

A GRAVITÁCIÓ

Gravitáció, (főnév) Az hogy a testek hogyan közelednek egymáshoz a vonzóerő hatására, a bennük lévő anyag tömegétől függ – és az, hogy mennyi a testek tömege, a közöttük ébredő vonzóerőből állapítható meg

AMBROSE BIERCE

((The Enlarged Devils Dictionary),

(Az ördög kibővített szótára))

93 millió mérföldnyire a Naptól egy gömbölyűre kopott sziklán ülök, amely óránként 1000 mérföldes sebességgel pörög ... fejem kifelé mutat a térbe és semmi sincs közöttem és a végtelen között, csak az, amit gravitációnak nevezünk, amit nem is tudok megérteni, s amit senki sem tud sehol megvásárolni, hogy tartalékolja egy gravitáció nélküli napra

RUSSELL BAKER

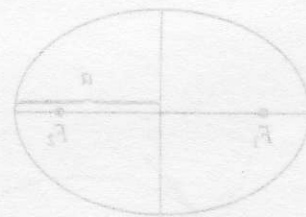
(Am. Journal of Physics 43, 704 (1975))

16.1 Bevezetés

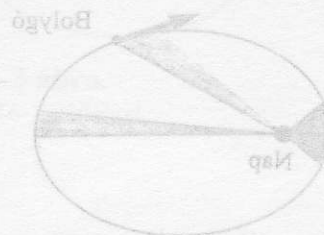
Mi a gravitáció? Ez a kérdés komolyan foglalkoztatja a természettudósokat már a régi görögök kora óta. A vita mindmáig tart. A leginkább elfogadott gravitációelmélet – Einstein általános relativitáselmélete – egyezik az eddig végzett néhány kísérlet eredményével, de további bizonyítékok megnyugtatóak lennének. Néhány, további kísérlet, amely az általános relativitáselméletet ellenőrzi, jelenleg előkészítés alatt van¹.

Egészen a tizenhetedik századig arról, hogy miért esnek a testek a földre, a legelterjedtebb vélemény az volt, hogy ez földi testek „természetes” hajlama. De mert ezt a hajlamot a Nap nyilvánvalóan nem követte, úgy vélték, hogy a „mennyei” testek más mozgástörvénynek engedelmessé válnak. Ez az égi és földi mozgásokra vonatkozó kettős gondolkodási norma Arisztotelész idejétől (~ Kr.e. 340) mintegy kétezer éven át tartotta magát. Ezek az elképzelések a Földnek kitüntetett szerepet tulajdonítottak. Mi voltunk a középpont, és a mi fizikai törvényeink az univerzum többi részének a törvényeitől különböztek.

Az ilyen eszmék nehezen halnak el. Jóllehet, most könnyen elfogadjuk, hogy a Föld csak jelentéktelen helyet foglal el a dolgok nagy rendszerében, de az emberiség otthonának, mint az univerzum középpontjának feladása keserves felismerés volt. 1600-ban az olasz Giordano Bruno filozófust mág-



(a) Ellipszis F_1 és F_2 fókuszpontokkal. A az ellipszis egy pontja.



(b) Kepler második törvénye: a Nap körüli mozgás során a Nap minden pontjában a pályán áthaladó terület az idővel arányos.

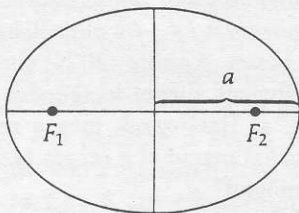
¹ Nemrégiben néhány alternatív gravitációelméletet javasoltak. Ezek az újabb javaslatok Einstein elméletének fő vonásaival összhangban vannak, de bizonyos részletekben eltérnek tőle. Sajnos az újabb elméletek és az Einstein féle általános relativitáselmélet közötti döntéshoz szükséges nagyérzékenységű kísérletek tervezése és kivitelezése rendkívül nehéz. Mindaddig az összes csillagászati adat (kísérleti hibahatáron belül) megegyezik Einstein elméletével.

lyán égették meg (egyéb eretnek eszméi miatt is) a Kopernikuszi világrendbe vetett hitéért, amely szerint valóban a Nap a „Naprendszer” középpontja. Később, 1633-ban hasonló gondolatokért Galileo Galileit állították bíróság elé és börtönözték be.

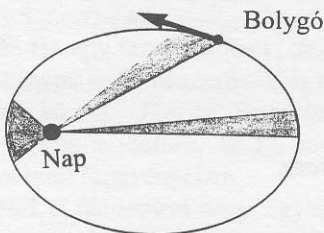
Newton gravitációelmélete a Hold és a bolygók mozgásának megértésének szándékából nőtt ki. Ehhez az alapvető munkát Kepler, Tycho de Brahe és mások végezték, akik az égitestek mozgását nagy pontossággal megállapították és beillesztették egy viszonylag egyszerű modelbe, amely szerint a bolygók a Nap körül ellipszis pályán keringenek. De miért mozognak a bolygók így? Milyen erőhatásra keletkezik a kepleri ellipszis pálya? Newton nagy éleslátással tette meg azt a bátor lépést, hogy az égitestek mozgásának magyarázatát földi megfigyelésekből levont fizikai törvények alapján keresse. Tekintsük át röviden ezt a történetet.

16.2 A Kepler törvények

A tizenhatodik század végére az égitestek megfigyelése jelentős fejlődést ért el. Egy dán nemes, Tycho de Brahe megépítette az első nagy obszervatóriumot – egy valóban nagyszerű létesítményt – egy Kopenhágához közeli szigeten. Bár a távcsövet még nem találták fel, Tycho éveken keresztül lelkiismeretesen feljegyezte a bolygók mozgásának pontos adatait. Megfigyeléseit elmés mechanikai szerkezetekkel és pusztán szemmel végezte. Tycho adatait halála után asszisztense, Johann Kepler tanulmányozta, és ezekből három egyszerű törvényt vezetett le, amelyekkel a bolygók mozgását minden eddigénél nagyobb pontossággal lehetett leírni. A görögök nyomdokait követő Kopernikusz szerint a bolygók körpályán keringenek a Nap körül, Kepler viszont feltételezte, hogy a pályák ellipszisek (lásd a 16-1 ábrát). Kepler három törvénye²:



(a) Ellipszis F_1 és F_2 fókuszpontokkal. Az a szakasz az ellipszis nagytengelyének fele.



(b) Kepler második törvénye: a bolygó Nap körüli mozgása során a pálya minden pontjában a Naptól a bolygóig húzott rádiuszvektor egyenlő időtartamok alatt egyenlő területeket sűrol. Ezért a bolygó napközben gyorsabban halad.

16-1 ábra.

A bolygók a Nap körül ellipszispályán mozognak. A Nap az ellipszis egyik fókuszában van. Az ábrákon az „egyenlő területek” törvényének érzékeltesítésére az ellipszisek excentricitása el van túlozva. A tényleges bolygópályák sokkal inkább a körhöz hasonlóak.

- A BOLYGÓ-MOZGÁS KEPLER FÉLE TÖRVÉNYEI**
- (1) A bolygók ellipszispályán keringenek a Nap körül, amelynek egyik fókuszában a Nap van.
 - (2) A Naptól a bolygóhoz húzott rádiuszvektor egyenlő időtartamok alatt egyenlő területeket sűrol.
 - (3) A bolygó T keringési időtartamának négyzete arányos a bolygó Naptól mért középtávolságának³ köbével. Tehát a T^2/R^3 összefüggés minden bolygóra állandó.

Kepler azt is igazolta, hogy ezek a törvények más bolygórendszerre is alkalmazhatók, pl. a Jupiter holdjaira. Így módon az elmélet általánosnak látszott.

De e szabályosságok oka ismeretlen volt. Az „erő” fogalma még nem volt kellően megalapozva, jóllehet Galilei megtette az első lépést a világos erőfogalom felé, amikor a mozgás megváltozásának okául az erőt jelölte meg. Az óriási döntő lépést azonban kétséget kizáróan Newton tette meg midőn kiadta a *Principiát*, amelyben megfogalmazta mozgástörvényeit és gravitáció-elméletét.

² Az eredeti latin szövegben Kepler három törvénye csak 59 szóból áll. Ezek a szavak fektették le a klasszikus mechanika alapjait.

³ Sok évvel később a newtoni mechanikai és gravitációs törvényből levezetett harmadik Kepler törvény az „átlagtávolságot” az ellipszispálya fél nagytengelyeként adja meg. (Lásd a 16-1a ábrát.)

16.3 Newton tömegvonzási törvénye

Newton lenyűgöző teljesítménye a tömegvonzási törvény kimondása volt, amely a lehalló almára éppúgy érvényes, mint a Hold és a bolygók pályán való maradására. Megállapította, hogy az univerzum bármely két részecskéje között vonzóerő működik, amelynek nagysága

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (16-1)$$

ahol m_1 és m_2 a két részecske tömege, r a részecskék távolsága és G a kísérletileg meghatározott univerzális gravitációs állandó:

$$G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2.$$

Vektoriális alakban: az az erő, amit m_1 fejt ki m_2 -re

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (16-2)$$

ahol $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ az m_1 -től (az erő forrásától) az m_2 (amelyre az erő hat) felé mutató egységvektor. A negatív előjel vonzóerőre utal. A kettős index azt jelenti, hogy a távolság (vagy erő) az első indexszel jelölttől a második indexszel jelöltig értendő. Newton harmadik törvénye szerint $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

Newton tömegvonzási törvényének néhány vonását ki kell hangsúlyozni. Mindenekelőtt azt, hogy nem ad választ arra az alapvető kérdésre, hogy *valójában* mi a gravitáció, vagy, hogy miért léteznek ilyen erők. De meghatároz olyan erőket, amelyek megmagyarázzák egyes testek mozgásának irányát, és tömören kifejezik ezen erők jellemzőit. Az erők mindig párosával jelentkeznek; vagyis két részecske kölcsönös vonzóerővel hat egymásra, nagyságuk egyenlő, irányuk ellentétes – ez megfelel Newton harmadik törvényének. Ilyen, párosával fellépő erők hatnak az univerzum bármelyik két részecskéje között, más objektumok jelenlététől függetlenül. Ha több test van jelen, a szuperpozíció elve alkalmazható: bármely részecskére ható gravitációs erőt a rá ható erők vektori összegeként kapjuk.

Két elektromos töltés között fellépő – taszító vagy vonzó – erővel ellentétben a gravitációs erő mindig vonzó. További eltérés az elektromos vagy a mágneses erők és a gravitációs erő között az, hogy míg az elektromos erők hatását alkalmas fémlemezzel (fémernyővel) vagy a mágnesek közötti mágneses erő hatását elegendően vastag lágyvas lemezzel árnyékolni lehet, addig a gravitációs erők kizárására semmilyen ernyőt vagy pajzsot sem ismerünk.

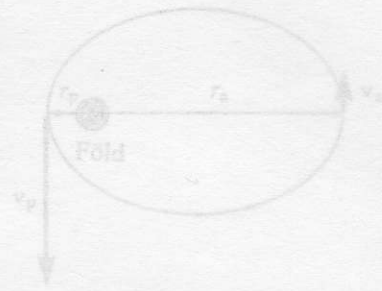
Érdekes azonban, hogy a két (q_1 és q_2) pontszerű töltés között fellépő elektromos erőt leíró

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad \mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (16-3)$$

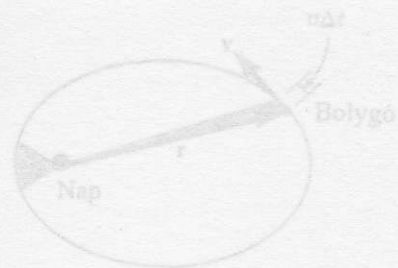
összefüggés éppúgy a távolság négyzetével fordítottan arányos, mint a gravitáció törvénye (jóllehet az elektromos erő a töltések előjelétől függően vonzó és taszító lehet). Ezért kutatás folyik egy „egységes térelmélet” kidolgozására, amellyel mind a gravitációs, mind az elektromos erők leírhatóak lennének. De ezek a kísérletek mindeddig nem voltak eredményesek.

NEWTON ÉS A GRAVITÁCIÓ

Newton 23 éves volt amikor megalkotta gravitációelméletét. A Cambridge University diájaként az 1665–1666. évi himlőjárvány idején vidéki otthonába távozott, hogy ott elszigeteltségben éljen és tanuljon. Bár egészsége kissé gyenge volt, ez az időszak Newton számára nagyon produktív volt. Állítólag egy kertjében lehalló alma hatására jött



16-2 ábra.
A 16-1 példához.

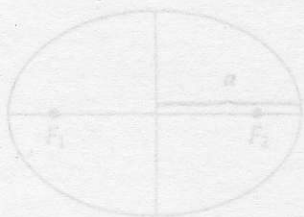


16-3 ábra.
A 16-2 példához.

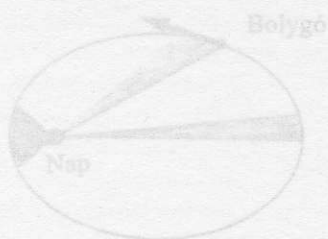
arra a gondolatra, hogy talán ugyanaz az erő, ami az almát gyorsítja, vezérli a Hold mozgását is.

De még volt egy nagy akadály. Ha valóban van vonzóerő két részecske között, akkor mi lehet a vonzóerő az alma és egy olyan kiterjedt test között, mint amilyen a Föld? Mindenesetre a Föld egy közelebbi elemi tömege bizonyára nagyobb vonzóerőt fejt ki, mint az ugyanekkorra, de a Föld túloldalán lévő elemi tömeg. Ennek az előzetesen felmerülő problémának megoldására fejlesztette ki Newton a differenciál- és integrálszámítást*, elvitathatatlan zsenialitásának e másik nagy teljesítményét.

1684-ben egyik barátja, Edmund Halley (akiről a Halley üstököst elnevezték) megpróbálta kideríteni, milyen típusú erő hatására jöhet létre Kepler-törvény szerinti elliptikus pálya. Newton megjegyezte, hogy ő már évekkal azelőtt megoldotta a problémát; a megoldást az $F \propto 1/r^2$ inverz-négyzetes-törvény adja. Halley rábeszélte Newtont, hogy ezt és egyéb eredményeit publikálja. Két év intenzív munkájával Newton elkészítette *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* c. munkáját. A mű 1687. évi publikációja Newtont minden idők egyik legnagyobb géniuszává avatta. A *Principiával* Newton Arisztotelész 2000 éves tanításának a kettősségét – a földi és az égi törvények kétféleségét – elsöpörte. Newton elmélete Kepler három törvényét éppúgy megmagyarázta, mint az általános mechanika bárhol másutt érvényes jelenségeit. A *Principia* más, meglepő megállapításai – a matematikában, az optikában és az asztronómiában – megerősítették azt a hitet, hogy az ember képes megérteni és felhasználni a természet jelenségeit.



(a) Ellipszis F_1 és F_2 fókuszpontokkal. Az a szakasz az ellipszis nagytengelyének fele.



(b) Kepler második törvénye: a bolygó Nap körüli mozgása során a pálya minden pontjában a Naptól a bolygóig húzott rádiusvektor egyenlő időtartamok alatt egyenlő területeket sűrol. Ezért a bolygó napközeli részekben gyorsabban halad.

16-1 ábra.

A bolygók a Nap körül ellipszispályán mozognak. A Nap az ellipszis egyik fókuszában van. Az ábrákon az „egyenlő területek” törvényének érzékeltetésére az ellipszisek excentricitása el van tüntetve. A tényleges bolygópályák sokkal inkább a körhöz hasonlók.

Centrális erők

A természetben sok példa van **centrális erőre**: olyan vonzó vagy taszító erőre, amelynek hatásvonala mindig egy rögzített ponton megy át. Például az a gravitációs erő, amit a Nap gyakorol egy bolygóra, mindig a Nap középpontja felé irányuló centrális erő. A centrális erő érdekes tulajdonsága, hogy azért, mert hatásvonala mindig áthalad az O középponton, nincs az O pontra vonatkozó forgatónyomatéka; ennél fogva a centrumra vonatkoztatott impulzusmomentum megmarad. Tehát a bolygó pályájának minden pontjában a bolygó Nap körüli impulzusmomentuma időben állandó. Más példa erre az elektron mozgása a Bohr féle hidrogénatom modellben – az erő, amit a proton gyakorol az elektróra, centrális erő, így az elektron protonra vonatkoztatott impulzusmomentuma időben állandó. Az atommagok tulajdonságainak kutatásában alkalmazott nagyenergiájú szóródási kísérletekben az alfa részecske (aminek pozitív töltése van) pozitív töltésű maghoz közelítve eredeti pályájától centrális taszító erő hatására térül el oly módon, hogy a (lényegében) rögzített magra vonatkozó impulzusmomentuma megmarad.

