XLI. FEJEZET

A SPECIÁLIS RELATIVITÁSELMÉLET

Az igazi bajt Einstein okozta. 1905-ben bejelentette, hogy semmi sem lehet abszolút nyugalomban. Nos azóta nincs is.

STEPHEN LEACOCK

Newton, bocsáss meg nekem!

ALBERT EINSTEIN

41.1 Bevezetés

A fizikában a 20. század elején két forradalom is végbement, ami az Univerzumról alkotott fogalmainkat gyökeresen megváltoztatta. Az egyik több kutató sok évtizedre nyúló munkájának az eredménye volt, ez a kvantummechanika kialakulása. A másik a speciális relativitáselmélet megszületése[1], amely Albert Einstein 1905-ben közzé tett cikkétől számítható. Az Einstein-féle elmélet nemcsak látszólagos paradoxonokhoz vezetett, amelyekről úgy tűnik, hogy súlyosan ütköznek a józan ésszel, hanem a térrel és az idővel kapcsolatos alapvető fogalmainkat változtatta meg. Mai ismereteink szerint vitán felül áll, hogy mégis a speciális relativitáselmélet írja le azt, hogy milyen a világ.

A speciális relativitás megértési nehézségei nem matematikai természetűek. Sokkal inkább arról van szó, hogy a térről és az időről alkotott, mélyen begyökerezett fogalmainkhoz ragaszkodunk. A fizikai jelenségekre a newtoni koncepciók alapján adott magyarázatokkal nőttünk fel és zavar bennünket, hogy ezeket a fogalmakat el kell hagyni. Továbbá: a nyelvi fordulataink is a klasszikus fogalmakra épült józan észjárást tükrözik, és ez is hozzájárul azokhoz a nehézségekhez, hogy az új összefüggéseket átlássuk. Természetesen, a klasszikus gondolkodási mód nem lehet teljesen rossz, hiszen csodálatos szolgálatot tesz a mindennapi élet tapasztalatainak leírásában. De a természeti jelenségek legfinomabb részleteit vizsgáló kutatóknak fel kell hagyniuk a klasszikus fogalmak alkalmazásával és a korszerű elmélethez kell fordulniuk.

A relativitáselmélet alapkérdése a következő:

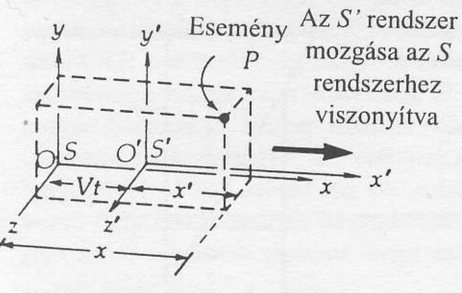
Ha egy jelenséget két különböző vonatkoztatási rendszerben vizsgálunk, amelyek egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek, akkor hogyan kell a két rendszerben végzett mérések eredményeit összehasonlítani?

[1] A speciális relativitáselmélet olyan vonatkoztatási rendszerekkel foglalkozik, amelyek egymáshoz képest egyenesvonalú állandó sebességű mozgást végeznek. Az általános relativitáselmélet, amit Einstein 1916-ban publikált, már gyorsuló vonatkoztatási rendszerekkel is foglalkozik. (lásd a 41. 16 pontot).

Einstein arra mutat rá, hogy a mérés végrehajtásában mindig arról van szó, *hol* és *mikor* történik valami a *térben* és az *időben*. Ezért a tér adott pontjában és adott időpontban végbemenő eseményre vonatkozóan négy mennyiséget keresünk:

Egy pontszerű esemény (x, y, z, t)

Ezt az (x, y, z, t) koordináta-négyest egy S-sel jelölt inerciarendszerben mérjük, melyről feltételezzük, hogy nyugalomban van. Egy másik S' vonatkoztatási rendszer, az előbbi S-rendszerhez képest állandó V sebességgel mozog a $+x$ irányban. Az egyszerűség kedvéért a két vonatkoztatási rendszert úgy választottuk, hogy a $t = 0$ időpontban az origóik és a tengelyeik egybeessenek (lásd a 41-1 ábrát). Az S-ben végrehajtott mérések jelölésére vesszőtlen, míg az S'-ben végrehajtottak jelölésére vesszővel (′) ellátott betűket használunk. Mindkét vonatkoztatási rendszer használata egyformán jogos és érvényes, bármelyikükben végzett mérések korrekt módon tükrözik a tér- és az idő-viszonyokat az adott vonatkoztatási rendszerben. Mindkét vonatkoztatási rendszer *inerciarendszer*, nem gyorsul egyikük sem. A relativitás elve szerint a vonatkoztatási rendszereknek csak a *relatív* sebessége fontos, nem pedig az, hogy melyik rendszert tekintjük nyugalomban lévőnek. Ugyanolyan jól el lehet képzelni, hogy nem az S, hanem az S' rendszer van nyugalomban. Ekkor az S' rendszerhez képest az S rendszer mozog $-V$ sebességgel (a negatív x' tengely irányában). Bármelyik inerciarendszert tekintjük is nyugvónak, a relativitáselmélet alapvető következtetései pontosan ugyanazok.



41-1 ábra

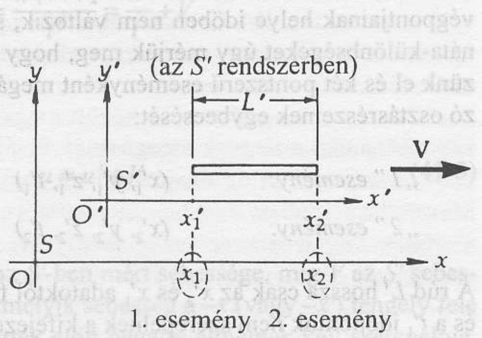
Az S és az S' koordinátarendszer. Az S' az S x-tengelye mentén $+V$ sebességgel mozog. A koordinátarendszerek a $t = t' = 0$ időpontban egybeestek: közös volt az origójuk. Későbbi t időpontban az O és az O' origók Vt távolságra vannak egymástól akkor, amikor a P esemény bekövetkezett.

Hogyan kell a méréseket elvégezni?

Alapvetően minden mérés pontszerű és pillanatszerű események négy adatának, az (x, y, z, t) koordináta-négyeseknek a meghatározására vezethető vissza. Einstein szerint gondolatban az egész vonatkoztatási rendszerre méterrúd-hálózatot kell fektetni, amelynek minden pontján egy „megfigyelő" helyezkedik el. Mindegyik megfigyelőnek saját, a rendszer többi órájával szinkronizált órája van. *Minden eseményt annak a helyi (lokális) megfigyelőnek kell észlelnie, aki ott helyezkedik el, ahol az esemény végbemegy.* Az esemény (x, y, z) térbeli koordinátáit a szomszédos méterrúdhálózati elemekkel való összehasonlítással lehet meghatározni, míg a t idő a helyi megfigyelő óráján olvasható le. Minthogy minden mérés lokális esemény, ezért szóba sem jön, hogy egy távoli eseménytől a megfigyelőig eljutó jel terjedési idejét figyelembe kellene venni. A relativitási elv következményei azonban még akkor is ugyanazok lennének, ha ilyen eseteket megengednénk.

41.2 A Galilei-transzformáció

A klasszikus szemlélet szerint feltesszük, hogy a térbeli távolságok és az időintervallumok mérése minden inerciarendszerben ugyanarra az eredményre vezet. Valójában ez az az alapfeltevés, amelyen a newtoni mechanika alapul. Ez a 'józan ésszel' összhangban van. A newtoni mechanika minden inerciarendszerben kielégítő mértékben érvényes (ezt bárki, aki utazott már simán mozgó repülőgépen, tanúsíthatja is). Másképpen fogalmazva, nincs mechanikai hatás, amellyel az S-ben, ill. S'-ben lévő megfigyelők el tudnák dönteni, melyik vonatkoztatási rendszer van „igazán nyugalomban", melyik „mozog igazán". Ezt a tényt fogalmazza meg **Galilei relativitási elve**: *Newton mechanikájának törvényei minden inercia-rendszerben ugyanolyanok.*



41-2 ábra
Az S vonatkoztatási rendszerben az a két esemény, amely meghatározza a mozgó rúd két végpontjának a helyzetét (x_1-ben, ill. x_2-ben), egyidejűleg bekövetkező események.

Ha ezek a feltevések igazak, akkor hogyan lehet egy eseménynek az S rendszerben és az S' rendszerben mért adatai között kapcsolatot teremteni[2]? A 41-1 ábrán ábrázolt P eseményre, egyszerű geometriai megfontolások alapján meg lehet határozni a két adategyüttes közti kapcsolatot. Ezeket a kapcsolatokat **Galilei-transzformációnak** nevezzük.

A GALILEI - TRANSZFORMÁCIÓ

$$x = x' + Vt' \qquad x' = x - Vt$$

$$y = y' \qquad y' = y \qquad (41\text{-}1)$$

$$z = z' \qquad z' = z$$

$$t = t' \qquad t' = t$$

A transzformációsképletek körülbelül olyan szolgálatot teljesítenek, mint az idegen nyelv szótára, ezek fordítják le az eseménynek az egyik rendszerben megmért (x', z', z', t') adatait ugyanazon eseménynek a másik rendszerben megmért (x, y, z, t) adataira, és megfordítva. Vegyük észre, hogy a bal oldali képletsorban vesszős mennyiségek csak az egyenlőségjel jobb oldalán, a jobb oldali képletsorban pedig csak az egyenlőségjel bal oldalán szerepelnek. Ezek a transzformációs képletek sokat tartalmaznak a térről és időről alkotott alapfeltevéseinkből. Így például az a tény, hogy a $t = t'$ egyenlőséget felírjuk, azt vonja maga után, hogy minden inerciarendszerre univerzális (vagy abszolút) időskála van érvényben. Hasonlóképpen a képletekből az is következik, hogy az a tér, amelyben az események végbemennek, ugyanaz mindkét vonatkoztatási rendszer számára. Az x-koordináták képletében megjelenő eltérés világosan mutatja, hogy ennek eredete a vonatkoztatási rendszerek relatív (viszonylagos) mozgásában van, és nem következik belőle az, hogy maga a tér lenne különböző a két vonatkoztatási rendszer számára. Ezek a klasszikus elgondolások a térről és az időről szorosan összefüggenek, és annyira a tapasztalatban gyökereznek, hogy lehetetlennek látszik azt képzelni, hogy nem lennének helyesek. Valóban, a filozófusok két évszázadon át vita nélkül elfogadták őket. Annál inkább figyelemre méltó az a forradalmi változás, amit Einstein okozott, amikor relativitáselméletében megmutatta, hogy a klasszikus elgondolások nem helyesek.

