetett kifejezéséből származtatható. Ez a levezetés téglalap alakú keretre a legegyszerűbb, de tetszőleges alakú síkkeretekre is bizonyítható. Ha n menetes sík tekercset alkalmazunk a forgatónyomaték n-szer nagyobb lesz

$$n\mathbf{M} = nI[\mathbf{A}\times\mathbf{B}].$$

A fenti összefüggést használhatjuk a mágneses indukció vektorának (azaz **B**-nek) a mérésére, ezért a lapos síktekercset szokás magnetométernek is nevezni. (A módszer elvileg csak homogén terek esetén pontos; inhomogén tér esetén valamiféle átlagot mér. A tekercs méreteinek csökkentésével azonban ezt a hibát tetszés szerint lehet csökkenteni.) **B** meghatározása magnetométerrel a következőképpen történik.

1) Először is meghatározzuk a **B** irányát. Ez nem más mint a tekercs stabil egyensúlyi helyzetével kijelölt **A** irány. Ha ugyanis **A** és **B** párhuzamos, a kettő vektorszozata zérus. Két ilyen helyzet van, de amikor **A** és **B** egymással ellentétes irányú, akkor az egyensúly nem stabil.

2) Ha megtaláltuk **B** irányát, utána a nagyságát a maximális forgatónyomatékból tudjuk meghatározni. Ez akkor lép fel, amikor a tekercs **A** vektorát a **B**-re merőlegesem állítjuk. Ekkor

$$M_{max} = nIAB,$$

Ahol a B kivételével valamennyi változó értékét ismerjük. **B** nagysága tehát kifejezhető ismert mennyiségekkel. A magnetométer tekercs természetesen árammérésre is használható, így működik a laborban megismert Deprez műszer.

VI. A FIB szabály lokális alakja. Az elektromágneses tér hatása a mozgó töltésre. A Lorentz féle erőtörvény

Kísérlet: elektronsugárra ható mágneses erő

Tekinsünk egy hengeralakú egyenes vezető szakaszt, amelynek irányvektora (hossza és iránya) $\Delta\mathbf{l}$, keresztmetszete pedig A. A benne folyó áram a vezető keresztmetszetén homogénen oszoljon el. Ezt a vezetőt homogén mágneses térbe helyezve a rá ható erőt az áramsűrűséggel is ki tudjuk fejezni:

$$\Delta\mathbf{F} = I[\Delta\mathbf{l}\times\mathbf{B}] = A\Delta l[\mathbf{j}\times\mathbf{B}].$$

Továbbá érdemes bevezetni az erősűrűség fogalmát, így a FIB szabály lokális alakjához juthatunk:

$$\mathbf{f} = \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta V} = [\mathbf{j}\times\mathbf{B}].$$

Az erősűrűségnek ez a kifejezése alkalmas arra, hogy belőle a Q töltéssel rendelkező és a mágneses térben **v** sebességgel mozgó töltésre ható erőt levezessük. Úgy foghatjuk fel ugyanis, hogy a mozgó töltés minden pontjában

$$\mathbf{j} = \rho\,\mathbf{v}$$

áramsűrűségű áram folyik, és ennek következtében ott az erősűrűség $[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]$. A részecskére ható teljes erőt az erősűrűség térfogati integráljaként kapjuk:

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}dV = \int_V [\mathbf{j}\times\mathbf{B}]dV = \int_V [\rho\mathbf{v}\times\mathbf{B}]dV = [\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\int_V \rho dV = Q[\mathbf{v}\times\mathbf{B}],$$

mivel a **v** sebesség a részecskében mindenütt ugyanaz (ne forogjon), és a **B** tér is, ezért a $[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]$ szorzat is állandó, és az integráljel elé kiemelhető. A $\int\rho dV$ integrál pedig nem más, mint a részecske töltése.

Ha a mágneses tér mellett elektromos tér is van, akkor a **v** sebességgel mozgó Q töltéssel bíró részecskére ható ú.n. Lorentz-féle erő:

$$\mathbf{F} = Q([\mathbf{v}\times\mathbf{B}] + \mathbf{E}).$$

A Lorentz törvény lokális alakja pedig:

$$\mathbf{f} = [\mathbf{j}\times\mathbf{B}] + \rho\mathbf{E}.$$

VII. Az áramok közötti erőhatás és az Amper definíciója

Kísérlet: két vezető inga kivetítve

VIII. H és B mérése. Összefoglalás

H és B mérése vákuumban

A magnetosztatika tárgyalásánál már volt arról szó, hogy mi módon mérhetõ a **H** mágneses térerõsség. Akkor azt mondtuk, hogy a mágneses térerõsség az elektromos térerõsséghez hasonlóan az egységnyi póluserõsségû északi pólusra ható erõ, azaz