16-1 PÉLDA

Tekintsünk egy m tömegű műholdat, ami úgy kering a Föld körül, hogy a Föld középpontjától mért földtávolsági apogeum-távolsága négyszer akkora, mint földközeli perigeum-távolsága, ahogyan ezt a 16-2 ábra mutatja. Határozzuk meg a műhold v_a apogeumsebességének és v_p perigeum-sebességének arányát!

* Az idétőt a differenciál- és integrálszámítási eszméje már „a levegőben volt”. Newton matematika tanára, Isaac Barrow már igazolt egy, az alapvető differenciál- és integrálszámítással ekvivalens elméletet. Gottfried Wilhelm von Leibniz, német filozófus és matematikus, a differenciál- és integrálszámítást kilenc évvel később, mindenkitől függetlenül, a maihoz közelebb álló szimbolikával dolgozta ki.

MEGOLDÁS

A műholdra ható gravitációs erők eredője *centrális erő*, az elliptikus pályán történő mozgás során mindig a Föld középpontja felé mutat. Ezért a Föld középpontjára vett L impulzusmomentum időben állandó.

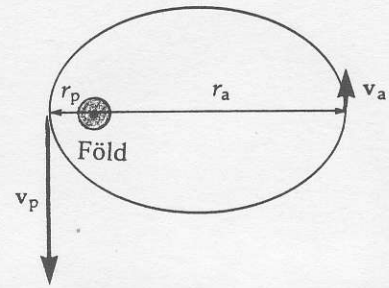
$$L_a = L_p$$

Apogeum-ban és perigeum-ban a rádiuszvektorok merőlegesek a trajektóriára, ezért az impulzusmomentumok [a (12-9) egyenlet szerint] a következők:

$$mv_a r_a = mv_p r_p$$

Igy a keresett arány

$$\frac{v_a}{v_p} = \frac{m r_p}{m r_a} = \frac{1}{4}$$



16-2 ábra.
A 16-1 példához.

16-2 PÉLDA

Mutassuk meg, hogy amikor egy bolygó a Nap körül kering, akkor (a Naptól a bolygóig húzott) rádiuszvektora egyenlő időtartamok alatt egyenlő területeket sűrol.

MEGOLDÁS

A 16-3 ábra a Nap körül keringő bolygó ellipszis-pályáját (a numerikus excentricitást erősen túlozva) vázolja. Mivel a bolygóra ható gravitációs erő mindig a Nap felé mutat, a bolygóra nem hat Napra vonatkozó forgatónyomaték. Tehát a bolygó impulzusmomentuma időben állandó. (Feltételezzük, hogy a Nap nyugalomban van.)

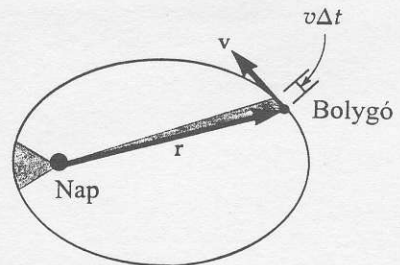
Δt idő alatt a bolygó $v\Delta t$ távolsággal mozdul el. Ezen idő alatt a rádiuszvektor sűrolja a beárnyékolt keskeny területet. Számításunk egyszerűsítésére ezt a területet r magasságú, Δx alapú egyenlőszárú háromszöggel közelítjük. A Δx alapot $v\Delta t$ -nek az r -re merőleges egyenesre való vetítésével kapjuk. Ha az r és a v vektorok által bezárt szög Φ , akkor $\Delta x = v\Delta t \sin\Phi$. Így a háromszög ΔA területe

$$\Delta A = \frac{1}{2}(\text{magasság})(\text{alap}) = \frac{1}{2}r v\Delta t \sin\Phi$$

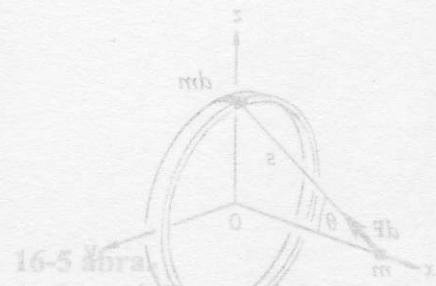
Amint Δt értéke kisebbé válik, ΔA megközelíti a fenti értéket. Számítást és nevezőt m -mel szorozva, Δt -vel osztva és Δt -vel zérushoz közelítve ($\Delta t \rightarrow 0$), kapjuk:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} (mvr \sin\theta)$$

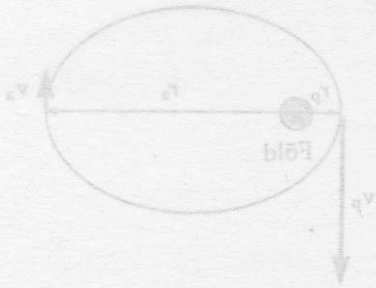
Az $(mvr \sin\theta)$ tényező a bolygó Napra vonatkozó L impulzusmomentuma, ami időben állandó. Így a dA/dt területsebesség, amivel a rádiuszvektor a területet sűrolja, ugyancsak időben állandó a pálya bármely szakaszára. Tehát *a sugár egyenlő időtartamok alatt egyenlő területeket sűrol*. Ez a következtetés azon a tényen alapul, hogy a gravitációs erő *centrális erő*, nem gyakorol forgatónyomatékot a bolygóra.



16-3 ábra.
A 16-2 példához



16-5 ábra.
Az R sugárú gömb felületéből kivágott körábrány. A ΔA területű elemet a r sugárú gömb középpontjából a θ szög alatt látjuk. A ΔA területű elemet a r sugárú gömb középpontjából a θ szög alatt látjuk. A ΔA területű elemet a r sugárú gömb középpontjából a θ szög alatt látjuk.



16-3 ábra. A hold körpályán keringő mesterséges hold.

16-3 PÉLDA

A Föld körül körpályán keringő mesterséges hold T idő alatt tesz meg egy teljes fordulatot. (T a mozgás „periódusideje”). Határozzuk meg G , T és M (a Föld tömege) függvényében (a) a mesterséges hold v -sebességét és (b) a pálya r sugarát!

MEGOLDÁS

(a) A mesterséges holdra ható gravitációs erő szolgáltatja a centripetális gyorsulást:

$$\sum F = ma$$

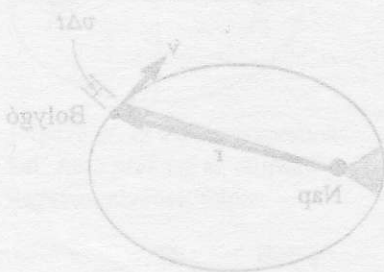
$$\frac{GMm}{r^2} = m \left(\frac{v^2}{r} \right)$$

Abból az összefüggésből, hogy $v = (\text{távolság/idő}) = (2\pi r/T)$, azt kapjuk, hogy $r = (Tv/2\pi)$. Behelyettesítve a fenti egyenletbe és mindkét oldalon m/r -rel egyszerűsítve:

$$\frac{GM}{(Tv/2\pi)} = v^2, \quad \text{vagy} \quad v = \sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T}}$$

(b)
$$r = \frac{Tv}{2\pi} = \frac{T}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T}} = \sqrt[3]{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 GM}$$

Mint ahogy a mesterséges bolygó m tömege nem szerepel a megoldásokban, azért a kapott eredmények a körpályán keringő testre érvényesek.



16-4 ábra. A hold körpályán keringő mesterséges hold.

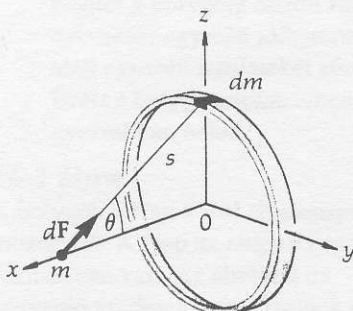
16.4 Pontszerű és kiterjedt test között fellépő gravitációs erők

A pontszerű részecske és kiterjedt test között fellépő erőhatás meghatározására alkalmas differenciál- és integrálszámítás kidolgozása során Newton két fontos következtetésre jutott. Feltéve, hogy a kiterjedt (nagy méretű) testnek gömbszimmetriája⁴ van, akkor

- (a) külső pontokra a nagy méretű test úgy tekinthető, mintha teljes tömege a középpontjában lenne koncentrálna;
- (b) a homogén gömbhéj alakú test belsejének bármely pontjában lévő részecskére a gömbhéjtól származó gravitációs erők eredője zérus.

Ezt a két eredményt most levezetjük. A levezetés integrálással jár, de ha lépésenként követjük, akkor az integrálási eljárásra is tanulságos példaként szolgál.

Tekintsük először az m' tömegű vékony gyűrűt és a gyűrű tengelyének egyik pontjában elhelyezett m tömegű részecske között fellépő gravitációs vonzóerőt (16-4 ábra). A gyűrűnek az a dm eleme, ami a részecskétől s távolságra van, a részecskére dF erőt gyakorol. Az erő nagysága



16-4 ábra.

Az m' tömegű vékony gyűrű az yz síkban fekszik. A részecske a gyűrű tengelyén van.

⁴ A gömbszimmetria azt jelenti, hogy a sűrűség ugyan változhat a sugárral, de nem függ az iránytól. Így a sűrűség csupán r függvénye: $\rho = f(r)$.

$$dF = G \frac{m dm}{s^2} \quad (16-4)$$

Most vegyük figyelembe a gyűrű minden elemét. Ha a gyűrű minden elemére összegezzük, akkor a szimmetria miatt az x tengelyre merőleges erőkomponensek összege zérus. Így csupán a tengellyel párhuzamos komponenseket kell tekintenünk. Mivel az összeadás során a $\cos \theta$ tényező állandó, így kiemelhető az integráljel elé. Ezért az x tengely menti F_x eredő erő az alábbi integrállal egyenlő:

$$F_x = \int \cos \theta dF = \int G \frac{m \cos \theta dm}{s^2} \\ = G \frac{m \cos \theta}{s^2} \int_{=m'} dm = G \frac{m' m \cos \theta}{s^2} \quad (16-5)$$

ahol az integrálás kiterjesztendő az egész gyűrűre. (Megjegyezzük, hogy a gyűrűt *nem* tekinthetjük úgy, mintha egész tömege a középpontjában lenne. Az ilyen egyszerűsítés csak gömbszimmetrikus testekre érvényes.)

Most tekintsük a részecske és egy vékonyfalú gömbhéj (16-5 ábra) közötti gravitációs vonzóerőt! A héj teljes tömege M , vastagsága a gömb R sugarához viszonyítva elhanyagolható. A gömbhéj dm elemi tömegét úgy választjuk meg, hogy annak minden pontja egyenlő távolságra legyen a részecskétől. A dm elemi tömeg a gömbhéjból kivágott kör alakú csík (gömböv). A (16-5) egyenlettel analóg módon az m tömegű részecskére ható dF erő

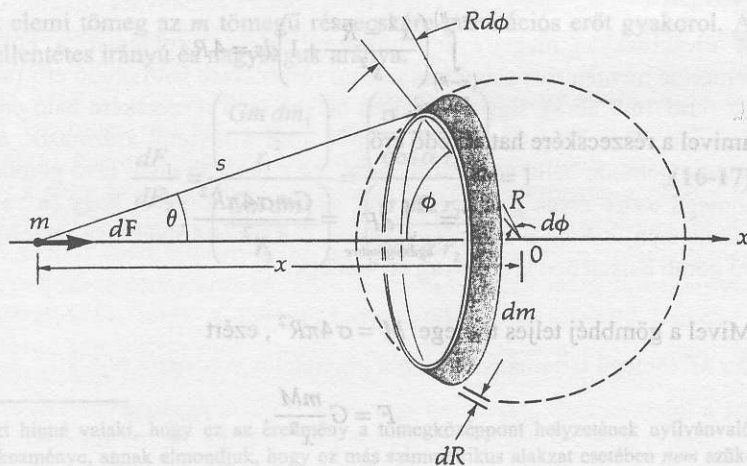
$$dF = G \frac{m \cos \theta dm}{s^2} \quad (16-6)$$

Azonban a dm elemi tömeget más, az egész gömbre kiterjesztendő integrálásra alkalmasabb paraméterrel kell kifejeznünk.

Az elemi kör alakú csík (gömböv) sugara $R \sin \Phi$, felszíne:

$$A \text{ gömböv területe} = (2\pi R \sin \Phi)(R d\Phi) \quad (16-7)$$

Így, ha a gömbhéj *egységnyi területre jutó tömegét* σ -val jelöljük, akkor az elemi kör alakú csík dm tömege



16-5 ábra.

Az R sugarú dR vastagságú gömbhéjból kivágott kör alakú dm tömegű szalag által m tömegű részecskére kifejtett dF gravitációs vonzóerő.

$$dm = (\text{Terület}) \left(\frac{\text{Tömeg}}{\text{Területegység}} \right) = (2\pi R \sin \Phi)(R d\Phi)(\sigma) = 2\pi\sigma R^2 \sin \Phi d\Phi \quad (16-8)$$

Az integrál egész gömbre való kiterjesztése céljából a koszinusz tétel segítségével az s és Φ változók között a következő összefüggés írható fel:

$$s^2 = R^2 + x^2 - 2Rx \cos \Phi \quad (16-9)$$

Differenciálva:

$$2s ds = 2Rx \sin \Phi d\Phi \quad (16-10)$$

$$R \sin \Phi d\Phi = \frac{s ds}{x} \quad (16-11)$$

Azt is figyelembe vesszük, hogy a 16-5 ábra alapján

$$\cos \theta = \frac{x - R \cos \Phi}{s}$$

ami a koszinusz tétel szerint

$$\cos \theta = \frac{x^2 - R^2 + s^2}{2xs} \quad (16-12)$$

alakban is felírható. A (16-8), a (16-11) és (16-12) egyenleteket a (16-6) egyenletbe helyettesítve adódik, hogy

$$dF = \frac{Gm\pi\sigma R}{x^2} \left(\frac{x^2 - R^2}{s^2} + 1 \right) ds. \quad (16-13)$$

Ez az erő az, amit az elemi köralakú csík (gömböv) fejt ki a részecskére. Amint az egyes elemi köralakú csíkoktól származó erők összegezését a teljes gömbre kiterjesztjük, látjuk, hogy az egyetlen változó s , ami az $(x - R)$ és $(x + R)$ határok között változik.

Az integrálás elvégzése egyszerű. Egyelőre az állandókat mellőzve magára az integrálra azt kapjuk, hogy:

$$\int_{(x-R)}^{(x+R)} \left(\frac{x^2 - R^2}{s^2} + 1 \right) ds = 4R \quad (16-14)$$

amivel a részecskére ható eredő erő

$$F = \int_{\text{egész gömbre}} dF = \frac{Gm\sigma 4\pi R^2}{x^2} \quad (16-15)$$

Mivel a gömbhéj teljes tömege $M = \sigma 4\pi R^2$, ezért

$$F = G \frac{mM}{x^2} \quad (16-16)$$



16-5 ábra
Az R sugarú gömb egy részecskére ható gravitációs erők eredője. A részecskére ható gravitációs erők eredője a gömb középpontjából kivehető, mint a teljes gömb tömegére ható gravitációs erő. Az m részecskére ható gravitációs erő eredője a gömb középpontjából kivehető, mint a teljes gömb tömegére ható gravitációs erő.

Ez az eredmény megegyezik azzal, amit akkor kapnánk, ha a héj egész tömege a középpontban lenne koncentrálva.⁵

Egy tömör gömböt úgy képzelhetünk, mintha nagyszámú koncentrikus héjból lenne összerakva, a hagyoma rétegeihez hasonlóan. Még akkor is, ha az egyes héjak sűrűsége különböző, mindegyikük tömegét a középpontjába koncentrálva képzelhetjük. Így, feltéve, hogy a tömör gömbnek gömbszimmetriája van (vagyis, hogy sűrűsége csupán r függvénye),

A gömbszimmetrikus tömegeloszlású, gömbalakú testen kívül lévő m tömegű részecskére } a gömb által a részecskére ható gravitációs erő ugyanannyan, mintha a gömb tömege a középpontban volna koncentrálva.