A transzformációs képletek használatának bemutatása érdekében vizsgáljunk egy rudat az S' rendszerben és határozzuk meg a hosszát mind az S', mind az S rendszerben![3] A rúd feküdjék az x'-tengely mentén, ahogyan a 41-2

[2] Vegyük észre, hogy *az események a térben és az időben történnek*, nem pedig egyik, vagy másik vonatkoztatási rendszerben. *Bármely* vonatkoztatási rendszer felhasználható arra, hogy – erre a rendszerre vonatkoztatva – meghatározzuk az esemény négy adatát.

[3] Amikor a relativitásról olvasunk, lényeges mindenkor észben tartani, hogy melyik vonatkoztatási rendszert használjuk. A vesszőknek rendkívüli fontosságuk van!

ábrán látszik. A rúd hosszát $L' = x'_2 - x'_1$ alakban definiáljuk. Minthogy a rúd végpontjainak helye időben nem változik, szokásos módon ezeket a koordináta-különbségeket úgy mérjük meg, hogy a rúd mellé mérővonalzót helyezünk el és két pontszerű eseményként megállapítjuk a végpontok és a vonalzó osztásrészeinek egybeesését:

„1" esemény: (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1)

„2" esemény: (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2)

A rúd L' hossza csak az x'_2 és x'_1 adatoktól függ. Figyelemre méltó, hogy a t'_2 és a t'_1 időpontok nem szerepelnek a kifejezésben.

Az S rendszerben azonban a rúd mozog. Vizsgáljuk meg az $x'_2 - x'_1$ mennyiséget az S-ben mért adatok segítségével kifejezve. A Galilei-transzformáció (41-1) képleteit alkalmazva adódik:

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - Vt_2) - (x_1 - Vt_1)$$

vagy a jobb oldali kifejezés átrendezésével

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1) - V(t_2 - t_1) \tag{41-2}$$

Itt az $(x_2 - x_1)$ mennyiség a rúdnak az S rendszerben mért hossza. Nyilvánvalóan nem volna sok értelme annak, hogy a rúd egyik végének helyét a t_1 időpontban határozzuk meg, a másik végéét pedig a t_2 időpontban, a rúd elmozdulása után. Ezért az S-rendszerben elfogadjuk a végpontok egyidejű helymeghatározásának eljárását, amikor is $t_2 = t_1$. Ennélfogva (41-2)-ből adódik, hogy

$$x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1$$

vagy $$L' = L$$

Mozgó tárgy végpontjait egyidejűleg kell összevetni a mérőrúddal, ezért az S-ben mért hosszúságok (ahol a tárgyak mozognak) megfelelnek az S'-ben mért hosszúságoknak, (ahol a tárgyak nyugalomban vannak). A Galilei-féle relativitás szerint ezek a hosszmérések ugyanazt az eredményt szolgáltatják. Einstein arra mutatott rá, hogy ez a következtetés helytelen.

Sebességösszeadás a Galilei-féle relativitás szerint

Tegyük fel, hogy abban a $t = t' = 0$ időpontban, amikor az S és az S' vonatkoztatási rendszerek egybeesnek, egy részecske halad át az origón, és a $+x$ (ill. $+x'$) tengely mentén állandó u' sebességgel mozog tovább (az S'-ben mérve). A sebességösszeadás képletét megkaphatjuk, ha a következő két eseményt tekintjük:

		S-ben	*S'-ben*
ELSŐ ESEMÉNY	*Részecske az origóban*	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)
MÁSODIK ESEMÉNY	*Részecske az origón túl*	$(x,0,0,t)$	$(x',0,0,t')$

Az S' rendszerben a t' idő alatt a részecske x' utat tesz meg állandó u' sebességgel, így $u' = x'/t'$. Az S' rendszer azonban maga is mozog az S rendszerhez viszonyítva a $+x$ irányban állandó V sebességgel. Ez a mozgás adja azt a második sebességet, amit a részecske első u' sebességéhez hozzá kell adnunk, hogy megkapjuk a részecske S-ben mért u sebességét. Az S-ben a részecske sebessége $u = x/t$. Felhasználjuk a Galilei-transzformációt, hogy kifejezzük ezt a sebességet a vesszős mérési adatokkal:

$$u = \frac{x}{t} = \frac{x' + Vt'}{t'} = \frac{x'}{t'} + V$$

De mert $x'/t' = u'$, adódik

GALILEI FÉLE SEBESSÉG-ÖSSZEADÁS ($\pm x$ tengely-menti sebességekre)

$$u = u' + V \tag{41-3}$$

Itt u a részecskének az S-ben, u' az S'-ben mért sebessége, míg V az S' sebessége az S-hez viszonyítva. Ha bármelyik sebesség a $-x$ (vagy $-x'$) tengely felé irányul, akkor a megfelelő számérték előtt negatív előjelnek kell szerepelnie. Ez ugyanaz az összefüggés, mint amit a 9.4 pontban már levezettünk.

41-1 PÉLDA

Egy gyerek a mozgó vonat folyosóján 2 m/s sebességgel labdát gurít a vonat eleje felé. a) Mekkora a labda sebessége a talajhoz rögzített vonatkoztatási rendszerből nézve, ha a vonat egyenes pályán állandó 5 km/s sebességgel halad? b) Mekorra a labda sebessége a talajhoz rögzített rendszerben, ha a gyerek a labdát a vonat vége felé gurítja?

MEGOLDÁS

a) A vonatot választjuk S' vonatkoztatási rendszernek, a talajt S rendszernek, a $+x$, ill. $+x'$ tengelyek a vonat haladási irányába esnek. Az S'-ben a labda sebessége $u' = 2$ m/s. Így

$$u = u' + V = 2\,\mathrm{m/s} + 5\,\mathrm{m/s} = 7\,\mathrm{m/s}$$

b) Ebben az esetben $u' = -2$ m/s, így

$$u = u' + V = -2\,\mathrm{m/s} + 5\,\mathrm{m/s} = 3\,\mathrm{m/s}$$

A számérték pozitív, így a labda sebessége a $+x$ irányába mutat.

A gyorsulások transzformációs képleteinek meghatározásához a (41-3) összefüggést differenciálni kell az idő szerint:

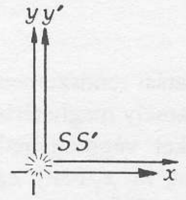
$$\frac{du}{dt} = \frac{du'}{dt} + \frac{dV}{dt}$$

Minthogy V állandó, adódik, hogy

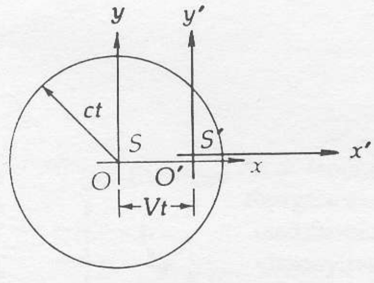
$$a = a' \tag{41-4}$$

Így a részecske gyorsulása minden inerciarendszerben (melyek egymáshoz képest mozoghatnak is) ugyanaz az érték. A klasszikus fizikában a részecske m tömegét nem befolyásolja a mozgás, így $ma = ma'$, s ez a $\Sigma F = ma$ összefüggéshez vezet. A newtoni fizika további kijelentései tehát mind S-ben, mind S'-ben, azaz minden inerciarendszerben érvényesek lesznek. Ahogyan azt már a korábbi fejezetekben megmutattuk, az energia és az impulzus megmaradására vonatkozó alapvető tételek a Newton-féle mozgástörvények közvetlen következményei, így arra a következtetésre jutunk, hogy a mechanika minden törvénye minden inerciarendszerben érvényes. Ezt a megállapítást szokás **Galilei-féle relativitási elvként** idézni. Bár a sebesség, az impulzus és a mozgási energia értékei a különböző – egymáshoz képest egyenletesen mozgó – inerciarendszerekben különbözőek lesznek, a mechanika törvényei azonban minden inerciarendszerben ugyanolyanok. Ezt a tulajdonságot úgy fejezzük ki, hogy a „mechanika alapvető törvényei invariánsak a Galilei-transzformációval szemben".

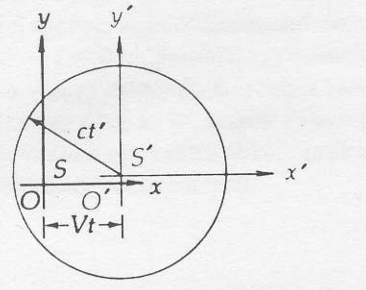
A normális körülmények között megkívánt pontosság erejéig a klasszikus mechanika a tárgyak mozgásának kiváló leírását adta. Mérnökök és kutatók évszázadokon át alkalmazták és fogják is alkalmazni. Mióta azonban Maxwell az 1860-as években kiépítette az elektromágnesség elméletét, felmerültek bizonyos problémák, amelyekre addig nem is tudtak megoldást találni, míg Einstein egy merészen új megközelítéssel nem próbálkozott. A nehézség főként abból származott, hogy a Maxwell-egyenletekből meghatározott sebesség adódott a fényhullámok terjedési sebességére: $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 3\times 10^8$ m/s. A 19. század végén a fényt elektromágneses hullámnak tekintették, ami az éternek nevezett közegben terjed. Ha ez helyes elképzelés lett volna, akkor a fény nem terjedhetett volna minden inerciarendszerben (amelyek közül számosan mozognak az éterhez képest) ugyanazzal a sebességgel[4]. Einsteint aggasztotta, hogy a Maxwell-egyenletek nem invariánsak a Galilei-transzformációval szemben. Einstein, filozófiai okokból meg volt győződve arról, hogy a relativitás elve nemcsak a mechanikára, hanem szükségképpen minden fizikai törvényre érvényes. Valóban furcsa lenne, ha a mechanika ebből a szempontból a fizika többi részétől elkülönülne.



a) $t = t' = 0$ időpontban felvillan egy lámpa, amikor az O és O' origók egybeesnek.



b) Egy későbbi t időpontban az S vonatkoztatási rendszerben a táguló, kifutó hullámfront középpontja az O origó. Az S' vonatkoztatási rendszer a $+x$ irányban Vt távolságra jutott.



c) Az S' vonatkoztatási rendszerben a későbbi t' időpontban a táguló gömbszerű hullámfront középpontja az O' origó. Az S vonatkoztatási rendszer origója a $-x$ irányban Vt' távolságot tett meg.