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{F}}{p},$$

ahol p a mágneses póluserõsség. (A p póluserõsség egysége különben a Weber, amely SI egységekben kifejezve Vs, de ritkán szoktuk használni.) Ha csak a magnetosztatikát tekintjük, akkor a **H** fenti definíciója, illetve mérési utasítása teljesen kielégítõ lenne, és minden az elektrosztatika analógiájára volna mérhetõ. (Az egyetlen különbséget csak az okozná, hogy valódi mágneses töltések nincsenek, csak polarizációs töltések. Ezért a felhasznált mérõeszköz nem egy különálló északi pólus lenne, hanem egy hosszú mágnesrúdnak az északi pólusa. Ettõl eltekintve azonban a méréseket az elektrosztatika analógiájára lehetne végrehajtani.) **H**-t azonban az eddig elmondottakkal szemben mégsem magnetosztatikai módszerekkel mérjük. Ennek oka az, hogy az elektromos áram is mágneses teret kelt, és mi valamennyi mérésünket az elektromos áram és az ezzel kapcsolatos erõhatások mérésére kívánjuk visszavezetni. (Ez az MKSA mértékrendszer miatt van így.) Az áramtól átfolyt vezetõdarabra ható erõhatás, illetve az áramtól átfolyt vezetõhurokra ható forgatónyomaték viszont mint láttuk nem a **H**, hanem a **B** vektorral van kapcsolatban. Ezért így **B** lesz az erõhatással kapcsolatos mágneses térmennyiség, és nem a **H**. **B**-t az ún. magnetométerrel mérjük, amely egy n mentszámú lapos kis tekercs. Legyen a tekercsben folyó áram erõssége I. Ekkor a tekercsre a **B** mágneses indukciójú térben ható **M** forgatónyomaték:

$$\mathbf{M} = \mathrm{n}\,\mathrm{I}\,\mathbf{A}\times\mathbf{B},$$

ahol **A** a lapos tekercs keresztmetszete, mint vektor. Az **A** vektor a lapos tekercs síkjára merõleges olyan vektor, melynek irányítottságát a tekercsben folyó áram iránya és a jobbkézszabály adja meg. (Tehát az **A** irányát jobb kezünk hüvelykujja adja meg, feltéve, hogy behajlított jobb kezünk többi ujja az áram irányába mutat.) **B** meghatározása a magnetométerrel két lépésben történik. Elõször meghatározzuk **B** irányát. Ez úgy történik, hogy megkeressük a magnetométer stabil egyensúlyi helyzetét. **A** és **B** ekkor azonos irányba mutat. (A forgatónyomaték akkor is nulla, ha **A** és **B** éppen ellentétes irányú, ez azonban a magnetométernek nem a stabil, hanem az instabil egyensúlyi helyzete.) Miután megvan **B** iránya, ezekután nagyságát úgy határozzuk meg, hogy magnetométerünket erre az irányra merõlegesen állítjuk be. Ebben a pozicióban hat a maximális forgatónyomték, amelybõl **B** nagysága számítható:

$$\left|\mathbf{B}\right| = \frac{\left|\mathbf{M}_{\max}\right|}{\mathrm{n}\,\mathrm{I}\left|\mathbf{A}\right|}.$$

Megjegyzendõ, hogy inhomogén **B** tér esetén a magnetométer tekercs A keresztmetszetét minél kisebbre kell választani, hogy a tér a magnetométer környezetében még jó közelítéssel homogénnek legyen tekinthetõ, mivel a fenti összefüggések homogén térre érvényesek.

A **H** mágneses térerõsség mérése a gerjesztési törvény alapján kompenzációs módszerrel történhet. Az ismeretlen térerõsségû mágneses térrel szemben azonos nagyságú, de ellentétes irányú mágneses teret kapcsolva a mágneses tér megszûntethetõ. Azt, hogy a mágneses tér megszûnt, valamilyen nulldetektor, például egy iránytû jelezheti. (Mágneses tér híján a mágnestû minden irányba egyformán beállítható, nincs a mágneses tér által kijelölt irány.) Az azonos nagyságú, de

ellentétes irányú ismert teret például egy szolenoiddal állíthatjuk elõ, melynek belsejében a tér nagysága:

$$H = \frac{n I}{l},$$

ahol n a tekercs menetszáma, l a hossza, I pedig a benne folyó áram. Feladatunk tehát abban áll, hogy a tekercs irányát és a benne folyó áram nagyságát úgy szabályozzuk, hogy a tekercs belsejében elhelyezett mágnestû zérus mágneses teret jelezzen. Ekkor az ismeretlen tér nagysága megegyezik a szolenoid által létrehozott térrel, iránya pedig éppen ellentétes vele.

H és B mérése anyagi közegben

Mérõeszközeink az anyagi közegben is ugyanazok lesznek, mint vákuumban, csak ezeknek a mérõeszközöknek üreget kell vájnunk az anyagi közeg belsejében. A probléma tehát hasonló, mint az elektrosztatikában, nevezetesen az, hogy milyen üregeket célszerû a mérésekhez kialakítani? Mivel a **B** tér forrásmentes tér (hasonlóan mint a **D** tér szigetelõanyag belsejében, ha ott nincs valódi töltés), ezért ha a **B** térre merõleges üreget vájunk, akkor ebben az üregben ugyanakkora lesz a mágneses indukció vektora, mint az anyag belsejében. A **B** teret tehát ilyen üregben mérjük, a már ismert magnetométerrel.

A **H** méréséhez az **M** mágneses polarizációval párhuzamos hosszúkás üreget kell vájni, hasonlóan, mint **E** méréséhez az elektrosztatikában. Ekkor ugyanis a hosszúkás üreg palástján nem keletkezik polarizációs mágneses töltés, az üreg alap- és fedõlapján keletkezõ polarizációs töltések hatása pedig elhanyagolható. Így a **H** mágneses térerõsség az üreg belsejében ugyanakkora lesz, mint az anyag belsejében. Izotróp közegben **H** és **M** párhuzamos, és így a mágneses térerõsség párhuzamos lesz a hosszúkás üreg tengelyével. Ebbe a hosszúkás üregbe kell azután mérõeszközünket, a szolenoidot a mágnestûvel együtt elhelyezni.