Mi van azzal a részecskével, amelyik a gömbhéj alakú test belsejében van? Az eredő erőt rögtön kiszámíthatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a (16-14) integrál határai most $(R - x)$ és $(R + x)$. Az integrálást elvégezve, a tetszőleges belső helyen lévő részecskére ható eredő erőre zérust kapunk:

Homogén gömbhéj belsejében lévő részecskére } az a gravitációs erő, amit a homogén gömbhéj a belsejében tetszés szerinti helyen lévő részecskére gyakorol, zérussal egyenlő.

Utóbbi eredményünket integrálás nélkül, egy (először Newton által elvégzett) érdekes okfejtés-láncolattal is megkaphatjuk. Tekintsük a gömbhéj belsejének tetszés szerinti P pontjában lévő m tömegű részecskét! Képzeljünk egy tetszőleges kiterjedésű, kis nyílásszögű kúpot, amelynek csúcsa a P pontban van! A kúp a gömbhéjből dA_1 területű felületelemet metsz ki (16-6a ábra). Ha vele azonos térszögű kúpot vetítünk az ellenkező irányba, az dA_2 területet metsz ki. Az elemi $d\Omega$ térszöget (steradiánban mérve) a dA_n/r^2 hányadossal definiáljuk, ahol dA_n a térszög csúcsából húzott, az r távolságra merőleges terület. Számítsuk ki, gömb esetében milyen kapcsolata van a dA_1 és a dA_2 területeknek az r_1 -re és az r_2 -re merőleges dA_{1n} és dA_{2n} vetületeikkel! Minden olyan egyenes vonal mint r_1 és vele együtt r_2 két pontban metszi a gömböt, és a gömbfelület normálisával ugyanazt az α szöveget zárja be. Tehát $d\Omega = dA_{1n}/r_1^2 = (dA_1 \cos\alpha)/r_1^2 = (dA_2 \cos\alpha)/r_2^2$. A σ (az egységnyi felületre jutó tömeg) jelöléssel a két tömegelem

$$dm_1 = \sigma dA_1 = \frac{\sigma d\Omega r_1^2}{\cos\alpha} \quad \text{és} \quad dm_2 = \sigma dA_2 = \frac{\sigma d\Omega r_2^2}{\cos\alpha}.$$

Ez a két elemi tömeg az m tömegű részecskére gravitációs erőt gyakorol. A két erő ellentétes irányú és nagyságuk aránya:

$$\frac{dF_1}{dF_2} = \frac{\left(\frac{Gm dm_1}{r_1^2}\right)}{\left(\frac{Gm dm_2}{r_2^2}\right)} = \frac{\left(\frac{\sigma d\Omega r_1^2}{\cos\alpha r_1^2}\right)}{\left(\frac{\sigma d\Omega r_2^2}{\cos\alpha r_2^2}\right)} = 1 \quad (16-17)$$

⁵ Ha azt hinné valaki, hogy ez az eredmény a tömegközéppont helyzetének nyilvánvaló következménye, annak elmondjuk, hogy ez más szimmetrikus alakzat esetében nem szükségszerűen igaz. Például a homogén kockaalakú test nem úgy vonzza a külső testeket, mint ha tömege a középpontba volna koncentrálva. A fánk alakú test gravitációs mezője sem ekvivalens egy, a közepébe gondolt tömegpont gravitációs mezőjével. Csak azok a testek rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal, amelyeknek a tömegeloszlása gömbszimmetrikus.

⁶ A térszög definíciójára lásd az E függelékét. Lásd továbbá a 25.2 fejezet hasonló részletét.

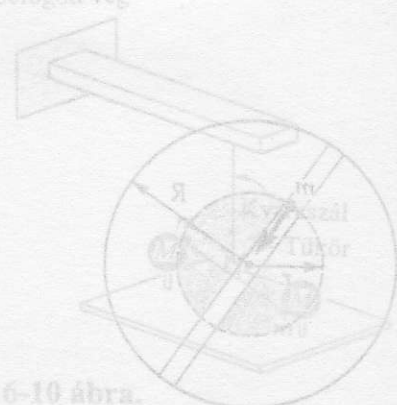


(a) A P pont tetszőleges helyzetű belső részecskére ható gravitációs erőt a gömbhéj minden rétegéből egyenlő mértékben gyakorol. A P ponttól távolabb eső rétegek gravitációs ereit a P ponttól közelebb eső rétegek gravitációs erei ellentétes irányú erőkkel ellentétesen határozzák meg.

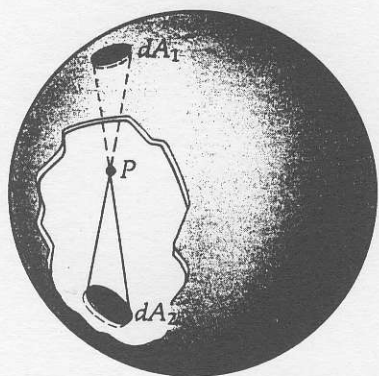
(b) Homogén vékony gömbhéj tetszőleges helyen lévő részecskére ható gravitációs erő a középponttal mért távolság függvényében.



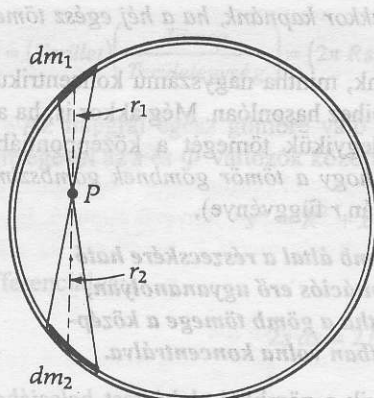
16-9 ábra. A 16-3 példához.



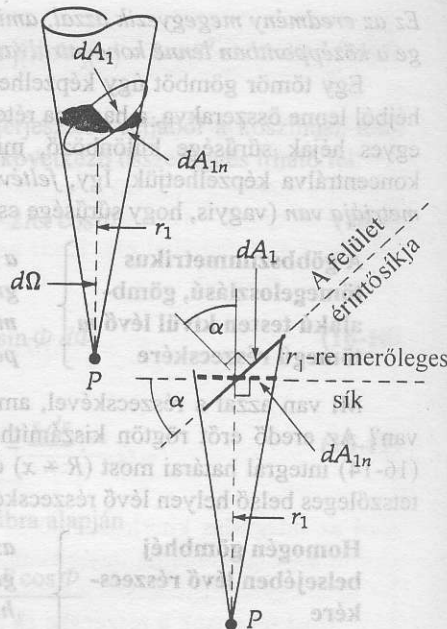
16-10 ábra. A G gravitációs állandó meghatározására Cavendish által készített kísérlet. A Föld állandó tömegűnek tekinthető, és a Föld tömegét a részecskére ható erő a Föld tömegének az állandó távolságra ható részecskére ható gravitációs erővel összehasonlítva számíthatjuk ki.



(a) A P pont tetszőlegesen helyezkedik el a vékony homogén gömbhéj belsejében. A P pontból mint csúcspól húzott $d\Omega$ térszögű kúp palástja a gömbhéjből dA_1 és dA_2 felületeket metsz ki.



(b) A $d\Omega$ térszögön belül lévő gömbhéj-szeletek tömege dm_1 és dm_2 .



(c) A dA_{1n} terület a dA_1 terület r_1 -re merőleges síkra vett vetülete. Nagysága $dA_{1n} = dA_1 \cos \alpha$.

16-6 ábra.

A vékony homogén gömbhéj tetszőleges belső P pontjában elhelyezkedő m tömegű részecske.

Tehát a két erő egyenlő nagyságú és ellentétes irányú, így kiegyenlítik egymást. Az m -re ható eredő erő zérus! Az elemi tömegek teljes gömbhéjra való páronkénti számbavételével arra a következtetésre jutunk, hogy a homogén gömbhéj belsejében bárhol lévő m tömegű részecskére a gömbhéjtól származó gravitációs erők eredője zérus.

A következő két konklúziót néha *héjelméletnek* nevezik:

<p>A HÉJ-ELMÉLET</p>	<p>Homogén gömbhéj olyan vonzóerőt gyakorol egy rajta kívül elhelyezkedő részecskére, mintha a héj egész tömege a középpontban lenne.</p>	<p>Homogén gömbhéj a belsejében lévő részecskére nem gyakorol gravitációs erőt, bárhol legyen is a részecske a gömb belsejében.</p>
-----------------------------	---	---

Alagutak

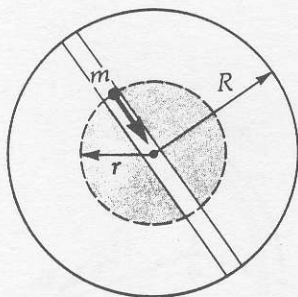
A továbbiakban megtárgyalhatunk egy érdekes problémát: a Földnek az átmérője mentén fúrt alagútban mozgó részecskére ható eredő gravitációs erő a Föld tömegének csupán attól a részétől származik, ami az r sugarú gömbön belül van. (Mint láttuk, az r sugáron kívül lévő gömbhéj az m tömegű testre zérus gravitációs erőt gyakorol.) *Feltéve, hogy* (a valósággal ellentétben) *a Föld ρ sűrűsége állandó*, (az ábrán árnyékoltva rajzolt) r sugarú gömb belsejében lévő anyag M' tömege:

$$M' = \rho V' = \rho \left(\frac{4}{3}\right) \pi r^3.$$

Az M' tömegű tartomány az alábbi gravitációs vonzóerőt fejt ki:

$$F = -G \frac{mM'}{r^2} = -G \frac{m}{r^2} \left(\rho \frac{4}{3} \pi r^3\right) = -\left(\frac{Gm\rho 4\pi}{3}\right) r = -kr \quad (16-18)$$

ahol a negatív előjel a Föld középpontja felé mutató irányt jelöli, és k állandó. Ez éppen az egyszerű harmonikus rezgő mozgás feltétele. Ha a Föld forgásától eltekinthetnénk, akkor egy ilyen lyukba ejtett részecske egyszerű harmonikus rezgő mozgással ide-oda oszcillálna. Hasonlóképpen bebizonyítható, hogy a

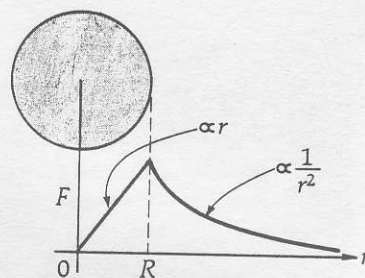


16-7 ábra.

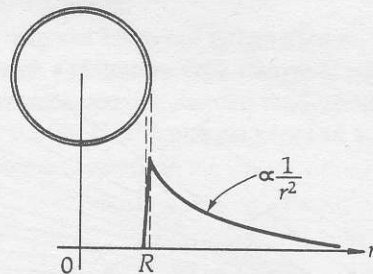
A Föld átmérője mentén fúrt alagútban mozgó részecskére ható erő a Föld tömegének az ábrán árnyékoltva jelölt részétől származik.

Föld felületének bármely két (nem feltétlenül átellenes) pontját összekötő egyenes, síma falú alagútba ejtett részecske is egyszerű harmonikus rezgő mozgást végezne ugyanazzal a rezgésidővel, mint az átmérő szerinti alagútban.

A 16-8 ábrán látható diagram a homogén tömör gömb illetve a homogén gömbhéj középpontjától különböző távolságra lévő részecskére ható gravitációs erő nagyságát vázolja.



(a) Homogén tömör gömb esetében.



(b) Homogén vékony gömbhéj esetében.

16-4 PÉLDA

Határozzuk meg egy M tömegű homogén tömör gömb és a 16-9 ábrán látható helyzetű l hosszúságú, m tömegű vékony homogén rúd között ható gravitációs vonzóerőt!

MEGOLDÁS

Mivel a gömb homogén, úgy tekinthető, hogy az egész tömege a középpontjába van koncentrálnva. Newton tömegvonzási törvénye szerint a dm elemi tömegre ható dF erő

$$dF = G \frac{M}{x^2} dm$$

ahol $dm = \frac{m}{l} dx$.

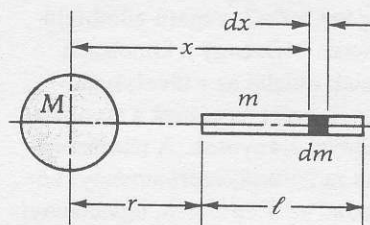
dm -et behelyettesítve és a rúd hosszára integrálva:

$$F = \int_r^{r+l} G \frac{mM}{lx^2} dx = G \frac{mM}{l} \left(\frac{1}{x} \right)_r^{r+l} = G \frac{mM}{l} \left[\frac{l}{r(r+l)} \right] = G \frac{mM}{r(r+l)}$$

Mint várható volt, ha $r \gg l$, akkor a rúd majdnem úgy viselkedik, mint egy, a gömb középpontjától r távolságra lévő tömegpont.

16-8 ábra.

Az m tömegű részecskére ható F gravitációs erő a középponttól mért r távolság függvényében.



16-9 ábra.

A 16-3 példához.

A Cavendish kísérlet

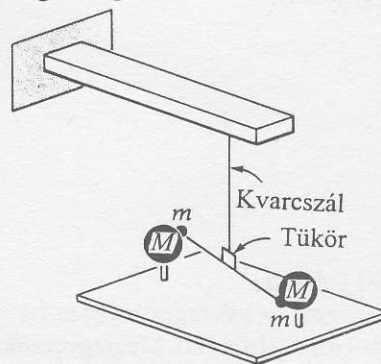
A G univerzális gravitációs állandó (ami nem tévesztendő össze a g gravitációs gyorsulással) numerikus értékét egészen 1798-ig nem ismerték pontosan, amikor is meghatározására az angol fizikus, Henry Cavendish, torziós mérleget használt. Az eszköz nagyon vékony fém- vagy kvarc-szára függesztett vízszintes rúd két végére szerelt két kis m tömegű gömbből áll (16-10 ábra). Két nagyobb, egyenként M tömegű ólomgömböt úgy helyeznek el, hogy a nagy és kis gömb-párok közötti gravitációs erőhatás a rudat a függeszto szál mint tengely körül elcsavarja. Mivel állandó sűrűségű gömböket használnak, azért minden gömb gravitációs hatása olyan, mintha tömege a középpontjában lenne koncentrálnva. A rúdra erősített tükör távoli ernyőre fénysugarat vetít, hogy a fellépő kicsiny elfordulás mérhető legyen. A szóbanforgó gravitációs erők nagyon kicsinyek, tipikusan 10^{-10} N nagyságrendűek, (durván 10 000 -szer kisebbek az emberi hajszál súlyánál).

Kísérleti nehézségek miatt G az összes természeti állandó közül a legkevésbé pontosan ismert. Mint már említettük, jelenleg elfogadott értéke

$$G = 6,672 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \quad (16-19)$$

Két test között ható gravitációs erő mindaddig elhanyagolható a testek mozgásának meghatározásánál, amíg legalább egyikük tömege nem nagyon nagy.

szilárdan befogott vég



16-10 ábra.

A G gravitációs állandó meghatározására Cavendish által használt gravitációs torziós mérleg. A mérés eredményeként Cavendish volt az első, aki az $F_g = GM/r^2 = mg$ összefüggésből a Föld M tömegét meghatározta.

16.5 A gravitációs mező

Amikor Newton gravitáció elmélete először vált ismertté, talán abból adódott a legkomolyabb kritika, hogy a kortársaknak nehézséget okozott olyan elfogadni, amely a távolba hat. Newton szemléletében a gravitációs erő valahogyan a teljesen üres téren átjutva befolyásolja távoli testek mozgását. Bár Newton nem tudta pontosan megmagyarázni, hogy hogyan keletkezik az erő, úgy érezte, hogy elmélete azért sikeres, mert a testek megfigyelt tulajdonságairól kielégítően ad számot.