41-3 ábra
Az un. táguló fénygömb „paradoxon". Az egyes vonatkoztatási rendszerekben ülő megfigyelők ugyanazt a kifelé terjedő hullámfrontot mérik, és mindnyájan úgy találják, mintha a fénygömb saját vonatkoztatási rendszerük origójukból indult volna ki. Ez azonban nem paradoxon a speciális relativitás új tér és időfelfogása tükrében.

41.3 A speciális relativitáselmélet alapposztulátumai

Einstein a relativitáselméletet a következő két feltevésre alapozta:

A SPECIÁLIS RELATIVITÁS ALAPPOSZTULÁTUMAI

(1) **A fizika minden törvényének ugyanaz a matematikai alakja minden inerciarendszerben.** *(A relativitás elve)*

(2) **A vákuumbeli fénysebesség értéke ugyanaz minden inerciarendszerben.** *(A fénysebesség állandóságának elve)*

Ebből a két alapfeltevésből a teljes speciális relativitáselmélet levezethető. Az alapfeltevések egyszerűsége és általánossága jellemző Einstein zsenialitására. Ezen feltevések következményeként mutatta ki Einstein, hogy a newtoni mechanika csak közelítőleg helyes, csak azokban az esetekben használható, amikor a sebességek a fény sebességéhez képest kicsik. Ténylegesen az Einstein-féle relativisztikus mechanika határesetben (ha $v \ll c$) visszaadja a newtoni mechanikát.

Az első posztulátum nagyon ésszerű és minden aggály nélkül elfogadható. Ezzel szemben a második posztulátum következményei olykor abszurdnak látszanak. Így például tegyük fel, hogy abban a pillanatban, amikor a két vonatkoztatási rendszer origója O és O' egybeesik, az origóban felvillan egy lámpa (41-3 ábra). Ha a fény sebessége minden vonatkoztatási rendszerben ugyanakkora (c), akkor egy későbbi időpontban mindkét rendszerbeli megfigyelő azt állapítaná meg, hogy a táguló gömbhullámfront középpontja saját rendszerének origója. *Bár mindkét megfigyelő ugyanazt a táguló hullámfrontot észleli, mégis mindketten úgy találják, hogy az saját rendszerük origójából, mint középpontból indul ki.*

[4] Az éteren keresztül végbemenő mozgás (vagy ami ezzel egyenértékű: a megfigyelő mellett fújó „éterszél"), végeredményben két, egymásra merőleges út mentén különböző fénysebességekhez kell, hogy vezessen (a mozgás irányában más értékre, mint arra merőlegesen).

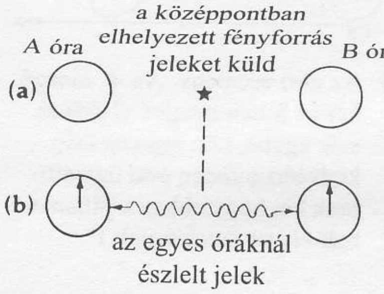
Ebben a fejezetben meggyőzzük az olvasót, hogy ténylegesen ez a valódi helyzet és a megállapítás nem paradoxon.

Most pedig megvizsgáljuk a relativitáselmélet néhány fontos következtetését, különösen a tér és az idő tekintetében. Önmagukban véve ezek a következtetések paradox jellegűek és a józan észnek ellentmondanak. De ha a speciális relativitáselmélet összes következményét együtt vesszük tekintetbe és képesek vagyunk a newtoni abszolút idő fogalmat feladni, akkor olyan összefüggő és kielégítő elméletet kapunk, amelyet a kísérleti bizonyítékok elsöprő sokasága igazol. S természetesen bármely elmélet végső próbája a kísérlet. Einstein egyszer így kommentálta azt, hogy a relativitás ellentétben áll mindazzal, amit a józan ész diktál, „A józan ész az előítéleteknek az a rétege, ami 18 éves korunk előtt rakódott le tudatunkban."

41.4 Az órák szinkronizálása

Einstein rámutatott arra, hogy az események mérések során az (x, y, z,) koordinátákat helyi megfigyelő, aki ott helyezkedik el, ahol az esemény történik, határozza meg a méterrúd hálózattal, ugyancsak ő méri a t időt a helyi órával (ami a rendszer összes órájával szinkronizálva van) való összehasonlítással. Elvben *az összes mérésnek ezen a módon kell végbemennie.* Most a vonatkoztatási rendszer különböző helyein lévő órák szinkronizálását vizsgáljuk. Ennek a szinkronizálásnak sokkal nagyobb a jelentősége, mint első pillantásra gondolnánk, mert ez a forrása a relativitás sok „paradoxonának".

Nem szinkronizálhatjuk ugyanis az órákat oly módon, hogy azonos helyen egyszerre elindítjuk, majd végleges helyükre visszük őket, mert az idődilatációnak nevezett jelenség miatt, amit hamarosan tárgyalni fogunk, az órák szállításuk során elveszthetik szinkronitásukat. Ehelyett – Einstein javaslata szerint – a 40-4 ábrán bemutatott eljárást alkalmazzuk, ami a c fénysebesség állandóságát használja. Miután az órákat a megfelelő helyen elhelyeztük, egy villanólámpa – az órák között középen – felvillan és jeleket küld a két irányba. A fényjeleknek ugyanakkora időre van szükségük az egyenlő utak megtételére. Az órákat úgy kell beállítani, hogy a fényjelek beérkezésekor ugyanazt az időt mutassák. Ezt az alapvető szinkronizációs módszert elvben ki lehet terjeszteni egymás után az adott vonatkoztatási rendszer valamennyi órájára. A szinkronizált órák egész rendszere olyan időskálát valósít meg, melynek segítségével egymástól távol végbemenő események egyidejűségét a választott vonatkoztatási rendszerben el lehet dönteni. Ily módon a fény sebessége sokkal alapvetőbb annál, hogy csak egy legyen a természeti állandók közül. Pontosabban fogalmazva: a fénysebesség szoros összefüggésben van az idővel és az egyidejűséggel kapcsolatos fogalmainkkal.



41-4 ábra

Két, egymástól távol levő óra szinkronizálása. A középpontban lévő villanólámpa felvillanása fényjelet küld mindkét óra felé. Ha az órák úgy vannak beállítva, hogy a jelek beérkezésekor ugyanazt az időt mutatják, akkor helyesen vannak szinkronizálva.

41.5 A Lorentz-transzformáció

Einstein a Galilei transzformáció helyett új transzformációs képletrendszert vezetett le. Ennek a transzformációnak ugyanaz az alakja, mint a korábban H. A. Lorentz által levezetett összefüggésnek, ezért **Lorentz-transzformációnak** nevezzük.[5] Einstein azonban ezt a transzformációt egészen más gondolatmenettel vezette le, s ezeknek a transzformációs képleteknek az értelmezése is lényegesen eltér attól, amit Lorentz fűzött hozzájuk. A levezetés

[5] Az 1. FÜGGELÉK a Lorentz-transzformáció egyszerűsített levezetését ismerteti.

a relativitás második alapfeltevésére épít és a tér és az idő homogenitására vonatkozóan néhány egyéb feltevést használ fel, nevezetesen azt, hogy a tér valamennyi pontja egyenértékű. A matematikai alak egyszerűsítése érdekében bevezetjük a $\beta \equiv V/c$ jelölést, ahol V a két vonatkoztatási rendszer relatív sebessége az x-tengely mentén.

A LORENTZ-TRANSZFORMÁCIÓ (ahol $\beta \equiv V/c$)

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$y = y' \qquad y' = y \tag{41-5}$$
$$z = z' \qquad z' = z$$
$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Figyeljük meg, hogy a transzformációs képletek két oszlopa a műveleteket éppen fordítva hajtja végre. Bármelyik képletcsoportot a másikból úgy kapjuk meg, hogy a vesszős és a vesszőtlen mennyiségeket egymással felcseréljük és egyidejűjeg V és β előjelét az ellenkezőjére változtatjuk. (Az S-ben lévő megfigyelők számára a másik mozgó vonatkoztatási rendszer sebessége $+V$, az S'-ben levők szerint az S sebessége $-V$. Ebből adódik az előjelváltás.)

A Lorentz-transzformációnak van egy érdekes tulajdonsága. Ha a mozgó vonatkoztatási rendszer V sebessége sokkal kisebb, mint c, akkor a β szorzó zérushoz tart, és a Lorentz-transzformáció a Galilei-transzformációval azonossá válik. Így a klasszikus relativitás csak speciális esete a sokkal átfogóbb jellegű, Einstein-féle speciális relativitáselméletnek.

Most néhány speciális részletkérdést tárgyalunk. Figyeljük meg, hogy a levezetések pusztán Einstein két szokatlan posztulátumát (ill. az ezeket kifejező Lorentz-transzformációs összefüggést) használják új elemként. Minden meglepő következtetés, amire jutunk, már implicite benne foglaltatik ebben a két alapfeltevésben. Ezek igazolása kapcsolatos azzal a hatalmas sikerrel, amelyet a speciális relativitáselmélet a fizikai jelenségek magyarázatában aratott.

41-5 ábra
Einstein, amint éppen egy új vonatkoztatási rendszert élvez 1936-ban.

Albert Einstein

1900 és 1927 között két nagy forradalom ment végbe a fizikában: a kvantummechanika és a relativitáselmélet megszületése. Az előbbi sok fizikus (közöttük Einstein) eredményeiből nőtt ki, míg a relativitáselmélet egyedül Einstein alkotása volt, olyan kimagasló szellemi teljesítmény, amely csak Newton művével mérhető össze.

Albert Einstein Ulmban született 1879-ben, Maxwell halálának évében. Édesapjának kis elektrokémiai műhelye volt. Einstein három éves korában kezdett, és csak kilenc éves korára tanult meg folyamatosan beszélni. Nagyon idegenkedett a német iskolákban oly általános vasfegyelemtől és a tekintélyelvű tanítási módszerektől. Rokonai azt mondták, sohasem fogja sokra vinni az életben, középiskolai tanárai jelenlétét „káros hatásúak" tekintették és eltanácsolták az iskolából. A nyilvános iskolát 15 éves korában el is hagyta. Mégis ez alatt az idő alatt mélyen érdeklődött a geometria, az algebra és az analízis iránt, e tárgyakat önszántából szorgalmasan tanulta. Egy éves észak-olaszországi barangolás után 16 éves korában (az átlagos jelentkezőknél két évvel fiatalabb korban) felvételi vizsgát tett a zürichi Szövetségi Műszaki Főiskolán, (ETH) mely európai hírű műegyetem volt. A vizsga nem sikerült a modern nyelvekben, zoológiában és biológiában mutatkozó hiányosságai miatt. Visszatérve a középiskolai tanulmányaihoz, hogy megszerezze az érettségi bizonyítványt és egy barátja segítségével elmélyüljön egyes tantárgyakban, kis idő múlva megismételte a felvételi vizsgát, most már sikerrel, mert felvették. Látszólag közömbös tanuló volt, akit nem lelkesítettek a tanmenet régi vágású tantárgyai, az órákra nem járt rendszeresen, ehelyett sok időt töltött a környék kávéházaiban. Viszont sokat gondolkodott a fizikáról és ezalatt az idő alatt önerőből megtanulta Maxwell elektromágneses elméletét. 1900-ban szerzett oklevelet, minden különösebb dicséret nélkül.

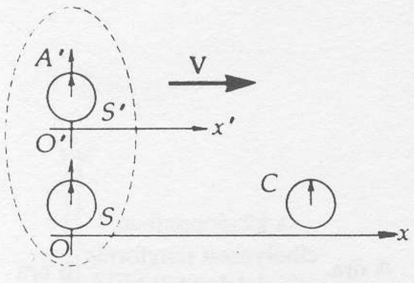
Talán Einstein közepes egyetemi bizonyítványának köszönhető, hogy nem került azonnal oktatói állásba, amit pedig kívánt. Miután sikertelenül próbálkozott abból megélni, hogy gyenge diákokat korrepetált, egy barátja segítségével Bernben a Szabadalmi Hivatalban jutott álláshoz. Ez igénytelen állás volt szerény fizetéssel, viszont bőségesen hagyott számára szabadidőt, ami saját intellektuális kedvteléseinek szentelhetett. A következő nyolc év során Einstein igen figyelemreméltó fizikai eredményekkel jelentkezett. Bár a szakmai környezet gondolatébresztő és serkentő hatásaitól el volt szigetelve, elkészítette doktori értekezését és több tanulmányt tett közzé a statisztikus mechanika, valamint a molekuláris mozgás tárgykörében. Az 1905-ös esztendő valóban határkő volt, ebben az évben jelentette meg négy korszakalkotó értekezését a fényelektromos jelenségről, a Brown-mozgásról és a speciális relativitáselméletről. Kétséges háttere ellenére a tudományos világ kezdte értékelni Einstein tudományos tevékenységét. Hamarosan számos egyetemre hívták professzori állás betöltésére, ezek közül a zürichi, majd a prágai megbízásnak tett eleget. Végül a Berlini Egyetemmel kötött rendkívül előnyös szerződést, ami nem járt rendszeres kötelezettségekkel.

1916-ban Einstein nyilvánosságra hozta általános relativitáselméletét. Ennek az elméletnek az elfogadását, az elvont matematikai megfogalmazás egészen addig késleltette, amíg az egyik jóslatát – a fénysugár elhajlását a Nap erős gravitációs erőterében – egy angol fizikusokból álló kutatócsoport 1919-ben ténylegesen meg nem figyelte. Ezután Einstein tekintélye nagyon megnőtt a szakmai körök és a nagyközönség előtt is (a közönség számára Einstein volt a szórakozott professzor tökéletes mintaképe, akinek az elméleteit – mint írták róla akkor – az egész világon csak hét ember képes megérteni). 1921-ben fizikai Nobel-díjjal tüntették ki – nem a relativitás elméletért (!), hanem a fényelektromos hatás értelmezésében szerzett érdemeiért.

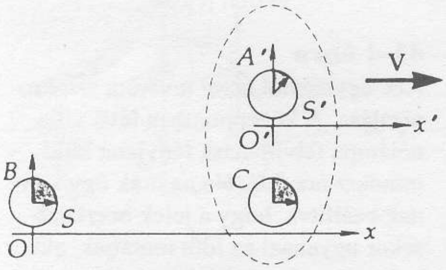
Einstein közismert volt meleg, nagylelkű személyiségéről és szelíd humoráról. Kitűnő muzsikus volt, gyakran játszott hegedűn és zongorán. Mozart és Bach volt kedvenc zeneszerzője. Ugyanakkor intellektuális kérdésekben egy bulldog szívósságával állhatatosan kereste a természet leírásában az egyszerűséget és az egységet. Vonzalma az egyszerűség iránt, a csak a lényegre való koncentrálás tekintetében a magánéletben is következetes volt, ruházatában és viselkedésében is.

Sajnos a politikai események, – az I. Világháború, a nacionalizmus megerősödése, a nácik megjelenése – jelentős hatással voltak Einstein életére. Amikor Franciaországban és Angliában a meghívásoknak eleget téve előadókörútra indult, sok esetben bojkottálták előadásait azok a professzorok, akiknek nacionalista érzelmei elnyomták a tudományos érdeklődést. Minthogy Einstein zsidó volt és meggyőződéses pacifista, aki megtagadta a német háborús erőfeszítések támogatását, céltáblájává vált a nácik antiszemitizmusának. Hírneve egy ideig még védte őt, de 1933-ban elhatározta, hogy az Egyesült Államokba emigrál. Néhány év múlva Princetonban az Institute for Advanced Study professzoraként telepedett le. Itt folytatta kutatómunkáját az egyesített térelmélet kidolgozásán, melynek során (sikertelenül) próbálkozott a gravitációt és az elektromágnességet egységes (geometriai) elméletté kovácsolni.

Késői éveiben Einstein nagy figyelmet szentelt pacifista eszméknek és a cionista mozgalomnak, foglalkozott a világ-kormány gondo-



a) Az első esemény. Az A' mozgó óra az S-ben nyugvó B órával esik egybe. (Az egyszerűség kedvéért minden órát úgy állítunk be, hogy ebben a pillanatban zérust mutassanak.)



b) A második esemény. Az A' mozgó óra az S-ben nyugvó C órával esik egybe.

41-6 ábra
Két esemény, melyet az S-ben figyelünk meg, s amelyekkel az A' mozgó óra ütemét mérjük meg, az S-ben nyugvó, szinkronizált B és C órákkal való összehasonlítás során.

latával, szociális és politikai kérdésekkel is. Az emberi szabadság ügyének szenvedélyes és félelmet nem ismerő szószólója volt. Sokan naivnak látták, de őszinteségében mindenki hitt. Gyakran zavarba hozták és elszomorították az emberek és a politikai élet ellentmondásai. 1939-ben az európai agresszió növekedésekor és a német uránhasadási kísérletek eredményeiről értesülve nevét adta ahhoz a levélhez, melyet Roosevelt elnökhöz intéztek az atombombát előkészítő kutatások sürgős megkezdése érdekében. A háború után, amikor egy japán újságban szemére vetették, hogy ebben az ügyben elkötelezte magát, ezeket írta: „Vannak olyan körülmények, amikor, azt hiszem, helyén való az erő alkalmazása, nevezetesen olyan ellenséggel szemben, aki az én elpusztításomra és népem elpusztítására törekszik."

Einstein 1955-ben hunyt el. Legnevezetesebb hagyatéka, a relativitáselmélet fogalomalkotása, új egységes szempontokat adott az Univerzum megértéséhez.

41.6 Az órák összeigazítása

Hogyan határozzuk meg a mozgó óra járást? A mozgó órát nem hasonlíthatjuk össze egy adott pillanatban csak úgy egyszerűen egy olyan másik órával, amely nyugszik; az összehasonlítás szükségképpen két esemény közti időintervallum mérését kívánja meg. A 41-6 ábra mutatja, hogy ez mit jelent a „mi" vonatkoztatási rendszerünkben, az S rendszerben. A méréshez három órát kell alkalmazni. Az A' óra az S' rendszerben nyugalomban van. Adott pillanatban ez az óra az S rendszerben nyugalomban levő B óra mellett halad el. Ez az egybeesés az első esemény. Mindkét vonatkoztatási rendszerben az órák mellett lévő megfigyelők olvassák le az órák által mutatott t_1, ill. t'_1 időpontot. A második esemény később következik be, amikor a mozgó A' óra egy másik, az S rendszerben szintén nyugalomban levő C órával esik egybe. Itt ismét az események bekövetkezésének helyén lévő megfigyelők olvassák le az órák által mutatott t_2, ill. t'_2 időpontokat. A két esemény közti időintervallum

$$T = t_2 - t_1 \qquad \text{(az } S \text{ rendszerben)}$$

illetve

$$T' = t'_2 - t'_1 \qquad \text{(az } S' \text{ rendszerben)}$$

A két időintervallum nem ugyanaz! A Lorentz-transzformáció (41-5) képleteit használva megállapíthatjuk, hogy a két intervallum közti kapcsolat:

$$T = t_2 - t_1 = \frac{\left(t'_2 + \dfrac{Vx'_2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\left(t'_1 + \dfrac{Vx'_1}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Az S'-rendszerben a két esemény ugyanazon az $x'_2 = x'_1$ helyen ment végbe, ezért a fenti kifejezés átalakul:

$$T = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{T'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

A $T' = t'_2 - t'_1$ időintervallumot az S'-ben *egyetlen* óra mérte (ellentétben a T időintervallummal, amit az S-ben *két különböző* óra mért meg). Miként azt a 41.9 pontban majd megmutatjuk, ennek különleges jelentősége van. Minthogy az egyetlen órán leolvasott időintervallumokkal mindkét rendszerben találkozhatunk, az ilyen méréseket vessző helyett zérus indexszel jelöljük.