Mintegy másfél évszázaddal később Michael Faraday az elektromágnességgel kapcsolatos elméletének kidolgozása során a távoli testek közötti kölcsönhatás (erőhatás) megértésére új gondolatmenetet javasolt. Bár elmélete az elektromosan töltött testek közötti erőhatást magyarázta, ugyanez a koncepció – a *mező* – alkalmazható volt a gravitációs vonzásra is. Ez a koncepció nagymértékben egyszerűsíti az összes távolbatható-erő matematikai tárgyalását.

A gravitáció esetében az elgondolás a következőképpen vehető fel. Tekintsük a B testre gravitációs hatást kifejtő A testet. Azt mondjuk, hogy az A test „gravitációs mező” létesítésével módosítja a körülötte lévő teret. A mező minden irányban kiterjed és a végtelenben zérusra csökken. Az A test mezőjében helyet foglaló B test a mezőtől származó erőt a mezőnek ezen a helyén érzékeli. Így módon a gravitációs mező *lokális* jelenléte gyakorol erőt, nem pedig valamely távoli test. (Persze a helyzet szimmetrikus: Az A test a B test által létesített mezőtől származó gravitációs erőt érzi.)

Az M tömegponttól r távolságban a g gravitációs térerősséget az *egységnyi tömegre ható erővel* definiáljuk. (16-2) egyenlet szerint az M tömegű test az m tömegűre r távolságból

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{GMm}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}}$$

erővel hat, ahol $\hat{\mathbf{r}}$ az M tömegponttól m felé mutató egységvektor. Tehát a g gravitációs térerősség

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

\mathbf{F} kifejezését behelyettesítve

$$\text{(az } M \text{ tömegponttól származó)} \quad \mathbf{g} = -\left(\frac{GM}{r^2}\right)\hat{\mathbf{r}} \quad (16-20)$$

Gravitációs térerősség

A negatív előjel arra utal, hogy \mathbf{g} és $\hat{\mathbf{r}}$ ellentétes irányúak. Tehát \mathbf{g} mindig a gravitációs mezőt létesítő test *felé* mutat. Kiterjedt test által létesített gravitációs mező térerőssége a kiterjedt test elemi részecskéi által létesített térerősségek vektori összege.

A következő példa olyan problémák megközelítésére mutat hasznos módszert, amelyekben két, egymáshoz hasonló jelenséget kell összehasonlítani. A módszer lényege abban áll, hogy a két jelenségre analitikus alakban felírt egyenlőségek hányadosából számos ismeretlen mennyiség kiesik, és a tárgyalás ezáltal egyszerűbbé válik.

16-5 PÉLDA

Távoli csillag körül keringő bolygóhoz közeledve az űrhajós megállapítja, hogy a bolygó sugara feleakkora, mint a Földé. Leszállva a felszínre, úgy találja, hogy a gravitációtól származó gyorsulás kétszerese a Föld felszínén lévőknek. Határozzuk meg a bolygó M_p tömegét a Föld M_e tömegével kifejezve!

MEGOLDÁS

Valahányszor össze akarunk hasonlítani két hasonló jelenséget, az a legegyszerűbb, ha az egyikre (analitikus alakban) felírt egyenletet elosztjuk a másik jelenségre vonatkozó azonos egyenlettel. Ily módon a közös tényezők kiesnek, és a számítás egyszerűbbé válik.

A feladat megoldásában a p indexet a bolygóra, az e indexet a Földre vonatkozó mennyiségek indexelésére használjuk. Alkalmazzuk a bolygó ill. a Föld felületén szabadon eső m tömegű testre a $\Sigma F=ma$ törvényt!

<p>A Földön</p> $\Sigma F = ma$ $G \frac{M_e m}{r_e^2} = mg_e$	<p>A bolygón</p> $\Sigma F = ma$ $G \frac{M_p m}{r_p^2} = mg_p$
---	--

Az egyenleteket egymással osztva

$$\frac{\left(G \frac{M_p m}{r_p^2} \right)}{\left(G \frac{M_e m}{r_e^2} \right)} = \frac{mg_p}{mg_e}$$

adódik. Egyszerűsítés után:

$$\left(\frac{M_p}{M_e} \right) \left(\frac{r_e^2}{r_p^2} \right) = \frac{g_p}{g_e}$$

A bolygó paramétereit a Földre vonatkozó szimbólumokkal kifejezve

$$g_p = 2g_e \quad \text{és} \quad r_p = (1/2)r_e$$

Ezeket a paramétereket egyenletünkbe helyettesítve

$$\left(\frac{M_p}{M_e} \right) \left(\frac{r_e^2}{[(1/2)r_e]^2} \right) = \frac{2g_e}{g_e}$$

Egyszerűsítés után az alábbi egyenletre jutunk:

$$\frac{M_p}{M_e} (4) = 2$$

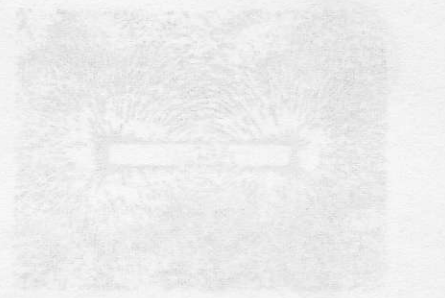
Azaz

$$M_p = \frac{1}{2} M_e$$

g változásáról

A g gravitációs gyorsulásra végzett nagyon pontos mérések néhány figyelemreméltó jelenséget fedeztek fel. Egy rendkívül stabil és érzékeny műszer – a szupravezető graviméter – kifejlesztésével g értékének a szilárd Föld deformációiból adódó változásai világosan kiderültek. Ha a Föld alakja úgy változik meg, hogy felszíne a középponthoz közelebbre vagy távolabbra kerül, akkor az eltolódás g változásával detektálható.

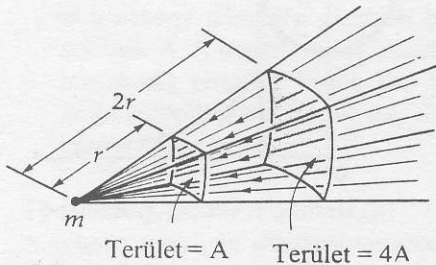
A szupravezető graviméter érzékenysége figyelemreméltó: $\Delta g/g \approx 10^{-11}$. Abszolút hibája 0,2%. A legnagyobb változást g értékében a Nap és a Hold relatív helyzetváltozásából adódó napi két „arapály” jelenség okozza a szilárd Föld anyagában. Figyeljük meg a 16-11 ábra diagramjában (észlelési hely: La Jolla, California), hogy a hetek múl-



16-13 ábra. A mágneset körülvevő térben a vastag vonalak a mágneses erővonalak párhuzamosan a mágneses erővonalak mentén rendeződnek. A vékonyabb vonalak a térben elálló állapotot adnak.

16-12 ábra. Az m tömegű test gravitációs mező részletek-négyzetes törvénye. A vektortól a tömegpontból induló térszög két r és $2r$ sugarú gömbfelületet metsz. Mivel a kimenetelű négyzetek oldalai az r távolsággal arányosak, ezért területük a távolság-négyzetével arányosak. A térszög-vonalak radiálisan, ezért amennyi vonal áthalad az r területen, ugyanannyi megy át a $4r$ területen is. Mivel a térszög az egységnyi felületen áthaladó vonalak számával arányos, ezért ha a távolság megduplázódik, a térszög csak negyedekedére lesz. Tehát $g \propto 1/r^2$.

16-11 ábra. A változás az idő függvényében La Jolla-ban (California). Megjegyezzük, hogy $1 \text{ Gal} = 10^{-8} \text{ m/s}^2$. (Az eredményt R. J. Warburton és J. M. Goodkind, University of California at San Diego, La Jolla, California, valamint C. Beaumont, Department of Energy, Mines, and Resources, Ottawa, Canada kutatók munkája.)



16-12 ábra.

Az m tömegpont körüli gravitációs mező reciproknégyzetes törvénye. A vázlaton a tömegpontból induló térszög két, r és $2r$ sugarú gömbfelület metsz. Minthogy a kimetszett négyzetek oldalai az r távolsággal arányosak, azért területeik a távolság négyzetével arányosak. A térerősségvonalak radiálisak, ezért amennyi vonal áthalad az A területen, ugyanannyi megy át a $4A$ területen is. Mivel a g térerősség az egységnyi felületen átmenő erővonalak számával arányos, ezért, ha a távolság megduplázódik, a térerősség csak negyedekkora lesz. Tehát $g \approx 1/r^2$.

16-11 ábra.

g változása az idő függvényében La Jolla-ban (California). Megjegyezzük, hogy $1 \text{ Gal} \equiv 10^{-2} \text{ m/s}^2$. (Az eredmény R. J. Warburton és J. M. Goodkind, University of California at San Diego, La Jolla, California, valamint C. Beaumont, Department of Energy, Mines, and Resources, Ottawa, Canada, kutatók munkája.)

tával a jelenségek maximumai a Nap és a Hold relatív helyzetének változása következtében eltolódnak. Ezek az „árapály” jelenségek a földfelszín középponttól mért távolságában napi 20 cm ingadozást okoznak. Más változásokat okoz La Jolla közelében a tenger árapálya azáltal, hogy a földfelszín – a Föld árapályával némi fáziseltolódásban – többletnyomással terheli. A légköri nyomás helyi növekedése g csekély csökkenésével jár a megnagyobbodott légtömegektől származó felfelé irányuló tömegvonzás következtében. Mindezek az effektusok jó korrelációban vannak az észlelt adatok változásával.

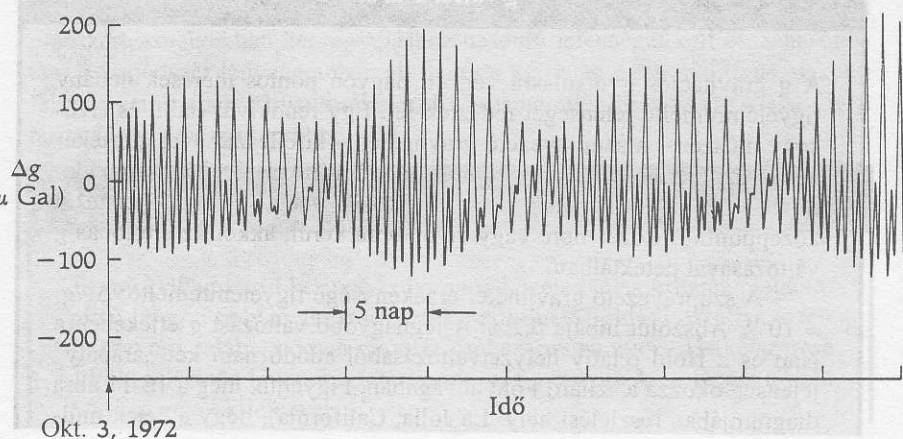
Az ilyen diagramok *Fourier analízis* (F függelék) néven ismert matematikai eljárással analizálhatók. A Fourier analízis különválasztja az egész rezgést felépítő frekvenciakomponenseket, ezáltal lehetővé válik az összetevők különböző természeti okokkal való összekapcsolása. A készülék érzékenységét és megbízhatóságát folyamatosan tökéletesítik úgy, hogy végül majd lehetségessé válik a G univerzális gravitációs állandó esetleges változásának detektálása. Az ilyen változások, ha valóban vannak, nagy jelentőségűek lennének a fizika, az asztronómia és kozmológia területén. Ez a technika a földrengés-előrejelzésre is izgalmas lehetőséget ad. Bizonyíték van rá, hogy néhány földrengést megelőzően a földfelszín geológiai szempontból nézve rövid idő alatt drámai módon néhány centiméterrel megemelkedett.

Ez is azt példázza, hogy a pontos mérési technika fejlesztése más területek megjósolhatatlan „robbanásszerű” fejlődéséhez vezethet. Olyan jelenség ez, ami újra és újra megismétlődik a természettudományok történetében. (Lásd még a 28-11 ábrát.)

Gravitációs erővonalak

A gravitációs mező elképzelésére alkalmas egyik módszer a mező **erővonalak** sorával való szemléltetése úgy, hogy a vonalak minden pontjához húzott érintő a gravitációs erő irányába mutasson. Gömbalakú testek esetében ezeknek a vonalak radiálisan befelé irányulnak. A gravitációs mező erőssége mindenütt arányos a vonalakra merőleges egységnyi felületen áthaladó erővonalak számával. A 16-12 ábra mutatja, hogy az ilyen radiális vonalsor valóban a reciproknégyzetes-erőtörvényhez vezet. Ha az egységnyi felületet kétszer akkora távolságra visszük, a felületen áthaladó erővonalak száma negyedannyi lesz.

Léteznek-e valóban erővonalak? A vasreszelékkel szemléltetett mágneses erővonalak képe (16-13 ábra) arra csábít, hogy elhiggyük, valóban léteznek ilyen mágneses erővonalak. Ezek csupán a fogalom megértését se-



gítik. A erővonalak száma adott esetben önkényes, és minden, számunkra kényelmes arányosság egyaránt elfogadható.

Kézikönyvekben megtalálható a Föld különböző helyén mért g értékek táblázata. A táblázatokban szereplő g a Föld forgásából származó centrifugális hatást tartalmazza. Ez indokolt, hiszen legtöbbször a Földet tekintjük vonatkoztatási rendszernek, és g értékét helyileg határozzuk meg ingakísérlettel, vagy hasonló módszerrel.

Meglepő az a pontosság, amellyel g mérhető: értéke *graviméterrel* $1/10^{11}$ pontossággal határozható meg. (A Föld felszínén ez kevesebb mint egytized milliméter magasságváltozásnak felel meg!) Repülőgépen egy hasonló készülék érzékelné a föld alatti olajmezőket vagy ásványkincset, mert ezek a szabálytalanságok g értékében kis változásokat okoznak. Mesterséges holdra telepítve, az eszköz hegyeket és krátereket térképezhet a Holdon vagy a bolygókon, és felszín alatti nagysűrűségű tömegeket érzékelhet.

16.6 A gravitációs potenciális energia

Említettük a 7. fejezetben, hogy a gravitációs erők konzervatív erők. Ezért tehát definiálhatjuk az $U(r)$ potenciálfüggvényt, amit az F konzervatív erővel az

$$U_b - U_a = - \int_a^b F \cdot dr \quad (16-21)$$

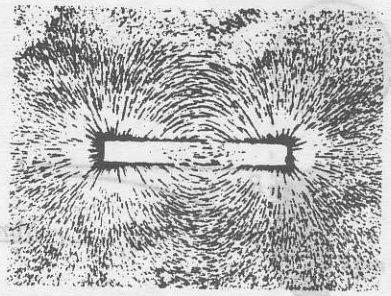
összefüggés kapcsol össze. Az előzőekben csak azokat az eseteket vettük figyelembe, amikor a test a Föld felszínéhez közel maradt, ahol g értéke lényegében állandó volt. Most azonban a Földtől messze lévő pályán haladó műholdak és rakéták mozgására is ki akarjuk terjeszteni tárgyalásunkat. Tekintsünk egy m tömegű részecskét, amely a Földön kívül, a Föld középpontjától r távolságban van. Az a *gravitációs potenciális energia* függvény, amit levezetünk, a részecske-plusz-Föld rendszerrel, mint egészszel van kapcsolatban. Csak egyetlen változója van: a részecske és a Föld középpontja közötti r távolság.

$$U_b - U_a = - \int_a^b \left(-G \frac{Mm}{r^2} \right) dr = GMm \int_a^b \frac{dr}{r^2} \quad (16-22)$$

(F kifejezése tartalmazza a negatív előjelet, arra utalva, hogy vonzásról, vagyis $-r$ irányú erőről van szó.) Ha az m tömegpont a Föld felszínétől távol is mozoghat, célszerű a *zérus referenciapotenciált* a részecske végtelen távoli helyzetére, tehát az $r = \infty$ helyre definiálni. Az integrálás útja a zérus referenciahelytől bármely adott pontig teljesen önkényes, mert konzervatív erők esetében az integrál független az úttól. Az integrálás egyszerűbbé tételére sugármenti utat választunk. Így, annak során, hogy a részecske a végtelenből [$U_g(\infty) \equiv 0$] a Föld középpontjától r távolságban, de a Földön kívül lévő helyre mozdul, az U_g **gravitációs potenciális energia** kifejezését az

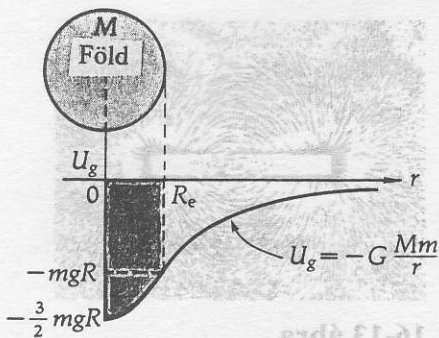
$$U_g - 0 = GMm \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = -G \frac{Mm}{r} \Big|_{\infty}^r$$

kifejezéssel adhatjuk meg.



16-13 ábra.

A mágneset környező térben a vasreszelék a mágneses erők irányával párhuzamos vonalak mentén rendeződik el. Az így előálló alakzat képet ad a *mágneses mezőről*.



16-14 ábra.

Az $U_g(r)$ gravitációs potenciális energia r függvényében egy olyan rendszer, amely a Földből és egy pontszerű m tömegeből áll. Az $U_g \equiv 0$ referenciahelyzet arra az esetre vonatkozik, amikor az m tömegpont a végtelenben van.

16-12 ábra.

Az m tömegpont körüli gravitációs mező reciprok-négyzetes törvénye. A vázlaton a tömegpontból induló térszög két, r és $2r$ sugarú gömbfelület metsz. Mivel a kismetszett négyzetek oldalai az r távolsággal arányosak, ezért területeik a távolság négyzetével arányosak. A térszög-árvonalak radiálisak, ezért amennyi vonal áthalad az A területen, ugyanannyi megy át a $4A$ területen is. Mivel a g térszög az egységnyi felületen átmennő erővonalak számával arányos, ezért, ha a távolság megduplázódik, a térszög csak negyedakkora lesz. Tehát $g \propto 1/r^2$.

16-11 ábra.

g változása az idő függvényében La Jolla-ban (California). Megjegyezzük, hogy $1 \text{ Gal} = 10^{-2} \text{ m/s}^2$. (Az eredmény R. J. Warburton és J. M. Goodkind, University of California at San Diego, La Jolla, California, valamint C. Beaumont, Department of Energy, Mines, and Resources, Ottawa, Canada, kutatók munkája.)

Gravitációs potenciális energia

$$U_g = -G \frac{Mm}{r} \quad (\text{a Földön kívüli pontban})$$

$$U_g \equiv 0, \text{ ha } r = \infty. \quad (16-23)$$

A 16-14 ábra a potenciális energiát vázolja a Föld belső és külső pontjaiban. (Lásd a 16C-23 feladatot.)

A (16-23) egyenlettel megadott U_g kapcsolatban van azzal az $U_g = mgy$ egyenlettel, amelyet a Föld közelében – tehát feltételezeten homogén gravitációs térben – végzett mozgásokra már alkalmaztunk. A kapcsolat bizonyítására megjegyezzük, hogy a földfelszín közelében U_g (lényegében) lineárisan változik az y magassággal, mert y nagyon kicsi a Föld R sugarához képest. Tekintsük a potenciális energia ΔU_g változását, miközben az m tömegű test a Föld felszínéről y magasságba emelkedik:

$$\Delta U_g = U_g(R+y) - U_g(R)$$

$$= -GMm \left(\frac{1}{R+y} - \frac{1}{R} \right)$$

$$= GMm \left(\frac{y}{(R+y)(R)} \right)$$

Mivel $y \ll R$, tehát

$$\Delta U_g \approx \frac{GMm}{R^2} y.$$

A földfelszín közelében $g = GM/R^2$, ezért

$$\Delta U_g \approx mgy.$$

Az a tény, hogy a Föld közelében végbemenő eseményekre az $U_g \equiv 0$ potenciális energiaszintet a Föld felszínéhez rendeljük, olyan jelenségekre pedig, ahol r változásai nagyok, az $U_g \equiv 0$ választást a végtelen távoli ponthoz kötjük, ΔU_g számításában semmi különbséget nem okoz (csupán annyit, hogy a magasabbrendű tagokat elhanyagolva kis elmozdulásokra állandó g értékkel számolunk).

16.7 A szökési sebesség és a kötési energia

Energetikai megfontolások alapján könnyen kiszámíthatjuk azt a legkisebb kezdeti sebességet, amivel a Föld felszínéről indított test úgy szökhet el a Földről, hogy soha nem vissza. (Számításainkban elhanyagoljuk a földi atmoszféra sűrűdési ellenállását és egyéb, a Föld forgása és más égitestek jelenléte miatt bekövetkező zavaró effektusokat.)

A feladat példa az energia megmaradására. Ha egy test a földfelszín közelében v sebességgel mozog, akkor K kinetikus energiája $\frac{1}{2}mv^2$. Ily módon összes energiája $E = U_g + K$. Ahhoz, hogy a test éppen csak elszökjön a Földről anélkül, hogy visszaesne, az szükséges, hogy a végtelen zérus kinetikus energiával érje el. Ha a minimális szökési sebesség a Föld felszínén v_e , akkor

$$E_0 = E$$

$$U_0 + K_0 = U + K$$

$$-G \frac{Mm}{R} + \frac{1}{2} m v_e^2 = 0 + 0.$$

Innen v_e értéke

A legkisebb szökési sebesség a földről
$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (16-24)$$

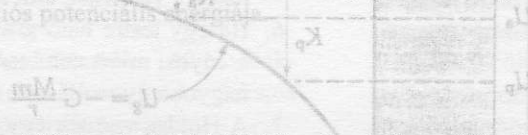
ami a Föld felszínén 11,2 km/s -mal egyenlő. A részecske kilövésének *iránya* közömbös (a légkör sűrűlésének, a Föld forgásának⁷, a Hold gravitációs hatásának, stb. elhanyagolása mellett).

Érdekes, hogy a szökési sebesség a szökő részecske tömegétől független. De ha a földi légkör esetét nézünk, látjuk, hogy a könnyebb komponensek (hidrogén és hélium) könnyebben kiszöknek, mint a nehezebb komponensek (oxigén és nitrogén). Ennek az az oka, hogy állandó hőmérsékleten a gázok minden atomjának vagy molekulájának átlagosan ugyanakkora $K = \frac{1}{2} m v^2$ kinetikus energiája van. Így a könnyebb atomok és molekulák átlagsebessége nagyobb, mint a nehezebbeké. Persze nem minden részecske mozog pontosan ugyanazzal a sebességgel; némelyiknek az átlagosnál nagyobb, némelyiknek az átlagosnál kisebb sebessége van. A mi légkörünkben a hidrogén és a hélium sebességtartományának felső részében már elegendően nagy a sebesség ahhoz, hogy ezek a gázok a Föld gravitációs mezőjéből kiszökhessenek. Valójában úgy hisszük, hogy a Föld és a Naprendszer főként hidrogént és héliumot tartalmazó interstelláris (csillagközi) gázból és porból állt össze és csupán egy – két százalékban más elemekből. Ma azonban a földi atmoszféra csupán milliomod résznyi hidrogént és héliumot tartalmaz. A Holdon olyan kicsi a szökési sebesség, hogy a Hold semmiféle észlelhető légkört nem tud a felszínén tartani. Ezzel szemben a Föld tömegénél 318-szor nagyobb tömegű Jupiter atmoszférájának kb. 84%-a hidrogénből, 15%-a héliumból áll, és csak 1%-ban tartalmaz nehezebb molekulákat. Ez az összetétel feltételezhetően hasonló a Naprendszert kialakító csillagközi gáz összetételéhez.

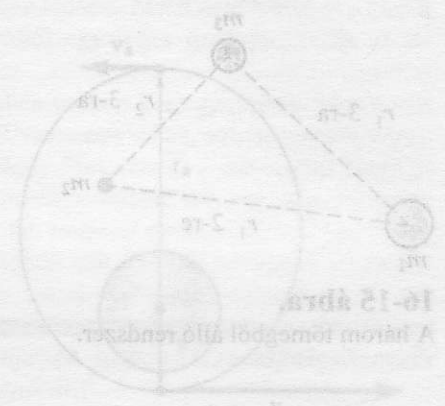
Az atmoszférából csak nagy magasságban szöknek meg molekulák, ahol a levegő sűrűsége annyira kicsi, hogy a v_e szökési sebességnél nagyobb sebességű molekulának esélye van arra, hogy az ütközést más molekulákkal elkerülve megszökhessen. A Föld esetében ez a magasság durván 600 km fölött van, az *exoszférának* nevezett tartományban, ahol a hőmérséklet 1500° C nagyságrendű. (Ez a magas hőmérséklet nem jelenti azt, hogy ott egy úrhajós vagy egy mesterséges hold megégne. A levegő annyira ritka, hogy a levegő molekulái nem tudják gyorsabban átadni energiájukat annál, mint ahogyan a test az energiát kisugározza.)

Pályagörbék energetikai megfontolás alapján történő kiszámításának egyik szokásos módja azon alapul, hogy a potenciális energia *skalár mennyiség*, és skalár mennyiségekkel a matematika könnyebben boldogul, mint vektorokkal. Például a 16-15 ábrán vázolt három test kölcsönös gravitációs energiáját az egyes tömegpárok gravitációs potenciális energiájának összegezésével számíthatjuk ki:

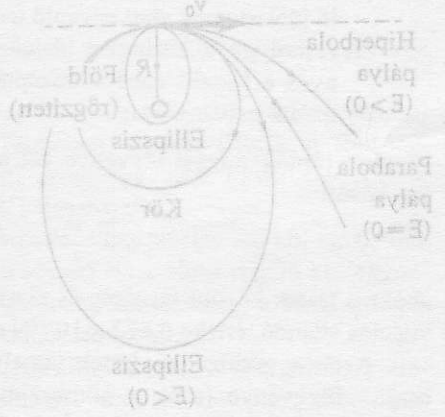
MEGOLDÁS



⁷ A szökési sebességet a nem forgó Földre számítottuk ki. Tehát a sebességek az „álló” csillagokhoz képest *nyugalomban lévő* vonatkoztatási rendszerre érvényesek. (Klasszikusan, a Föld légkörén túl lévő mesterséges hold „nem tudja”, hogy a Föld forog alatta.) Ha a szökési sebességet a földfelszíni kilövő állomásra vonatkoztatva akarnánk kiszámítani, korrekcióba kellene venni a földfelszín forgási sebességét és a földfelszín sebességéhez viszonyított kilövési irányt. Kihasználva azt az előnyt, amit a Föld forgása nyújt, a mesterséges holdakat gyakran keleti irányban indítják.

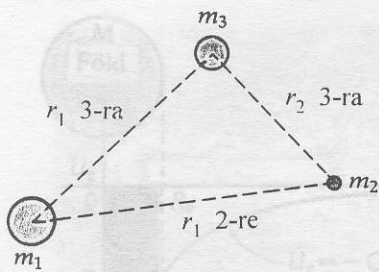


16-15 ábra. Három tömegből álló rendszer. A kölcsönös gravitációs energiák összegezésével számíthatjuk ki a rendszer potenciális energiáját.



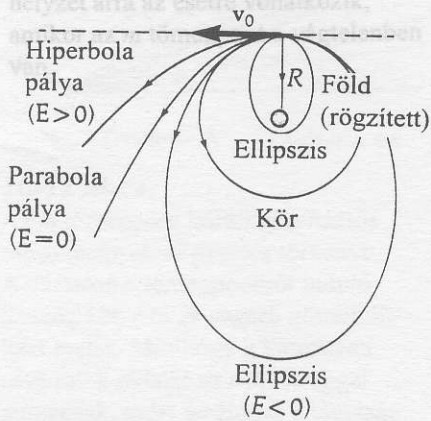
16-16 ábra. A Föld középpontjától R távolságban az ábrázolt módon a különböző v_0 kezdetsebességgel indított mesterséges holdak lehetséges pályái. A pályák típusa az $E = U + K$ összes energiától függ.

16-17 ábra. Az ellipszispályán keringő mesterséges hold számára az U gravitációs potenciális energia az apogéumban a legnagyobb, az U_0 és a perigeumban a legkisebb. Az U és K összege az E teljes $E = U + K$ (minígit pozitív) marad. $E = U + K$ (minígit pozitív) kinetikus energia a megfelelő K és U értékek között változik. Ha $E < 0$, akkor a mesterséges hold pályája zárt, nem tud kiszökni a Föld gravitációs mezőjéből. $E > 0$ esetén a mesterséges hold pályája nyit, és ki fog szökni a földi gravitációs mezőből.



16-15 ábra.
A három tömegből álló rendszer.

16-14 ábra.
Az U_g gravitációs potenciális energia a gravitációban egy olyan rendszer, amely a Földről és egy pontszerű m tömegből áll. Az U_g referenciahelyzet arra az esetre vonatkozik.



16-16 ábra.
A Föld középpontjától R távolságban az ábrázolt módon a különböző v_0 kezdősebességgel indított mesterséges holdak lehetséges pályái. A pálya típusa az $E = U_g + K$ összes energiától függ.

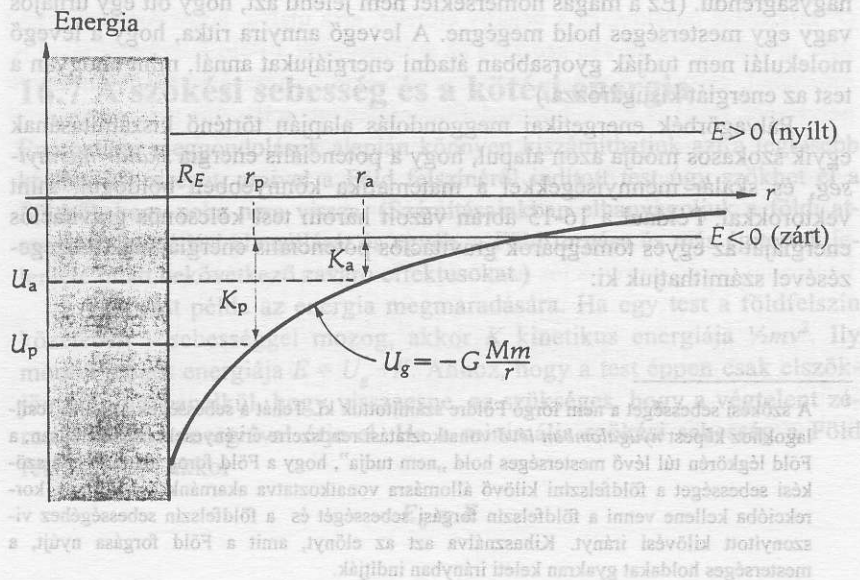
16-17 ábra.
Az ellipszispályán keringő mesterséges hold számára az U_g gravitációs potenciális energia az apogeumhoz tartozó U_a és a perigeumhoz tartozó U_p szélső értékek között változik. (Mindkettő numerikus értéke negatív.) A teljes $E (< 0)$ energia állandó marad: $E = U_g + K$. A (mindig pozitív) kinetikus energia a megfelelő K_a és K_p értékek között változik. Ha $E < 0$, akkor a mesterséges hold pályája *zárt*, nem tud kiszökni a Föld gravitációs mezejéből. $E > 0$ esetén a mesterséges hold pályája *nyílt*, és ki fog szökni a földi gravitációs mezőből.

$$U_g = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G \frac{m_2 m_3}{r_{23}} - G \frac{m_1 m_3}{r_{13}} \quad (16-25)$$

A (16-25) egyenlet a rendszer gravitációs potenciális energiáját adja meg, ha a potenciális energia zéruspontját úgy választjuk meg, hogy a rendszer minden tagja egymástól végtelen távol van. Ha a testeket egymástól végtelen messzire akarjuk távolítani, akkor ezt az energiamennyiséget arra a munkára kell fordítanunk, amit a testeket között kölcsönösen fellépő gravitációs vonzóerő ellenében a széjjelhúzáshoz végezni kell. Ez a kötési energiának nevezett (negatív) potenciális energia tartja össze a rendszert.