IDŐ-DILATÁCIÓ
$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{(ahol } T_0 \text{ egyetlen órán leolvasott idő-intervallum)} \tag{41-6}$$

Minthogy a $\sqrt{1-\beta^2}$ szorzó mindig kisebb, mint egy, a T időintervallum mindig hosszabb mint T_0. Ebből arra következtetünk, hogy a *mozgó órák lassabban járnak, mint a nyugalomban lévők.* Ezt a jelenséget nevezzük **idődilatációnak**. A mozgó órák nem azért járnak lassabban, mert a mozgás valahogyan megváltoztatta a szerkezetüket, s így rosszul működnének, hanem maga az idő viselkedik másképpen, amikor mozgó vonatkoztatási rendszer, „időskáláját" egy stacionárius vonatkoztatási rendszerével hasonlítjuk össze. Egy vonatkoztatási rendszer minden órája az ott helyes időpontot mutatja.

Az idődilatáció még meglepőbb tulajdonsága az, hogy – mivel mindkét vonatkoztatási rendszer egyenlő joggal tekinthető nyugalomban lévőnek – az S' megfigyelői a fent leírt eljárással úgy találják, hogy az S rendszer órái járnak lassabban, mint az S'-rendszeréi. A jelenség teljes mértékben szimmetrikus: *az egyes vonatkoztatási rendszerek megfigyelői azt találják, hogy a hozzájuk képest „mozgó" órák lassabban járnak, mint az ő nyugvó óráik.* Minden mérési eredmény a megfigyelő vonatkoztatási rendszerétől függ, minden rendszernek megvan a maga időskálája, ami általában nem egyezik meg a másik rendszer időskálájával. Pontos választ adhatunk a kérdésre: „Valóban lassabban járnak a mozgó órák"? – azáltal, hogy rámutatunk, a mozgó órákon végzett mérések tanusága szerint igen, a mozgó órák ténylegesen lassabban járnak, mint azok, amelyek a mi rendszerünkben nyugalomban vannak. Ez nem illúzió.

Minden óra a maga vonatkoztatási rendszerében a helyes időt mutatja. Csakhogy egyszerűen nincsen abszolút időskála, mely minden vonatkoztatási rendszerben érvényes volna. Önmagában ez a következtetés még paradoxnak is tűnhet. De amikor majd a speciális relativitáselmélet minden vonatkozását együtt tekintjük, kiderül, hogy rendkívül logikus és mély benyomást keltő struktúrát látunk, amely tökéletes egyezést mutat a tapasztalati tényekkel. Ez a szokatlan viselkedés a Világegyetem alapvető tulajdonsága.

41-2 PÉLDA

Az S' rendszerben nyugvó óra másodpercenként ad egy „tikk" jelet. Ezért, az S' rendszerben mérve az óra T_0 üteme $T_0 = 1\text{s}$. Mekkora lesz az óra 'tikkjei' közt eltelt idő az S-hez képest 0,80 c sebességgel mozgó S' rendszerben.

MEGOLDÁS

Minthogy $T_0 = 1\text{s}$, és $\beta = 0{,}80\ c$, írhatjuk, hogy

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{(1\ \text{s})}{\sqrt{1-0{,}64}} = \frac{(1\ \text{s})}{\sqrt{0{,}36}} = 1{,}67\ \text{s}$$

A mozgó óra tehát lassabban jár, mint a mi nyugalomban lévő óránk.

41.7 A mozgás irányával párhuzamos hosszmérések eredményeinek összehasonlítása

A 41.2 pontban összehasonlítottuk az S' rendszerben nyugalomban lévő rúd L' hosszát azzal az L mérési eredménnyel, amit az S-ben határoztunk meg (abban a rendszerben, ahol a rúd az x-tengely mentén V sebességgel mozog). Most ugyanezt az eljárást folytatjuk, csak a Galilei-transzformáció helyett a Lorentz-transzformáció képleteit fogjuk használni. Tekintsünk egy méterrudat, ami az S' rendszerben nyugalomban van és az x'-tengely mentén helyezkedik el. A $+x'$ egyben a két rendszer relatív sebességének is az iránya. Tekintsünk a 41-7 ábrára! Az S'-ben végzett mérés szerint a rúd hossza $L' = x'_2 - x'_1$. Erre a Lorentz-transzformációt alkalmazva adódik, hogy

$$L' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Az S rendszerben az a két esemény, amely a méterrúd két végének a helyét meghatározza, egyidejű kell, hogy legyen, ezért $t_1 = t_2$, és így a fenti kifejezés az

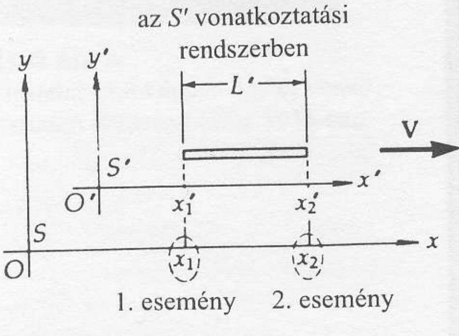
$$L' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

alakra redukálódik. Az L' hosszat az S'-ben állapították meg (ott, ahol a tárgy nyugalomban volt), (ezzel szemben az L hosszat S-ben mérték meg, ahol a tárgy mozgott). Minthogy nyugvó tárgy hosszméretét bármelyik rendszerben meg kell tudnunk határozni, az ilyen mérések eredményeinek jelölésére a zérus indexet fogjuk használni.

A HOSSZÚSÁG KONTRAKCIÓ
$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} \qquad (41\text{-}7)$$
(az L_0-t abban a rendszerben kell meghatározni, ahol a rúd nyugalomban van)

Minthogy a $\sqrt{1-\beta^2}$ szorzó mindig kisebb, mint egy, az L hossz mindig rövidebb, mint az L_0. Ennek következtében megállapítható, hogy a mozgó testek hossza a mozgás irányában kisebb, mintha a nyugvó test hosszát mértük volna meg. (A mozgás irányára merőleges távolságok mozgó rendszerből mérve is változatlanok maradnak.) Ezt a jelenséget *hosszúságkontrakciónak* nevezzük.

Az idődilatációhoz hasonlóan ez is szimmetrikus jelenség. *Minden rendszer megfigyelői rövdebbnek mérik a másik – hozzájuk képest mozgó – rendszer méterrúdjait.* Ebben nincsen semmi paradoxon, mert a méréseket két különböző vonatkoztatási rendszerben hajtották végre. Egy tárgy hossza nem a tárgy tulajdonsága, hanem egy mérés eredménye. Most már világos választ adhatunk a következő kérdésre: „A mozgó rudak hossza *valóban* ki-



41-7 ábra
Az S rendszerben két esemény, amely a mozgó rúd végpontjainak az x_1, ill. x_2 helyét határozza meg, egyidejű esemény.

sebb lesz?" – a mozgó rúddal kapcsolatos mérések tanúsága szerint igen: a mozgó méterrúd valóban rövidebb, mint az, amelyik a mi vonatkoztatási rendszerünkben áll. De mivel nincsen abszolút tér, sem abszolút idő, az egyik vonatkoztatási rendszerben végzett mérések eredményei nem szükségképpen azonosak a másik vonatkoztatási rendszerben végzett mérések eredményeivel. Mindamellett bármely vonatkoztatási rendszer mérési eredményei egyaránt érvényesek. Martin Gardner[6] érdekes analógiával szemlélteti a helyzetet: ha két ember nagyméretű kicsinyítő lencse két oldalán áll, akkor a másikat mindketten kicsinyítve látják. De ez csak annyit jelent, hogy mindenki a maga vonatkoztatási rendszerében látja a másikat kisebbnek. Ez nem azonos azzal a paradox állítással, hogy a másik ember ténylegesen kisebb.

41-3 PÉLDA

Méterrúd 0,60 c sebességgel mozog a hossztengelyének az irányában. Adjuk meg a méterrúd hosszát olyan megfigyelő szerint, aki nyugalomban van.

MEGOLDÁS

Minthogy $L_0 = 1$ m és $\beta = 0{,}60$, így

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = (1\text{ m})\sqrt{1-0{,}36} = (1\text{ m})\sqrt{0{,}64} = \ 0{,}800\text{ m}$$

Ezért a mozgó méterrúd a nyugalomban lévő méterrúdnál rövidebb.

41.8 A sajátidő és a nyugalmi hossz

Különböző vonatkoztatási rendszerek megfigyelői a hosszúság és időintervallum-mérések során különböző eredményekhez juthatnak. Ezért szokásossá vált, hogy a következő speciális mérésfajtákat külön névvel lássák el.

Nyugalmi hossz (sajáthossz): hosszmeghatározás eredménye olyan vonatkoztatási rendszerben, amelyben a tárgy nyugalomban van.

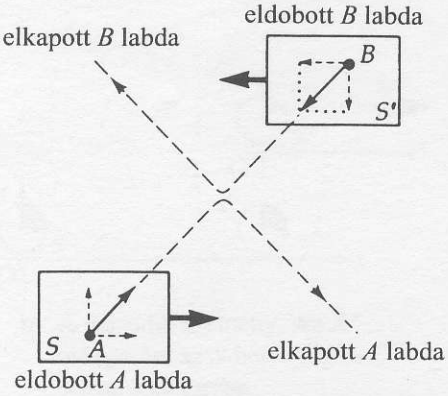
Sajátidő (intervallum): két esemény közti időtartam mérésének eredménye olyan vonatkoztatási rendszerben, amelyben a két esemény azonos helyen ment végbe. Ennek eredménye a sajátidő (tartam), melyet mindig egyetlen órával mérünk. Minden óra a saját helyén a sajátidőt méri.

A „saját" (ill. nyugalmi) szónak a használatából nem következik, hogy más mérések valahogyan helytelenek vagy rosszak lennének. Ezt a jelzőt csak abban az értelemben használjuk, hogy „valamihez tartozik", valaminek a jellegzetes, jellemző tulajdonsága. Míg a tárgyak sajáthosszát mindig meg lehet határozni, vannak olyan helyzetek, amelyekben a saját-időintervallum fogalma nem alkalmazható. Vegyük észre, hogy a sajátidő-intervallumot egyetlen egy órával kell mérni. Ezért ha két esemény a térben egymástól távol, de időben elegendően közel következik be, akkor előfordulhat, hogy

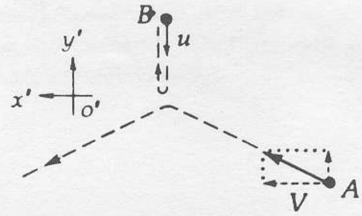
[6] Martin Gardner: The Relativity Explosion, Vintage Books (1976)

semmilyen vonatkoztatási rendszer nem mozoghat eléggé gyorsan ahhoz, hogy az egyetlen órát a bekövetkező események helyére juttassa (anélkül, hogy a fény sebességével vagy még annál is gyorsabban kellene mozognia). Fontos emlékezni arra, hogy a T_0 és az L_0 jelek az idődilatáció és a hosszkontrakció képleteiben a sajátidőt, ill. nyugalmi hosszat jelölik, tekintet nélkül arra, hogy melyik vonatkoztatási rendszert jelöltük vesszővel.