16.8 A mesterséges holdak mozgásának energiaviszonyai

Egy érdekes jelenkori probléma az M tömegű Föld körül keringő m tömegű mesterséges hold mozgása. Mivel a Föld tömege sokkal nagyobb a műholdénál, azért úgy tekinthetjük, hogy a Föld egy inerciarendszerben nyugszik, és az m tömegű műhold sokféle lehetséges pályán mozoghat a Föld körül. A 16-16 ábra $E = U_g + K$ összes energia különböző értékeihez tartozó néhány pályagörbét mutat be, ha a v_0 kezdősebesség merőleges a Föld középpontját és a műholdat összekötő egyenesre. Ellipszis pálya esetében az ellipszis egyik fókuszában a Föld van. Érdeemes emlékezni arra, hogy a gravitációs erő nemcsak, hogy konzervatív, de gömbalakú testekre *centrális*, így nem tud forgatónyomatékokat gyakorolni a mesterséges holdra. Következésképpen az *összenergia és az impulzusmomentum megmarad*. Ezt a két elvet ellipszispályákra alkalmazva, a pályák különböző jellemzői kiszámíthatók: pl. a bármely ponthoz tartozó sebesség, a perigeum távolság (a Földhöz legközelebbi távolság), az apogeum távolság (a pálya legnagyobb távolsága a Földtől), (16-17 ábra). Ha az összes energia $E < 0$, a mesterséges hold a Föld körüli kör- vagy ellipszispályához van kötve. Ha $E > 0$, a pálya hiperbola, és a mesterséges hold elszökik a Földtől. A parabola pálya ($E = 0$) az a nem zárt pálya, amely a zárt (kör és ellipszis) pályagörbék és a nyílt (hiperbola) pályagörbék közötti választóvonalat jelenti.



16-6 PÉLDA

Egy mesterséges hold ellipszis pályán mozog a Föld körül. A pálya Földtől mért legkisebb és legnagyobb távolsága 400 km és 3000 km. Határozzuk meg a mesterséges hold sebességét apogeum és perigeum helyzetben.

MEGOLDÁS

Mivel a műhold tömege a Föld tömegéhez képest elhanyagolható, a Föld tömegközéppontját nyugalomban lévőnek tekintjük. A gravitáció centrális erő (azaz a Föld tömegközéppontjának irányába hat), ezért a műhold Föld tömegközéppontjára vonatkozó impulzusmomentuma időben állandó. Ennélfogva az impulzusmomentum megmaradása érvényes.

Az apogeum és a perigeum helyzetre az a és p indexeket használva, ($6,36 \times 10^6$ m földsugárral számolva) $r_a = 9,36 \times 10^6$ m és $r_p = 6,76 \times 10^6$ m. Az impulzusmomentum megmaradása értelmében

$$\begin{aligned} L_p &= L_a \\ mv_p r_p &= mv_a r_a \\ v_p r_p &= v_a r_a \end{aligned} \quad (16-26)$$

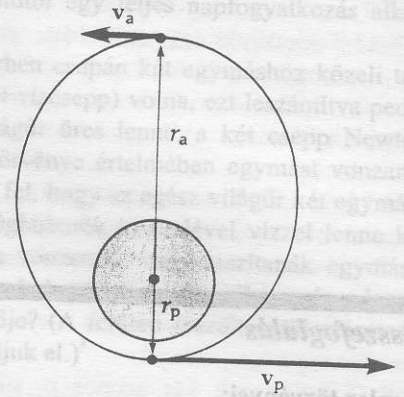
Az energiamegmaradási törvényt alkalmazva

$$\begin{aligned} E_p &= E_a \\ U_p + K_p &= U_a + K_a \\ -G \frac{Mm}{r_p} + \frac{1}{2} mv_p^2 &= -G \frac{Mm}{r_a} + \frac{1}{2} mv_a^2 \\ 2GM \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_p} \right) &= v_a^2 - v_p^2 \end{aligned} \quad (16-27)$$

Mivel G , M , r_p és r_a értékeit ismerjük, két egyenletet (16-26 és 16-27) kell használnunk a két ismeretlen (v_p és v_a) meghatározására.

Az egyenleteket megoldva

$$v_p = 8250 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{és} \quad v_a = 5960 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



16-18 ábra. Mesterséges hold földkörüli ellipszis pályán.

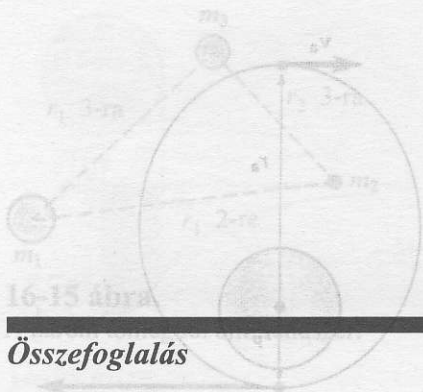
16-7 PÉLDA

Tekintsünk egy mesterséges holdat (tömege m), amely a Föld (tömege M) körül, a Föld középpontjától r távolságban körpályán kering. Mutassuk ki, hogy ennél a pályasugárnál kinetikus energiájának nagysága feleakkora, mint gravitációs potenciális energiája.

MEGOLDÁS

A körmozgáshoz szükséges centripetális erőt a mesterséges holdra ható gravitációs erő szolgáltatja.

$$\begin{aligned} \sum F_r &= ma, \\ G \frac{Mm}{r^2} &= m \left(\frac{v^2}{r} \right) \end{aligned}$$



Ebből az összefüggésből a kinetikus energia kifejezhető:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{GMm}{r} \right]$$

ami feleakkora, mint a gravitációs potenciális energia az r helyen. Ez az összefüggés érvényes minden olyan körpályán történő mozgásra, ami az inverz-négyzetes-erőtörvény hatására jön létre.

Összefoglalás

Kepler törvényei:

- (1) Mindegyik bolygó olyan ellipszispályán kering, amelynek egyik fókuszpontjában a Nap van.
- (2) A Naptól a bolygóig húzott rádiuszvektor egyenlő időtartamok alatt egyenlő területeket sűrol.
- (3) A bolygó T keringési idejének négyzete arányos a Naptól mért R középtávolságának harmadik hatványával.

Newton tömegvonzási törvénye két m_1 és m_2 tömegű test között:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

ahol r a testek közötti távolság és G az univerzális gravitációs állandó, értéke $6,672 \times 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

Azok a gömbalakú testek, amelyeknek sűrűsége csak r függvénye (azaz a gömbszimmetriájú testek), olyan erőt gyakorolnak egy külső pontban lévő részecskére, mintha egész tömegük a középpontjukban lenne koncentrálnva. Egy homogén gömbhéj nem fejt ki erőt a belsejében lévő részecskére. Ezért egy gömbszimmetrikus test tetszőleges belső r pontjában lévő tömegpontra a gömbnek csak attól a részétől származik gravitációs vonzóerő, amely az r sugáron belül van.

A g gravitációs télerősség hasznos fogalom a gravitációval kapcsolatos problémákhoz. Az M tömegű test

által létesített külső gravitációs mező g télerőssége definíció szerint

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = - \left(\frac{GM}{r} \right) \hat{\mathbf{r}}$$

A U_g gravitációs potenciális energiát az

$$U_2 - U_1 = - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

összefüggéssel határozzuk meg.

Ha az $r = \infty$ helyen $U_g \equiv 0$, akkor

$$U_g = -G \frac{Mm}{r}$$

A v_e legkisebb szökési sebesség az M tömegű, R sugarú bolygó felszínéről minden (bármekkora m tömegű) testre azonos:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Mesterséges holdak mozgására $E = U_g + K$ összefüggés érvényes és mind az energia, mind az impulzusmomentum megmarad. A zárt szatellitpályák $E < 0$ esetén körök vagy ellipszisek lehetnek, amelyeknek egyik fókuszában van a Föld. $E > 0$ esetén a pályagörbe hiperbola, és így a test csak egyszer halad el a Föld mellett. Az $E = 0$ -értékhez parabola pálya tartozik, amelyre az jellemző, hogy a test sebessége a végtelenségig zérushoz tart.

Kérdések

1. Lehetséges-e egy műholdat olyan földkörüli pályára állítani, amelynek síkja nem megy át a Föld középpontján?
2. Meg tudjuk-e határozni egy bolygó tömegét, ha csak pályasugarát és a Föld tömegét ismerjük? Ha nem, akkor minimálisan milyen adatokra van még szükségünk?
3. A légellenállást (súrlódást) és a Föld forgását elhanyagolva földkörüli pályára állítható-e egy műbolygó úgy, hogy egy óriási nagy, földhöz rögzített ágyúból kilövik?
4. A csillagközi tér átlagos sűrűsége durván egy hidrogénatom köbcentiméterenként. Napunk tömege kb. 2×10^{30} kg. Mekkora volt annak a gáznak a

kezdeti térfogata, amelyből Napunk keletkezhetett, ha sűrűsége az átlagosnál ötször nagyobb volt?

5. Tegyük fel, hogy a jövő hét folyamán G értéke fokozatosan a jelenlegi érték felére csökken. Írjunk le néhány változást, ami azon a héten történne.
6. Ha egy testre ható gravitációs erő a test tömegével arányos, miért nem esnek a nagyobb tömegű testek nagyobb gyorsulással, mint a kisebbek?
7. A Holdra visznek egy ingaórát és egy karórát. Melyik fog gyorsabban járni a Holdon?
8. A Hold tömege már azelőtt ismert volt, hogy bárki odautazhatott volna és megmérhette volna felszínén a szabadon eső test gyorsulását. Hogyan határozták meg a Hold tömegét?

9. Tegyük fel, hogy rugós mérleggel megmérjük egy test súlyát az egyenlítőn. Tegyük fel két esetet: megmérjük a súlyát délben, amikor a Nap éppen a fejünk felett van, és megmérjük éjfélkor, amikor a Nap pontosan a Föld „alatt” van. Ha eltekintünk a Föld forgásától, de tekintetbe vesszük napköri pályamozgását, különbözik-e a két mérés eredménye? Változik-e a válasz, ha tekintetbe vesszük a Föld forgását?
10. Elemezzük, mi történik egy kisméretű úrállomással, ha a benne lévő úrhajós az egyik falról a másikra ugrik? Mi történne akkor, ha az úrhajós elkezdene körbefutni a belső falon?
11. A Nap által a Holdra gyakorolt gravitációs erő kb. kétszer akkora, mint az a gravitációs erő, amit a

Feladatok

16.2 Kepler törvényei

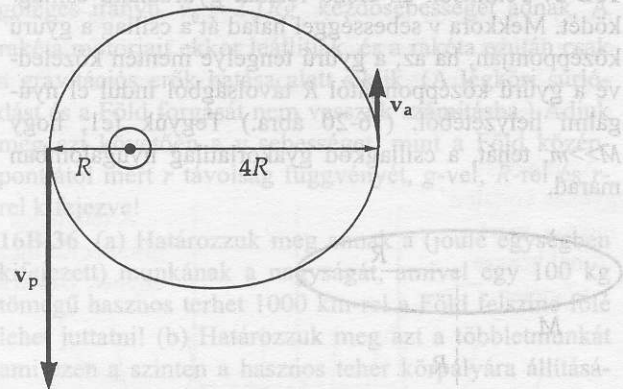
16.3 Newton tömegvonzási törvénye

16A-1 Mi gyakorol nagyobb gravitációs vonzást a földi testekre: (a) a Hold, vagy (b) a Nap? Számítsuk ki ezeket az erőket 1 kg tömegű testre.

16A-2 Ha egy szabadon eső meteor a Föld felszíne felett 3 földugárnyi távolságra van, mekkora a gyorsulása a Föld gravitációs erejének hatására?

16A-3 Határozzuk meg a gravitációs gyorsulást a földfelszíni g gyorsulás függvényében a földfelszín felett a Föld átmérőjével megegyező magasságban!

16A-4 Egy műhold kering a Föld körüli ellipszis pályán (lásd a 16–19 ábrát) úgy, hogy apogeum, illetve perigeum helyzetben a távolsága a Föld középpontjától R , illetve $4R$. Határozzuk meg a két helyzethez tartozó sebesség v_a/v_p arányát!



16-19 ábra.

A 16A-4 feladathoz.

16A-5 Egy úrhajós súlya a Hold felszínén 140 N. Mekkora gravitációs erővel hat rá a Hold, ha az úrhajós holdsugárnyi magasságban körpályán kering?

16A-6 Kezdő fizikusok laboratóriumaiban a G gravitációs állandó mérésére használt Cavendish típusú mérlegnél olyan 1,5 kg és 15 g tömegű ólomgömböket alkalmaznak, amelyeknek középpontjai 4,5 cm távol vannak egymástól. Számítsuk ki a gömbök között ható

Föld gyakorol a Holdra. Miért nem húzza el a Nap a Holdat a Földtől egy teljes napfogyatkozás alkalmával?

- 12.** Ha a világűrben csupán két egymáshoz közeli test (mondjuk két vízcsepp) volna, ezt leszámítva pedig az egész világűr üres lenne, a két csepp Newton gravitációs törvénye értelmében egymást vonzaná. Most tegyük fel, hogy az egész világűr két egymáshoz közeli légbuborék kivételével vízzel lenne kitöltve. Vajon vonzanák, vagy taszítanak egymást, vagy esetleg a buborékok mindegyikére zérus lenne az erők eredője? (A felületi feszültségtől származó erőt hanyagoljuk el.)⁸

erőt oly módon, hogy a gömböket a középpontjukba helyezett tömegpontokként kezeljük.

16A-7 A Föld–Nap távolság $1,65 \times 10^8$ km (perihelion) és $1,70 \times 10^8$ km (aphelion) között változik. A föld legkisebb pályamenti sebessége 32,8 km/s. Határozzuk meg a legnagyobb pályamenti sebességet.

16B-8 A Hold felszínén a gravitációs erő kb. egyhatoda a Föld felszínén lévőnek. Ha a Hold sugara kb. egynegyede a Föld sugarának, hányszorosa a Hold átlagos sűrűsége a Föld átlagos sűrűségének?

16A-9 Asztrológusok állítják, hogy a bolygók helyzetének változásai hatással vannak életünkre. Becsüljük meg egy 2000 kg-os gépkocsitól származó gravitációs erő és a Mars bolygó által ránk kifejtett gravitációs erő arányát, ha a gépkocsi tömegközéppontjának a tőlünk való távolsága 2 m, a Mars bolygó távolsága (földközeli) kb. 56 millió km és a Mars tömege $6,5 \times 10^{23}$ kg. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy testünk és a gépkocsi pontszerű test.

16B-10 A hidrogén atomban az elektron és a proton távolsága 5×10^{-11} m. Ha a közöttük ható erő csak gravitációs volna, mennyi lenne az elektron proton körüli keringésének periódusideje? Tömegeik: $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ kg és $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg.

16B-11 Kepler harmadik törvénye kimondja, hogy a bolygók keringési idejének négyzete arányos a Naptól mért közép-távolság harmadik hatványával. Határozzuk meg az arányossági tényezőt ezen paraméterek segítségével körpálya esetén és számítsuk ki az arányossági tényező numerikus értékét!

16B-12 A Föld körül ellipszis pályán keringő mesterséges hold perigeum távolsága a földfelszín fölött két földugár. Apogeum helyzetben negyedakkora a sebessége, mint perigeum helyzetben. Mekkora a mesterséges

⁸ A feladatot L. Epsteins és P. Hewitt „Thinking Physics” (Gondolkodtató Fizika) c. könyvéből vettük át. (Insight Press, San Francisco, 1979.) 1. kötet 125 old.

hold földfelszín feletti maximális távolsága? A választ a Föld R sugarának függvényében adjuk meg!

16B-13 Tekintsünk egy műholdat, amely a Földhöz nagyon közeli pályán kering. Kizárólag a $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ és az $R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ fűdsugárral számolva határozzuk meg (a) a T keringési időt percekben és (b) a pályamenti sebességet!

16B-14 Az *Explorer VII* műholdat az ionoszférakutatási feladattal 1960 november 3-án állították pályára. Pálya-adatai a következők: perigeum távolsága 459 km, apogeum távolsága 2289 km (mindkettő a Föld felszínétől mérve) és keringési ideje 112,7 perc. Határozzuk meg a v_a/v_p arányt!

16B-15 Tekintsünk két azonos ρ sűrségű homogén tömör gömböt! Az egyik sugara R , a másiké $2R$. A két test a világűrben van, ahol más testektől származó gravitációs hatás elhanyagolható. Ha a két gömb nyugalomban van, és felületeik érintkeznek, mekkora a gravitációs vonzásból származó nyomó erő a gömbök között? A választ G , R és ρ függvényében adjuk meg!

16B-16 A „szinkron” műhold akkora sebességgel kering körpályán, hogy a földi megfigyelő számára nyugalomban lévőnek látszik. (a) Magyarázzuk meg, miért csak az egyenlítő síkjában lévő pályán lehetséges az ilyen mozgás! (b) Határozzuk meg a pálya sugarát a Föld középpontjától mérve! (c) Határozzuk meg azt a legtávolabbi északi szélességi fokot, ahonnan ez a műhold a Földről még látható!

16B-17 Egy „szinkron” műholdat, amely a bolygó egyenlítőjének mindig ugyanazon pontja fölött marad, Jupiter körüli pályára állítanak azzal a feladattal, hogy a híres vörös foltot tanulmányozza. A Jupiter 9,9 óránként fordul egyet. Az L függelék adataival számolva határozzuk meg azt a távolságot a Jupiter egyenlítője fölött, ahol az ilyen pálya lehetséges!

16B-18 A Cygnus X-1 -ről, egy égi röntgensugár forrásról röntgensugár impulzusokat észleltek egy nagy magasságban végzett rakétarepülés során. A jelek úgy értelmezhetők, mintha egy fekete lyuk körül 5 ms periódusidővel keringő ionizált anyagcsomótól származnának. Ha ez az anyagcsomó a Nap tömegénél 20-szor nagyobb tömegű fekete lyuk körül körpályán keringene, mekkora lenne a pályasugara?

16B-19 A Jupiter egyik holdjának a pályasugara kb. 10^6 km és keringési ideje mintegy 7 földi nap. Becsüljük meg ezen adatok birtokában a Jupiter tömegét!

16.5 A gravitációs mező

16B-20 Tekintsünk egy egyenletes sűrségű vékony rudat! Készítsük el a rúd gravitációs erővonalainak vázlatát a rúd közelében, a végeket is beleértve. (Útmutatás: Tekintsük a kis próbatestre ható gravitációs erőt a különböző helyeken.)

16B-21 Három, egyenlő m tömegű tömegpont egy l oldalhosszúságú négyzet három csúcsában van elhelyezve. Határozzuk meg a három tömegponttól származó g térerősséget a negyedik csúcsban!

16B-22 Számítsuk ki a $(2,0)$ pontban lévő m tömegű és a $(0,2 \text{ l})$ pontban lévő $2m$ tömegű tömegpontok által meghatározott g gravitációs térerősséget az origóban.

16.6 A gravitációs potenciális energia

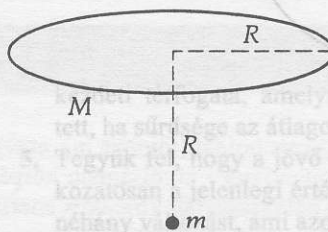
16A-23 Mutassuk meg, hogy a körpályán mozgó meterséges hold potenciális energiája pontosan kétszer akkora, mint kinetikus energiája!

16A-24 Egy függőleges irányba kilőtt rakéta $2g$ gyorsulással mozog felfelé. 40 s múlva kikapcsolják a rakéta motorjait, és ezután a rakéta az elhanyagolható légellenállás mellett egyedül a gravitáció hatása alatt mozog. A g magasságfüggését figyelmen kívül hagyva (a) határozzuk meg a rakéta által elért legnagyobb magasságot és (b) a repülés teljes idejét a kilövéstől a földet érésig. (c) Készítsünk (kvalitatív) sebesség-idő diagramot a teljes repülési időre.

16B-25 Egy szupernova robbanás után egy csillag a gravitációs összeomlás miatt neutroncsillagként ismert extrém sűrű állapotúvá válhat, amelyben minden proton és elektron neutronná van összepréselve. Egy a Nap tömegével nagyjából megegyező tömegű neutroncsillag sugara kb. 10 km lenne. Határozzuk meg (a) a felszínén a gravitációs gyorsulást, (b) egy 70 kg-os ember súlyát a felszínen és (c) azt az energiát, amivel a felszínről egy neutront a végtelenbe lehetne eltávolítani!

16B-26 Képzeljünk el egy m tömegű csillagot, ami egy r sugarú, M tömegű, vékony, gyűrűalakú csillagköd középpontjában van. Határozzuk meg a csillag gravitációs potenciális energiáját m , M , R és G függvényében. Tegyük fel, hogy a csillag potenciális energiája a csillagködtől végtelen távolságban zérus.

16B-27 Tekintsük az előző feladat gyűrűalakú csillagködét. Mekkora v sebességgel halad át a csillag a gyűrű középpontján, ha az, a gyűrű tengelye mentén közeledve a gyűrű középpontjától R távolságból indul el nyugalmi helyzetéből. (16-20 ábra.) Tegyük fel, hogy $M \gg m$, tehát, a csillagköd gyakorlatilag nyugalomban marad.



16-20 ábra.

A 16B-27 feladathoz.

16B-28 Nukleáris üzemanyagának kimerülése után Napunk végzete bizonyára az lesz, hogy a Nap tömegével megegyező tömegű, de a Földdel egyező sugarú *fehér törpévé* esik össze. Számítsuk ki (a) a fehér törpe átlagos sűrségét, (b) a nehézségi gyorsulást a felszínen és (c) egy 1 kg-os test gravitációs potenciális energiáját a felszínen! ($U_g = 0$ a végtelenben.)

16.7 Szökési sebesség és kötési energia

16A-29 Számítsuk ki a szökési sebességet a Hold felszínéről.

16A-30 Alapelvekből kiindulva számítsuk ki a szökési sebességet a Mars felületéről. (Az adatokat lásd az L függelékben.)

16A-31 Egy nem forgó gömbalakú bolygó tömege M , sugara R . A bolygó felszínéről radiális irányban egy részecskét lönek ki $v = \sqrt{GM/2R}$ sebességgel. (Ez a bolygó szökési sebességének a fele.) Számítsuk ki, mekkora távolságra jut el a részecske a bolygó középpontjától!

16A-32 Az Uránusz bolygó tömege a Föld tömegének kb. 14-szerese, sugara kb. 3,7 földugár. (a) A Föld megfelelő adataihoz arányítva fejezzük ki a gravitációs gyorsulást az Uránusz felszínén. (b) A bolygó forgásának elhanyagolásával határozzuk meg az Uránusz felszínére vonatkozó minimális szökési sebességet!

16B-33 Három, egyenként m tömegű részecske l oldalhosszúságú egyenlőoldalú háromszög csúcsaiban van. Mekkora munkával lehetne a részecskéket egymástól végtelen távolságra vinni?

16B-34 Jelölje M , illetve R a Föld tömegét, illetve sugarát. (a) Mekkora az a minimális v_0 sebesség, amellyel az egyenlítőn függőlegesen kilőtt test a Föld felszínétől éppen 2 földugárnyi magasságra emelkedik? A Föld forgását és a légköri súrlódást ne vegyük figyelembe. (b) A Föld forgását is számításba véve, növekszik, csökken, vagy változatlan marad-e az (a) kérdésre adott válasz számértéke? Fejtsük ki véleményünket!

16B-35 Az R sugarú Föld felszínén egy rakétának függőleges irányú $v_0 = 2\sqrt{Rg}$ kezdősebességet adnak. A rakéta motorjait ekkor leállítják, és a rakéta ezután csak a gravitációs erők hatása alatt siklik. (A légköri súrlódást és a Föld forgását nem vesszük számításba.) Adjuk meg ezt követően a v sebességet, mint a Föld középpontjától mért r távolság függvényét, g -vel, R -rel és r -rel kifejezve!

16B-36 (a) Határozzuk meg annak a (joule egységben kifejezett) munkának a nagyságát, amivel egy 100 kg tömegű hasznos terhet 1000 km-rel a Föld felszíne fölé lehet juttatni! (b) Határozzuk meg azt a többletmunkát, ami ezen a szinten a hasznos terhet körpályára állításához szükséges!

16B-37 Mutassuk ki, hogy egy állandó sűrűségű bolygó felületéről a szökési sebesség a bolygó sugarával arányos!

16.8 A mesterséges bolygók mozgásának energiaviszonyai

16A-38 Egy mesterséges bolygó földkörüli ellipszispályán mozog úgy, hogy perigeum, ill. apogeum helyzetben a Föld középpontjától mért magasság D , ill. $4D$. (a) Határozzuk meg a két helyzethez tartozó sebességek v_p/v_a arányát! (b) Határozzuk meg ugyanezen helyzetek

összes (kinetikus és potenciális) energiáinak E_p/E_a arányát!

16B-39 Tekintsünk egy földkörüli körpályán keringő mesterséges holdat! A megfelelő összefüggésekre hivatkozva adjunk választ arra, hogy az alábbi mennyiségek állandóak maradnak, vagy megváltoznak-e a mozgás során: (a) a kinetikus energia, (b) a gravitációs potenciális energia, (c) az impulzus és (d) az impulzusmomentum. Most tekintsük az ellipszispályán mozgó mesterséges holdat. Melyek lesznek változatlanok a fenti mennyiségek közül, és melyek változnak meg?

További feladatok

16C-40 A Föld és a Hold közötti távolság melyik pontjában lesz a gravitációs erők eredője zérus egy kisméretű testre.

16C-41 Bizonyos kettőscsillag rendszerben két csillag körpályán kering közös tömegközéppontjuk körül. A csillagok gömbalakúak, sűrűségük (ρ) azonos, sugaraik R és $2R$. Középpontjuk $5R$ távolságra van egymástól. Határozzuk meg a csillagok T keringési idejét ρ , R és G függvényében.

16C-42 Három, egyenként M tömegű csillag egy egyenlőoldalú háromszög egy-egy csúcsában van. Síkban, közös tömegközéppontjuk körül keringenek, kölcsönös gravitációs vonzás következtében relatív távolságaikat állandó értéken tartják. Fejezzük ki ennek a forgómozgásnak a T periódusidejét M , G és D függvényében, ahol D a háromszög oldalának hossza.

16C-43 A M , illetve $2M$ tömegű csillag közös tömegközéppontjuk körül körpályán kering. A középpontjuk távolsága D . (a) Adjuk meg a tömegközéppont helyét! (b) Határozzuk meg a tömegközéppont körüli keringés T periódusidejét M , D , valamint a G univerzális gravitációs állandó függvényében!

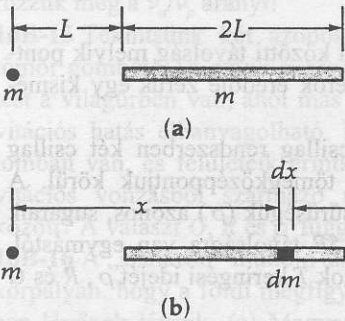
16C-44 Állítólag egy a kereskedelemben kapható, hordozható graviméter elég érzékeny ahhoz, hogy g $1 : 10^{11}$ arányú változásait detektálni tudja. A Föld felszínén milyen magasságváltozás járna g ekkora megváltozásával? Vegyük a Föld sugarát 6×10^6 méternek. (Javaslat: nézzük meg az E függelékben $1/(1+x)$ közelítő formuláját az $x \ll 1$ esetre!)

16C-45 A Föld lapultsága miatt a Föld középpontjának a távolsága az egyenlítőtől $r_e = 6,378 \times 10^6$ m, az északi saroktól pedig $r_p = 6,357 \times 10^6$ m. Az eltérés a kettő között: $\Delta r = 22 \times 10^3$ m. (a) Határozzuk meg egy m tömegű testre ható gravitációs erő relatív megváltozását, ha a testet az északi sarokról az egyenlítőre viszik. (A relatív változást a $\Delta F/F$ aránnyal definiáljuk, ahol ΔF az erő változása, F az eredeti erő.) (b) Számítsuk ki a relatív megváltozás numerikus értékét.

16C-46 A G univerzális gravitációs állandó egyik pontos geofizikai meghatározása a gravitációs gyorsulás Föld felszínén mért és egy bányakna mélyén mért értékek közötti különbségen alapul. Vezessünk le formulát G -re a gravitációs gyorsulás Δg változásának, az akna D mélységének és az akna menti ρ átlagsűrűségnek függ-

vényében. Tételezzük fel, hogy a Föld sűrűsége csupán a Föld középpontjától mért távolságtól függ.

16C-47 A 16-21 ábrán látható kicsiny test és vékony homogén rúd mindegyikének tömege m . Mindkettő ugyanazon egyenesen fekszik, ahogyan ez az ábrán látható. A kicsiny test L távolságban van a $2L$ hosszúságú rúd végétől. Határozzuk meg azt a gravitációs vonzóerőt, amellyel a rúd a kicsiny testre hat! (Javaslat: tekintjük a $dm = (\text{tömeg/hosszúság})dx$ elemi tömeg által kifejtett erőt, és ezt integráljuk, hogy a teljes erőt megkapjuk.)

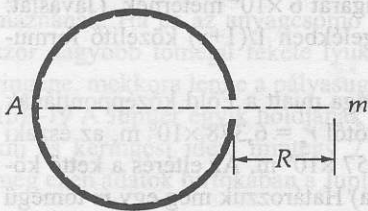


16-21 ábra.

A 16C-47 feladathoz.

16C-48 Egy göbbszimmetrikus test sűrűsége $r \leq R$ esetében $\rho = kr$, és $r > R$ esetén $\rho = 0$. (a) Határozzuk meg a test tömegét. (b) Határozzuk meg a gravitációs mezőt r függvényében az R sugarú gömbön belül és kívül.

16C-49 Egy vékony, M tömegű és R sugarú gömbhéj rögzítve van. A héjon a 16-22 ábra szerint kis lyuk van. A lyukon sugár irányban átfektetett egyenesen a héjtól R távolságban lévő kicsiny testet kezdősebesség nélkül elengedjük. A test ennek következtében (csak) a gömbhéjtól származó gravitációs erő hatására mozog. Mennyi idő alatt teszi meg a test az utat a lyuktól az átelles helyzetű A pontig?



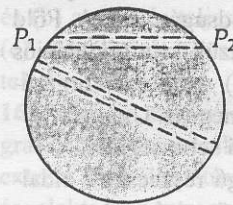
16-22 ábra.

A 16B-49 feladathoz.

16C-50 Képzeljünk el egy egyenesen a Föld középpontjáig fűrt lyukat! A lyukba kicsiny m tömegű testet ejtünk. A Föld forgásának és a súrlódás különböző forrásainak elhanyagolásával számítsuk ki a test sebességét a Föld középpontjába érkezés pillanatában.

16C-51 Tekintsük a Földet R sugarú, M tömegű homogén gömbnek! Az alábbi esetekben mutassuk ki, hogy

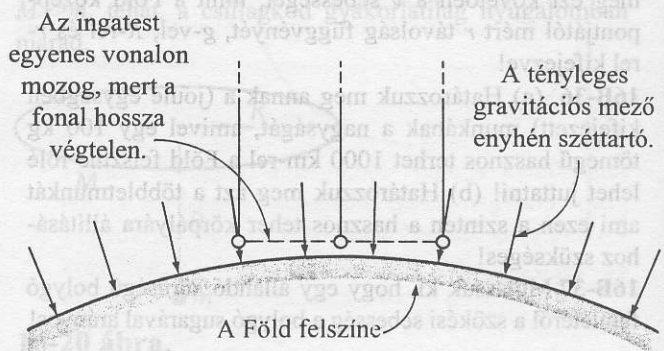
az m tömegű testre ható visszatérítő erő arányos az egyensúlyi helyzetétől mért kitéréssel, és hogy ezért a mozgás egyszerű harmonikus rezgőmozgás. Mutassuk meg, hogy mindegyik esetben a harmonikus rezgőmozgás T periódusideje azonos. Lásd a 16-23 ábrát! (a) A Földbe símafalú egyenes lyuk van fúrva az egyik átmérő mentén, és ebbe kicsiny m tömegű testet ejtenek. (A test ezt követően a Föld egyik oldalától a másikig egyszerű harmonikus rezgőmozgást végez.) (b) A Földbe símafalú egyenes lyukat fúrunk egy húr mentén (nem átmérő mentén) a felszín P_1 pontjától a felszín egy önkényesen választott másik P_2 pontjáig. A lyuk egyik végén m tömegű testet ejtenek be.



16-23 ábra.

A 16C-51 feladathoz.