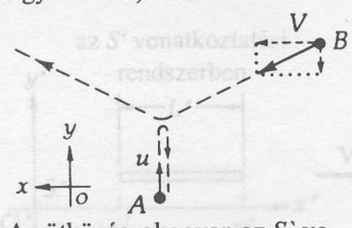
Minthogy a térre és az időre vonatkozó klasszikus elképzelések igen mélyen gyökereznek gondolkodásunkban, meglepően könnyű relativitáselméleti problémák megoldása során félrevinni a gondolatmenetet. Ezért mindig nagyon bölcs dolog pontszerű eseményekben gondolkodni és gondos vázlatot készíteni arról, ahogyan ezeket az eseményeket a megfelelő vonatkoztatási rendszerben méréssel vizsgáljuk.



a) A földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben a rugalmas ütközés teljes mértékben szimmetrikus.



b) Az ütközés, ahogyan az S vonatkoztatási rendszerben (az A megfigyelő által) látható.



c) Az ütközés, ahogyan az S` vonatkoztatási rendszerben (a B megfigyelő által) látható.

41-8 ábra
Gondolatkísérlet, amelyben két azonos labda rugalmasan ütközik. A földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben a rugalmas ütközés teljes mértékben szimmetrikus.

41.9 A relativisztikus impulzus

A speciális relativitáselmélet tárgyalásában mindeddig a kinematikára szorítkoztunk. Most a relativisztikus dinamika felépítéséhez fogunk hozzá, és ugyanazt az alapvető elképzelést használjuk, amire a newtoni mechanika is építi az *impulzusmegmaradás elvét.* Ha egy testre állandó erő hat, akkor Newton második törvénye ($F = dp/dt$ ahol $p = mv$) nem ró korlátot arra a sebességre, amit a test elérhet. Kísérletileg azonban bebizonyosodott, hogy egy test impulzusa a végtelenhez közeledik, ha sebessége a fénysebességhez tart. Így relativisztikusan a maximálisan elérhető sebességnek van felső határa.

A jelenség vizsgálatára tanulmányozzuk először két egyforma részecske rugalmas ütközését és az Einstein féle első alapfeltevéssel követeljük meg, hogy az impulzusmegmaradás tétele minden inerciarendszerben fennálljon. Tegyük fel, hogy két vasúti kocsi, (az S, ill. az S' vonatkoztatási rendszer), egymással párhuzamos vágányokon, azonos, de ellenkező irányú sebességgel közeledik egymáshoz. A 41-8a ábra mutatja a viszonyokat a földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben. Mindkét rendszerben a megfigyelőknek azonos m tömegű labdáik vannak. A két megfigyelő a labdáját a mozgás irányára merőlegesen dobja el egyenlő nagy u sebességgel (amely értéket mindegyik a maga vonatkoztatási rendszerében méri meg). Miután a labdák ugyanazt az y távolságot tették meg a vagonok mozgási irányára merőlegesen, összeütköznek, és visszapattanva megteszik újra az y távolságot, ahol a megfigyelők a labdákat elkapják. A következő jelöléseket fogjuk használni: az S-ben az A labda tömege m és összesen $2y$ utat tesz meg u sebességgel. Az S'-ben a B labdának a tömege m és $2y'$ távolságot tesz meg összesen, u sebességgel. Minthogy az y irányú távolságok nem szenvednek kontrakciót ezért $y = y'$. A helyzet szimmetrikus.

Szokatlan körülmény merül azonban fel, amikor az ütközést az egyik mozgó rendszerből elemezzük. (41-8b ábra) A B labda sebességének y-komponense a $2y$ (= $2y'$) távolság osztva a B labda eldobásához, ill. elkapásához tartozó két esemény közt eltelt időintervallummal. Az S'-ben ez az időintervallum maga a T_0 sajátidőintervallum, mert a két esemény (az eldobás és elkapás), S-ben ugyanazon a helyen történt és így ugyanazzal az egyetlen órával mérhető. De S-ben ugyanez a két esemény (a B labda eldobása és elkapása) két különböző helyen történik. Az S-ben mért T időtartam a T_0-lal a $T = T_0/\sqrt{1-\beta^2}$ idődilatációs képlettel hozható kapcsolatba. Következésképpen, bár $y = y'$, az időtartamok különbözőek és a B labda sebességének y-komponense (az S-ben mérve) nem ugyanaz, mint az A labda sebességének az y-komponense (az S-ben mérve):

A és *B* sebessége *S*-ben mérve
$$\begin{cases}(u_B)_y = \dfrac{2y}{T} = \dfrac{2y}{T_0}\sqrt{1-\beta^2} = u\sqrt{1-\beta^2} & \text{(41-8)}\\[2ex] (u_A)_y = \dfrac{2y}{T_0} = u & \text{(41-9)}\end{cases}$$

Az impulzusmegmaradás törvénye megköveteli, hogy az egyik labda impulzusának az y-komponensében beálló változást a másik labda impulzusának y-komponensében beálló változás kompenzálja. De ha az impulzust (tömeg) × (sebesség) alakjában definiáltuk, ezek a változások nem lesznek egyenlők:

S-ben $(\Delta p_A)_y = -2mu$ és $(\Delta p_B)_y = 2mu\sqrt{1-\beta^2}$

(Az előjelkülönbség abból adódik, hogy a pozitív y-tengelyt felfelé irányítottuk a 41-8 ábrán.) Így arra a következtetésre jutottunk, hogy a (tömeg) × (sebesség) alakban definiált impulzus, úgy látszik, a relativitáselmélet szerint nem megmaradó mennyiség.

Az impulzusmegmaradás olyan fontos a fizikában, hogy lehetőséget kell találnunk érvényben tartására. Az elemzésből látható, hogy a probléma azért merül fel, mert az impulzus y-komponense a mozgó vonatkoztatási rendszer sebességének z-komponensétől függött. Tekintsük a következő lehetséges módosítást. Definiáljuk a sebességet *magának a mozgó testnek a* $\Delta\tau$ *sajátidejével*, vagyis azzal az idővel, amit a testhez rögzített óra mér. Ekkor a $\Delta y/\Delta\tau$ mennyiség minden megfigyelő számára ugyanaz lesz. Ez a sajátidő a megfigyelő Δt idejével a következőképpen fejezhető ki:

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \qquad \text{(41-10)}$$

Így a sebesség
$$= \frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad \text{(41-11)}$$

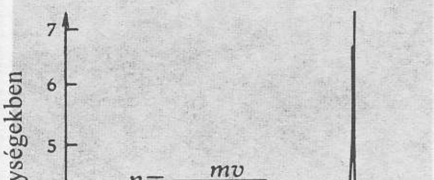
Ezért minden, a $\pm x$-tengely irányában állandó sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben a részecskék sebességének y-komponense ugyanaz lesz:

$$\text{(a sebesség y-komponense)} = \frac{u}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

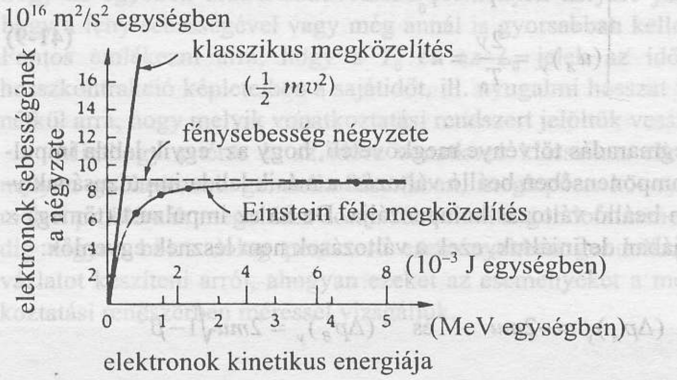
Ezt az egyenletet általánosítva a relativisztikus impulzust a következőképpen definiáljuk:

RELATIVISZTIKUS IMPULZUS
$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \qquad \text{(41-12)}$$

Vegyük észre, hogy ebben a definícióban nem szerepel a vonatkoztatási rendszerek viszonylagos sebessége. Ehelyett viszont szerepel a részecske u sebessége az adott vonatkoztatási rendszerben. Ezzel a definícióval az impulzusmegmaradás tétele érvényes marad a relativisztikus esetben is. Ugyanakkor $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ a közismert klasszikus alakra redukálódik, amikor $u \ll c$. A 41-9 ábra bemutatja, hogyan változik a relativisztikus impulzus a sebességfüggvényében.



41-9 ábra
Ahogyan a sebesség nő, a relativisztikus impulzus egyre jobban eltér a klasszikus mv értékétől. Amikor a sebesség megközelíti c értékét, az impulzus a végtelenhez tart.



41-10 ábra

A kísérleti pontok azt bizonyítják, hogy a fény sebessége határsebesség valamennyi tömeggel rendelkező részecskére vonatkozóan. (W. Bertozzi: American Journal of Physics, 32 (1964), 555, az American Journal of Physics engedélyével átvéve).

A relativisztikus impulzus növekedése miatt c felső határt jelent bármely olyan részecske által elérhető sebességre, amely részecskének nyugalmi állapotban tömege van. Az impulzus növekedésével egyre nagyobb erő szükséges ahhoz, hogy a részecskét még tovább gyorsítsuk. Végtelen energiára lenne szükség ahhoz, hogy a részecske elérje a c sebességet. Így aztán a fénysebesség valóban a sebesség felső határa.[7] A 41-10 ábrán látható kísérleti eredmények meggyőzően igazolják a határsebesség létezését. A grafikonon az elektron sebességének négyzetét ábrázoltuk az elektron mozgási energiájának a függvényében. Ennek az ábrának a skáláján mérve a stanfordi 3 km-es gyorsítóból (41-11 ábra) kilépő elektronok energiáját ábrázoló pont kb. 188 méterrel (két football-pálya hosszával) jobbra lenne. Ezeknek az elektronoknak a sebessége a mérések szerint lényegében c, de természetesen még mindig nem érték el a c értékét pontosan. Ez a sebesség jócskán eltér a klasszikus elmélet által erre az energiára vonatkozóan megállapított értéktől.