16C-52 Tekintsük a Földet M tömegű, R sugarú homogén gömbnek! Mutassuk ki, hogy az alábbi három eset az előző feladat T periódusidejére vezet, ami azonos az előző feladatban meghatározott időtartammal. (a) A földfelszínen meglévő térerősségű homogén gravitációs mezőben kis amplitúdóval lengő, a Föld R sugarával egyező l hosszúságú ($l = R$) fonálinga; (b) egy lényegében végtelen hosszú fonálinga (16-24 ábra), amelynek ingatest a földfelszíni valóságos (tehát $1/r^2$ -tel arányos) gravitációs térben kis amplitúdóval leng; és (c) egy a Földet majdnem súroló körpályán keringő mesterséges hold, (feltételezve, hogy a pálya sugara a Föld sugarával egyenlő).

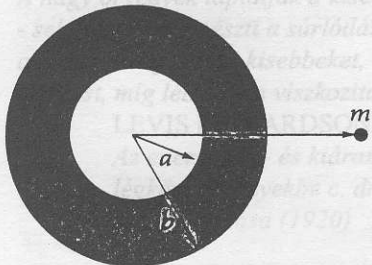


16-24 ábra.

A 16C-52 feladathoz.

16C-53 Egy test súrlódás nélkül egyenes pályán mozog (azaz a pálya nem követi a Föld görbületét). Ha a pálya vízszintes, akkor a test a pálya mentén ide-oda csúszik. Határozzuk meg kis amplitúdójú rezgésének periódusidejét.

16C-54 Homogén anyagból készített gömb közepében gömbalakú lyuk van (16-25 ábra). A gömbhéj tömege M , belső és külső sugara a , ill. b . Tekintsük a gömbhéj által az m tömegpontra gyakorolt $F(r)$ erőt, ha a tömegpontnak a középponttól mért r távolsága változik ($0 < r < \infty$). (a) Vázoljuk fel az $F(r)$ erőt r függvényében, és jelöljük be az $r = 0$, a és b pontokban (az adott paraméterekkel és G -vel kifejezett) egzakt értékeket! Az $a < r < b$ tartományban jelezzük, hogy a diagram vajon lineáris, konkáv, vagy konvex! (b) Készítsünk hasonló diagramot az $U(r)$ gravitációs potenciális energiára r függvényében, ahol $U(\infty) \equiv 0$!



A gömbhéj tömege M .

16-25 ábra.

A 16C-54 feladathoz.

16C-55 Képzeljük el, hogy a Föld (tömege M , sugara R) középpontjáig keskeny lyukat fúrtak úgy, hogy az m tömegpont radiálisan mozoghat a Föld belsejében. Ad-

juk meg a tömegpont $U(r)$ potenciális energiáját ($r < R$ esetre) mint r függvényét! (Javaslat: minthogy a Föld felszínén $U(R) = -GMm/R$, induljunk ki ebből,

felhasználva a $\Delta U = -\int F \cdot dr$ összefüggést. Azután számítsuk ki a Földnek azt az r ponthoz tartozó résztömegét, ami az m tömegpontra erőt gyakorol.)

16C-56 A Föld forgását és más bolygók jelenlétét nem tekintve számítsuk ki a Cape Canaveralból indított rakéta (Földre vonatkoztatott) szökési sebességét, ami elég ahhoz, hogy a rakéta elhagyja a Naprendszer! (Megjegyzés: mind a Földet, mind a Napot vegyük számításba.) Elfogadható-e a többi bolygóra vonatkozó feltételezésünk? Igazoljuk válaszukat!

16C-57 Egy R sugarú, és eredetileg M tömegű tömör homogén gömbbe átmérője mentén hengeres furatot készítettek. A kifúrt anyag tömege m . A henger tengelye mentén, a gömb középpontjától $2R$ távolságra kicsiny m tömegű test van elhelyezve. Határozzuk meg a testre ható gravitációs erőt! (Javaslat: a lyukfúrás lényegében kivonja a kifúrt (hiányzó) anyagtól származó erőt; lásd a 16-47 feladatot.)

16C-58 Egy ember a Föld felszínén guggoló helyzetből felugorva tömegközéppontját h magasságra tudja emelni. Számítsuk ki annak a legnagyobb (a Föld átlagsűrűségével azonos sűrűségű) kis bolygónak a sugarát, amelyről ez az ember ugyanilyen sebességgel felugorva elszökhetne, azaz elhagyná annak vonzáskörét.

Az anyagról általában azt mondják, hogy szilárd vagy folyékony állapotban van. Az a szó, hogy folyadék, a folyás (mozgás, áramlás) képességére utal, ezért magában foglalja mind a cseppfolyós anyagokat (ezek a köznapit értelemben vett folyadékok), mind a gázokat. Az anyag másik halmazállapotát, a nagy ionizáltságú, pozitív és negatív részecskéket azonos mennyiségben tartalmazó gázi plazmának nevezik. (A plazmát néha a folyadék, speciális típusának tekintik.) Az utóbbi időben a plazma tulajdonságait – a magfúziós reakciók szabályozhatóságára irányuló törekvés részeként – intenzíven kutatják.

Ez a széles osztályozás azonban túlságosan leegyszerűsíti a helyzetet. Bizonyos esetekben a folyadék és a gáz (vagy a folyadék és a szilárd anyag) között egyáltalán nem éles a határ. Néhány „szilárdnak” ismert anyagot, pl. az üveget, helyesebb nem teljesen megcsiszolt folyadéknak minősíteni. Nincs olyan szilárd anyag, ami tökéletesen meggyengít. Továbbá a szilárd anyagok nagy része jel-magkülönböztethető állapotokban létezik, különböző olvadásponttal, sűrűséggel és hajlítással. Pl. a szilárd szénnek három különböző módosítása van, és a jégnek hét különböző állapota létezik.

Az említett bonyolult kérdésekkel nem foglalkozunk a továbbiakban. Helyesebb az utóbbi folyadékok – az összenyomhatatlan és tökéletesen viszkozitásmentes folyadékok – viselkedését vizsgálni.

A világi folyadékok között a víz az, ami a legtöbbet foglalkoztatja az emberiséget. A víz viselkedését a leggyakrabban a leggyakoribb állapotok, azaz a szilárd, a folyékony és a gázi állapotok között vizsgálják.

XIV. Fejezet

- 14A-1 $2,2 \text{ m/s}^2$ felfelé
 14A-3 5 m/s^2
 14B-5 $g/2$
 14B-7 $11,7 \text{ m/s}^2$
 14B-9 a) $20,6^\circ$ b) 18 N
 14B-11 $5,5 \text{ N}$
 14A-13 $8,54$ fordulat per perc
 14A-15 $50,4$
 14B-17 délre 60° a vízszintes alatt
 14B-19 $\sqrt{g/R}$
 14B-21 a) a sugárirányban befelé mutató súrlódási erő $f_r = 4,00 \times 10^{-3} \text{ N}$
 b) a súrlódási erő és az $f_{cf} = 4,00 \times 10^{-3} \text{ N}$ centrifugális erő
 c) A korong rendszerében az a)-ban és b)-ben adott erő plusz az $f_{cor} = 8,00 \times 10^{-4} \text{ N}$ Coriolis erő, a bogár haladási irányától jobbra, valamint egy ugyanakkora tangenciális, balfelé mutató súrlódási erő komponens
 $f_i = 8,00 \times 10^{-4} \text{ N}$
 d) inerciarendszerben: csak a két súrlódási erő összetevő hat: $f_r = 4,00 \times 10^{-3} \text{ N}$ sugár irányban befelé és $f_i = 8,00 \times 10^{-4} \text{ N}$ érintőirányban a bogártól balra.
 14C-23 5 N/m
 14C-25 a) $3,17 \text{ m}$
 14C-27 $\text{tg } \theta$
 14C-29 $F/(M + 2m/7)$
 14C-31 A válasz adott.
 14C-33 $7,5 \text{ N}$ balra
 14C-35 a) 20 N sugár irányban kifelé
 b) 80 N sugár irányban kifelé
 c) 180 N sugár irányban befelé
 14C-37 a) nulla b) $m\omega^2 R$ befelé
 14C-39 A válasz adott.
 14C-41 a) $4m\omega v$ b) nyugat felé

XV. Fejezet

- 15A-1 a) $0,020 \text{ m}$ b) $0,942 \text{ m/s}$ a középpontban
 c) $17,8 \text{ m/s}^2$ a szélső helyzetekben
 15B-3 $0,0356 \text{ m}$
 15B-5 $4\pi^2 A/g$
 15B-7 a) $0,910 \text{ s}^{-1}$ b) $0,588 \text{ N}$
 15A-9 a) $0,50 \text{ s}$ b) $128 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ c) $1,5 \text{ m/s}$
 d) $18,9 \text{ m/s}^2$ e) 9 J f) $0,75 \text{ m/s}$
 g) $9,45 \text{ m/s}^2$
 15A-11 a) $1,19 \text{ Hz}$ b) $0,210 \text{ s}$ c) $0,784 \text{ N}$ lefelé
 15B-13 a) $8,17 \text{ cm}$ b) $1,42 \text{ s}^{-1}$

- 15B-15 a) $0,0280 \text{ J}$ b) $1,03 \text{ m/s}$ c) $0,0158 \text{ J}$
 d) $0,0123 \text{ J}$

- 15B-17 a) $0,10 \text{ m}$ b) $-0,0654 \text{ m}$ c) $0,262 \text{ s}$
 d) $0,0160 \text{ J}$ e) $0,0160 \text{ J}$

- 15A-19 a) $0,136 \text{ Hz}$ b) $7,37 \text{ s}$

- 15B-21 A válasz adott.

- 15A-23 $19,9 \text{ s}$

- 15B-25 $1,58 \text{ s}$

- 15B-27 $0,790 \text{ Hz}$

- 15B-29 a) $3,559 \text{ Hz}$ b) $3,554 \text{ Hz}; 1,38 \text{ s}$

- 15A-31 $1,104 \text{ cm}^3$

- 15A-33 952 N/m^2

- 15B-35 AY/L_0

- 15C-37 a) $3k, 1,5k$ b) $\sqrt{2}:1$

- 15C-39 4mg/l

- 15C-41 A válasz adott.

- 15C-43 A válasz adott.

- 15C-45 A válasz adott.

- 15C-47 $\pi b A^2 \omega$

- 15C-49 a) $0,149 \text{ m}$ b) 132°

- 15C-51 b) $(y/2)(\Delta L/L)^2$

XVI. Fejezet

- 16A-1 a) $3,32 \times 10^{-5} \text{ N}$ b) $5,92 \times 10^{-3} \text{ N}$

- 16A-3 $g/9$

- 16A-5 $35,0 \text{ N}$

- 16A-7 $30,3 \text{ km/s}$

- 16A-9 $2,41$

- 16B-11 $4\pi^2/Gm, 3,00 \times 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$

- 16B-13 a) $84,4$ perc b) $7,90 \text{ km/s}$

- 16B-15 $\frac{128}{81} G\pi^2 R^4 \rho^2$

- 16B-17 $8,74 \times 10^7 \text{ m}$

- 16B-19 $1,62 \times 10^{27} \text{ kg}$

- 16B-21 $1,91 \text{ Gm/l}^2$ az átmérő mentén ellentétes sarok felé

- 16A-23 A válasz adott.

- 16B-25 a) $1,32 \times 10^{12} \text{ m/s}^2$ b) $9,21 \times 10^{13} \text{ N}$

- c) $7,70 \times 10^{-11} \text{ J}$

- 16B-27 $\sqrt{(GM/R)(2-\sqrt{2})}$

- 16A-29 2380 m/s

- 16A-31 $4R/3$

- 16B-33 $3Gm^2/l$

- 16B-35 $\sqrt{2Rg(1+R/r)}$

- 16B-37 A válasz adott.

- 16B-39 A válasz adott.

- 16C-41 $\sqrt{125\pi/3G\rho}$

- 16C-43 b) $2\pi\sqrt{D^3/3GM}$

- 16C-45 b) $6,54 \times 10^{-3}$

- 16C-47 $Gm^2/3L^2$

- 16C-49 $2\sqrt{R^3/GM}$

16C-51 $T = 2\pi\sqrt{R^3/GM} = 84,5$ perc

16C-53 1,41 óra

16C-55 $\frac{GMm}{2R} \left[3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]$

16C-57 $\frac{Gm}{R^2} \left(\frac{M}{4} - \frac{m}{3} \right)$

XVII. Fejezet

17B-1 90,0%

17B-3 A válasz adott.

17A-5 250 N

17A-7 20 cm

17B-9 a) 5000 kg/m³ b) 667 kg/m³

17B-11 a) 2704 kg/m³ b) 59,8 N

17B-13 0,89 kg/dm³

17B-15 4,00 mg

17B-17 $\Delta V/V = 0,0830$

17A-19 $1,77 \times 10^{-3}$ m³/s

17A-21 40 cm/s

17B-23 $3,7 \times 10^4$ N/m²

17B-25 4,49 atm

17B-27 ρAv^2

17B-29 a) 7,67 m/s b) 2,80 mm

17B-31 A válasz adott.

17C-33 *allg*

17C-35 0,933

17C-37 $(1 - 1/\sqrt{2})$

17C-39 $(1 - 1/\sqrt{2})$

17C-41 A válasz adott.

17C-43 $T = 2\pi\sqrt{m/\rho Ag}$

17C-45 A válasz adott.

17C-47 27,3 cm³/s

17C-49 *H/2*

XVIII. Fejezet

18A-1 a) $2,27 \times 10^{-3}$ s b) 0,782 m

18A-3 A válasz adott.

18A-5 8,33 cm

18B-7 $A = 7 \times 10^{-4}$ m, $k = 3,14$ m⁻¹, $\omega = 6,28 \times 10^{-3}$ s⁻¹

18B-9 a) 1,27 Pa b) 170 Hz c) 2,00 m

d) 340 m/s

18B-11 18,56 m

18B-13 860 m

18A-15 $2,94 \times 10^{-16}$ J/cm³

18B-17 1,13 μ W

18B-19 A válasz adott.

18B-21 a) 565 Hz b) mélyülő hang

18A-23 2,07 N

18A-25 a) 515 Hz b) 4,13 cm

18A-27 a) 0,773 m b) 1,55 m c) 330 Hz d) 220 Hz

18A-29 870 Hz, 2610 Hz

18B-31 a) 34,8 m/s b) 0,977 m

18B-33 800 Hz

18A-35 19,9 m/s

18B-37 a) 1091 Hz b) 1100 Hz c) 1000 Hz

18A-39 28,4°

18B-41 5,64 Hz

18C-43 A válasz adott.

18C-45 3,14 m/s, $9,87 \times 10^3$ m/s²

18C-47 $K = 2,47 \times 10^{11}$ N/m²

$G = 1,25 \times 10^{11}$ N/m²

18C-49 b) $v = R\omega$

18C-51 a) +6,99 dB b) 2,24

18C-53 $\mu = 4,00 \times 10^{-3}$ kg/m, 2,50 cm hosszú

18C-55 12,6 m/s²

18C-57 60,0 Hz

18C-59 0,335 cm

XIX. Fejezet

19A-1 7,2 mm-t hozzá kell adni

19A-3 3×10^{-5} °C

19B-5 $2,17 \times 10^5$ N

19B-7 0,72 l

19A-9 6,44 kJ

19A-11 0,463 kJ/kg °C

19A-13 0,431 joule/ g °C

19A-15 0,122 kg

19B-17 0,126 kJ/kg °C

19B-19 87,5

19B-21 A válasz adott.

19A-23 557 J/s

19A-25 $1,38 \times 10^8$ J

19B-27 a) 290 g b) 42,9 g

19B-29 a) 8,44 kW b) 162 dollár

19A-31 5,00 W/m² °C

19B-33 2,84 J/s

19A-35 a) 61,1 kW-h b) \$3,67

19C-37 A válasz adott.

19C-39 a) 13,9 cm b) $2,6 \times 10^{-5}$ (C°)⁻¹

19C-41 8,0039 cm

19C-43 a) $\frac{T_2 k_1 \Delta x_2 + T_1 k_2 \Delta x_1}{k_2 \Delta x_1 + k_1 \Delta x_2}$

19C-45 A válasz adott.

19C-47 $3,52 \times 10^4$ s = 9,78 h

19C-49 A válasz adott.

19C-51 A válasz adott.

XX. Fejezet

20A-1 48,5 l

20A-3 a) 4,48 m³ b) 5,60 kg

20A-5 0,046 m³

20A-7 12,0 l

20A-9 $1,98 \times 10^5$ Pa