41-11 ábra

A stanfordi három kilométer hosszú lineáris elektrongyorsító a Stanford Lineáris Gyorsítócentrumban (SLAC). (Egy államok közti autópálya halad a gyorsító fölött.) A gyorsító működése a speciális relativitás minden aspektusát igazolja. A gyorsítóból kilépő elektronok sebessége a fény sebességétől mindössze 5×10^{-11} c-vel tér el. Ha a klasszikus Galilei-féle relativitás lenne helyes, és a relativisztikus tömegnövekedés nem lenne, akkor ennek a gyorsítónak mindössze egy arasznyi hosszúnak kellene lennie, hogy ezt a sebességet elérjék.

41-4 PÉLDA

A stanfordi három kilométer hosszú lineáris gyorsítóból kilépő elektronok elérik a fénysebesség értékének 99,99999997 %-át. Adjuk meg ezeknek az elektronoknak az impulzusát mc-egységekben!

MEGOLDÁS

Az elektronok impulzusa nem $mv \approx mc$, mint a klasszikus elmélet szerint lenne, hanem a (41-12) képlet szerinti. Minthogy β igen közel van az 1-hez, használhatunk közelítő képletet (lásd az E függeléket):

$$1-\beta^2 = (1+\beta)(1-\beta) \approx 2(1-\beta)$$

Ha $\beta = 0{,}999\ 999\ 999\ 7$, akkor a $(1-\beta)$ tényező egyenlő 3×10^{-10}-nel. Ezért

$$\sqrt{1-\beta^2} \approx \sqrt{2(1-\beta)} = \sqrt{6\times10^{-10}}$$

[7] Felmerült az az ötlet, hogy talán léteznek *tachyonok* is, olyan részecskék, amelyek mindig c-nél nagyobb sebességgel mozognak. Számukra a fénysebesség alsó határsebességet jelentene. Az ilyen részecskék létezése összeegyeztethető a speciális relativitáselmélettel, hiszen a sebesség továbbra is mindkét oldalról áthághatatlan korlát marad. Mind ez ideig a kimutatásukra irányuló kísérletek nem jártak sikerrel, talán nem is léteznek. Továbbá információkért lásd G. Feinberg: „Particles that Go Faster than Light" (Részecskék, amelyek a fénynél gyorsabban haladnak) Scientific American 223.2. (1970 febr) p 69.

és így $p=\dfrac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}\approx\dfrac{mv}{\sqrt{6\times10^{-10}}}\approx 4{,}08\times10^4\,mc$

Ez megegyezik az elektronok kísérletileg meghatározott impulzusával (amit a gyorsítóból kilépő elektronok mágneses erőtérben tapasztalt eltérítésével vizsgálnak). Bár közhelyszámba megy ezekről az elektronokról úgy beszélni, mint amely részecskéknek nyugalmi tömegük 4×10^4-szeresét kitevő relativisztikus tömegük van, ismételten hangsúlyozzuk, hogy ez a változás azért jelenik meg, mert a térnek és az időnek szokatlan tulajdonságai vannak, nem pedig azért, mert valami speciális dolog történik magával a tömeggel. (lásd a következő pontot).

41-5 PÉLDA

Baseball-labda 30 m/s sebességgel mozog. Mennyi a valódi (relativisztikus) impulzus és az mv klasszikus értéknek a relatív eltérése?

MEGOLDÁS

Ebben az esetben a sebesség igen kicsi a c-hez képest, ezért a $\beta^2 << 1$ esetén érvényes közelítő kifejezést fogjuk használni (lásd az E függeléket);

$$(1\pm\beta^2)^n\approx1\pm n\beta^2 \qquad \text{ha } \beta<<1$$

Ezért $\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=(1-\beta^2)^{-1/2}\approx1+\dfrac{\beta^2}{2}$

A keresett hányados tehát

$$\frac{\text{különbség}}{mv}=\frac{p-mv}{mv}=\frac{p}{mv}-1=\frac{mv(1-\beta^2)^{-1/2}}{mv}-1\approx1+\frac{\beta^2}{2}-1\approx\frac{\beta^2}{2}$$

A β számértéke $\beta=\dfrac{v}{c}=\dfrac{30\,\text{m/s}}{3\times10^8\,\text{m/s}}=1\times10^{-7}$

s így $\dfrac{\beta^2}{2}=\dfrac{1\times10^{-14}}{2}=5\times10^{-15}$

Megállapítható, hogy a relativisztikus korrekció elhanyagolható azoknál a sebességeknél, amelyek a mindennapi gyakorlatban szerepelnek.

Figyeljük meg, hogy a 41-4 és 41-5 példában szereplőhöz hasonló problémáknál, ahol a $v << c$ klasszikus, ill. a $v\approx c$ ún. ultrarelativisztikus határesetekről van szó, közelítő képletekkel elkerülhetjük azokat a hosszadalmas eljárásokat, amelyeket pl. a $\sqrt{1-(0{,}999\,999\,999\,7)^2}$ közvetlen kiszámítása igényel. Ráadásul az ilyen számítások gyakran meghaladják a zsebszámítógépek teljesítőképességét. Ha az olvasó ilyen műveletekbe bonyolódik, nem érdemes a számértékeket a közelítő képletek alkalmazása előtt behelyettesíteni.

41.10 Jegyzet a nyugalmi tömegről

Néha a (41-12) képletet úgy értelmezzük, mintha azt jelentené, hogy a részecske sebességének növekedésével tömege is növekszik. Az alábbiakban m_0 jelöli a nyugalmi tömeget és m_{rel} az úgynevezett *relativisztikus tömeget.*

$$p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$m_{rel}\, u = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

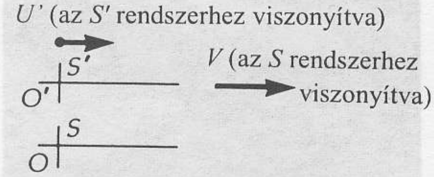
Ha u-val osztunk, adódik az **(41-13)**

$$m_{rel} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

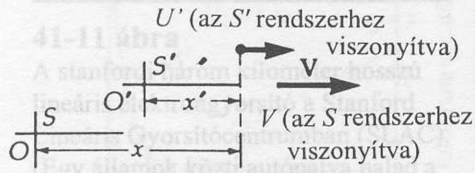
összefüggés.

Egyes szerzők ezt definícióként tekintik, mert olyan képletek felírását teszi lehetővé, amelyek hasonlítanak a klasszikus képletekhez, így pl. a relativisztikus impulzus $p = m_{rel}v$, vagy a teljes energia $\mathbf{E} = m_{rel}\, c^2$ kifejezése esetében. Ugyanakkor más klasszikus képletek értelmetlenné válnak, ha m helyére az m_{rel} mennyiséget írjuk.

Így F nem egyenlő $(m_{rel}a)$-val és a relativisztikus kinetikus energia sem egyezik meg $1/2\ m_{rel}v^2$-tel. További félreértés merül fel, amikor azt állítjuk hogy a „tömeg nő a sebességgel" – mert szem elől tévesztjük azt a tényt, hogy a (41-9) képletben a négyzetgyökös kifejezés a sebesség mérése miatt jelent meg (ami tehát a tér és az idő fogalmával kapcsolatos) az impulzus definíciójában. *Így a négyzetgyökös kifejezés a tér és az idő, és nem a tömeg transzformációs tulajdonságainak a következménye.* A relativitás elmélete megváltoztatta a térre és az időre vonatkozó fogalmainkat és érinti az olyan dinamikai mennyiségeket is, mint az impulzus és a tömeg. **Ebben a szövegben m mindig az invariáns nyugalmi tömeget jelölte.** Ezt a jelölést a relativitáselmélet szakkönyvei is gyakorta alkalmazzák.



a) Abban a pillanatban, amikor az S és az S' origói egybeesnek ($t = t' = 0$), a részecske áthalad az origón a $+x$-($+x'$) irányban mozogva.



b) Egy későbbi időpontban a részecske az S rendszerben az x helyen, az S' rendszerben az x' helyen van, a részecske sebessége $u = x/t$ az S-ben, ill. $u' = x'/t'$ az S'-ben.

41-12 ábra
Gondolatkísérlet a sebességösszetétel vizsgálatára. Az S' rendszernek V a sebessége az S-hez képest.

41.11 A relativisztikus sebességösszeadás

Tegyük fel, hogy egy részecske sebessége u' az S' vonatkoztatási rendszer x'-tengelye mentén. Maga az S' rendszer az S rendszerhez képest V sebességgel mozog az x irányában. Nézzük a 41-12 ábrát! A $t = t' = 0$ időpontban egy pillanatra a két vonatkoztatási rendszer egybeesik, és a részecske akkor halad át az O (és az O') origón. A relativisztikus sebességösszeadás szabályát ugyanazzal az eljárással kaphatjuk meg, amit a klasszikus sebességösszetétel megállapítására használtunk (a (41-3) képlet), az egyedüli változtatás az, hogy a Galilei-transzformáció helyett a Lorentz-transzformációt használjuk. Tekintsük megint a következő két eseményt:

		S-ben	S'-ben
ELSŐ ESEMÉMY	*Részecske az origóban*	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)
MÁSODIK ESEMÉNY	*Részecske az origón túl*	$(x,0,0,t)$	$(x',0,0,t')$

Az S' rendszerben a részecske sebessége $u' = x'/t'$. Az S' maga is mozog a $+x$ irányában állandó V sebességgel az S-hez képest. Ez a mozgás adja a második V sebességet, amit a részecske u' sebességéhez kell úgy hozzáadni, hogy a részecskének az S-ben mért u sebességét kapjuk meg. Az S rendszerben $u = x/t$. A Lorentz-transzformáció (41-5) képleteinek alkalmazásával

$$u = \frac{x}{t} = \frac{\dfrac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\dfrac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{t'(u'+V)}{t'(1+u'V/c^2)}$$

A RELATIVISZTIKUS SEBESSÉGÖSSZEADÁS (x-irányú sebességek esetére)

$$u = \frac{u'+V}{1+\left(\dfrac{u'V}{c^2}\right)} \tag{41-14}$$

A c-nél sokkal kisebb sebességek esetére ez a kifejezés a $u = u' + V$ klasszikus sebességösszeadási törvényre redukálódik. Ha bármelyik sebesség $-x$ (ill. $-x'$) irányba mutat, akkor a megfelelő számértékek előtt negatív előjelet használunk.

Mi történik, ha mind u', mind V a fény sebességéhez közeli értékűek? Lehet-e az eredmény nagyobb, mint c? Nem. Ha egymás után tetszőleges számú c-nél kisebb sebességet adunk össze, ugyanabban az irányban akkor, a végső eredő sebesség minden esetben kisebb marad c-nél.

41-6 PÉLDA

Tegyük fel, hogy két csillag, az A és a B egymással ellentétes irányban távolodik a Földtől a 41-13a ábrán bemutatott elrendezésben és sebességgel. Adjuk meg a B csillag sebességét az A csillagon lévő megfigyelők szempontjából!

MEGOLDÁS

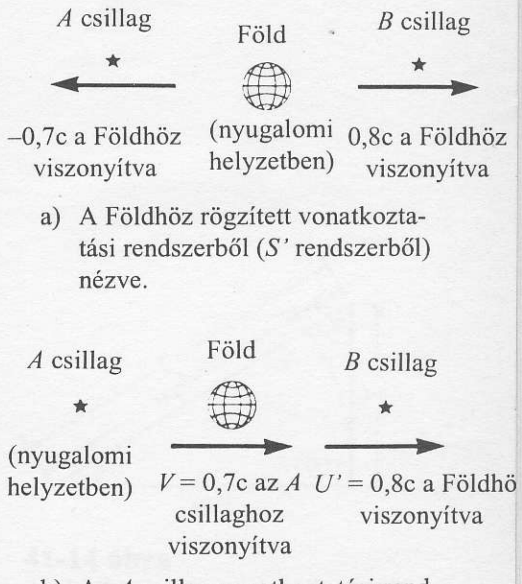
A fent bevezetett jelölésekkel az A csillag a nyugvó S rendszer, míg a Föld (az S' rendszer) a mozgó ($V = 0{,}7c$), és ebben a megfigyelések szerint a B csillag sebessége $u' = 0{,}8c$. A relativisztikus sebességösszetétel (41-14) képletét alkalmazva:

$$u = \frac{u'+V}{1+\left(\dfrac{u'V}{c^2}\right)} = \frac{(0{,}8c+0{,}7c)}{1+\left[\dfrac{(0{,}8)(0{,}7)c^2}{c^2}\right]} = 0{,}962c$$

Vegyük észre, hogy ez kisebb, mint a fénysebesség. [A Galilei-féle sebességösszeadás helytelen eredményhez, az $u = u' + V = (0{,}8c + 0{,}7c) = 1{,}5c$ értékhez vezetett volna.]

41-7 PÉLDA

Hogy a sebességösszetétel szabályát a $V \to c$ határeset közelében is megvizsgáljuk, tegyük fel, hogy egy űrhajó (S' rendszer) a Föld (S rendszer) mellett rendkívül nagy, mondjuk, $V = 0{,}9999c$ sebességgel halad el. Az űrhajó utasa az űrhajó végén villanólámpát kapcsol be és



a) A Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerből (S' rendszerből) nézve.

b) Az A csillag vonatkoztatási rendszeréből nézve.

41-13 ábra
A 41-6 példához. Két csillag, A és B, ellenkező irányú relativisztikus sebességgel távolodik a Földtől. Mekkora sebességgel látják az A megfigyelői a B csillagot távolodni?

ezzel egy fényimpulzust küld az űrhajó orra felé. Megmérve a fényjel sebességét (az S'-ben) c-nek találja azt. A relativisztikus sebességösszetétel alapján adjuk meg ugyanennek a fényimpulzusnak a sebességét a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben!

MEGOLDÁS

A két sebesség: $u' = c$ és $V = 0{,}9999c$. Behelyettesítve a (41-14) képletbe, azt kapjuk, hogy

$$u = \frac{u' + V}{\left(1 + \frac{u'V}{c^2}\right)} = \frac{c + v}{\left(1 + \frac{cV}{c^2}\right)} = \frac{(c+V)c}{(c+V)} = c$$

Nem kell meglepődni ezen az eredményen! A V numerikus értékétől függetlenül a Lorentz-transzformációt éppen úgy vezettük le, hogy a fénysebesség értéke minden inerciális vonatkoztatási rendszerben garantáltan ugyanaz legyen.

41.12 A relativisztikus energia

A 6.6 pontban levezettük a munkatételt, ami azt mondja ki, hogy egy részecskére ható F erő által végzett munka egyenlő a részecske mozgási energiájának ΔK növekedésével. A tételt most a relativisztikus fogalmak alkalmazásával is megvizsgáljuk. Feltesszük, hogy a részecske nyugalomból indul, tehát $K_0 = 0$. Egydimenziós mozgás esetén:

$$K = \int_0^x F dx \qquad (41\text{-}15)$$

Az integrál kiszámítása egyszerűbb lesz, ha integrálási változónak a p relativisztikus impulzust tekintjük. Így az $F = dp/dt$ és a $dx = v\,dt$ helyettesítést kell alkalmazni. A (41-9) összefüggésből:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Ebből v-t kifejezve adódik, hogy

$$v = \frac{p/m}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}} \qquad (41\text{-}16)$$

Ezeket az összefüggéseket a (41-15) képletbe helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$K = \int_0^t \frac{dp}{dt} v dt = \int_0^p v dp = \int_0^p \frac{p/m}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}} dp \qquad (41\text{-}17)$$

Átrendezés után az eredmény:

$$K = mc^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} - 1 \right]$$

Beírva ide a $p = mv/\sqrt{1 - \beta^2}$ relativisztikus impulzust, a következő eredményre jutunk:

41-1 táblázat Egyes elemi részecskék tömeg-energiája (1986-ban a CODATA által megállapított kerekített értékek).

Részecske	Jel	mc^2(MeV-ban)	m(kg)
Elektron (vagy pozitron)	e vagy e^- (e^+)	0,511	$9{,}109\,390 \times 10^{-31}$
Müon	$\mu^{\pm}$	105,658	$1{,}883\,533 \times 10^{-28}$
(semleges) Pi -mezon	π^0	134,964	$2{,}405\,95 \times 10^{-28}$
(töltött) Pi -mezon	$\pi^{\pm}$	139,569	$2{,}488\,05 \times 10^{-28}$
Atomi tömegegység	u	931,494	$1{,}660\,540 \times 10^{-27}$
Proton	p	938,272	$1{,}672\,623 \times 10^{-27}$
Neutron	n	939,565	$1{,}674\,929 \times 10^{-27}$
Deuteron	d vagy ^{2}H	1875,613	$3{,}343\,586 \times 10^{-27}$
Alfa-részecske	α vagy ^{4}He	3727,380	$6{,}644\,653 \times 10^{-27}$

A RELATIVISZTIKUS KINETIKUS ENERGIA
$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \qquad \textbf{(41-18)}$$

ahol m a nyugalmi tömeg. Kis sebességek esetén ez a kifejezés a közismert Newton-féle $K = 1/2mv^2$ kinetikus energiára redukálódik. Hogy ezt bebizonyítsuk, a négyzetgyökös tagot Taylor-sorba fejtjük (lásd az E függeléket):

$$K = mc^2\left[1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\left(\frac{v^2}{c2}\right)^2+\cdots-1\right]$$

Kis sebességek esetén a v^4/c^4 tag elhanyagolható a v^2/c^2 mellett, így a kifejezés újból átalakul:

$$K_{\text{klasszikus}} = 1/2\ mv^2 \qquad \text{ha } v/c \ll 1$$

A (41-18) képletben az mc^2 tagot **nyugalmi energiának** nevezik és E_0-lal jelölik:

NYUGALMI ENERGIA: $$E_0 = mc^2 \qquad \textbf{(41-19)}$$

Ez az *m tömeg* és az E_0 *energia* egyenértékűségét vonja maga után. A c fénysebesség nagy numerikus értéke miatt már kicsiny tömeg energiaegyenértéke is óriási. Példa erre az elektromos energia előállítása a nukleáris reaktorokban, ahol a hasadó uránium-atommag általában két könnyebb atommaggá és még két vagy három neutronná bomlik el. A keletkező termékek összes tömege kisebb, mint a kezdeti uránium-magé, a különbség Δm. Az összes hasadási termék mozgási energiája egyenlő $(\Delta m)c^2$-tel. Ezt a mozgási energiát használják vízgőz felhevítésére és a gőzzel elektromos áram szokásos módon való előállítására. Egy olyan nagyváros, mint San Francisco, napi energiaszükséglete egy 5 Ft-osnyi tömeg felének átalakításával kielégíthető lenne. A fordított folyamat, – amikor a sugárzó energia „tömegenergiává" alakul – szintén lehetséges. Például a *párkeltési* folyamatban (42-6 pont) egy „fényrészecske" *(foton)* energiája egy elektron és egy pozitron keltéséhez szükséges nyugalmi energiává plusz a két részecske mozgási energiájává alakul át.

Általános gyakorlat, hogy a részecskék tömegét elektronvoltban (eV) fejezzük ki, ez sokszor igen kényelmes a gyakorlatban[8] (lásd a 41-1 táblázatot.) Hasonlóképpen az impulzust is előnyös MeV/c egységekben megadni. Meg-

[8] Természetesen a tömeg nem egyenlő, hanem csak egyenértékű az energiával. Ezek a mennyiségek a c^2 szorzón keresztül állnak kapcsolatban.

jegyzendő, hogy amikor azt mondjuk, hogy „egy részecske energiája 2 MeV", általában arra gondolunk, hogy a részecske mozgási energiája 2 MeV.

41-8 PÉLDA

Az ötcentes pénzdarab tömege kb. 3 gramm. Számítsuk ki, hogy ez mennyi energiának felel meg.

MEGOLDÁS

$$E = mc^2 = (0{,}003\ \text{kg})(3\times10^8\ \text{m/s})^2 = 2{,}70\times10^{14}\ \text{J}$$

Ez körülbelül annyi energia, amennyit a Hoover Dam vizierőmű 2,5 nap, a paksi atomerőmű pedig kb. 2 nap alatt termel meg.

Az mc^2 nyugalmi energia és a K mozgási energia összege a rendszer E teljes energiáját adja:

A TELJES RELATIVISZTIKUS ENERGIA

$$E = mc^2 + K \quad \text{(41-20)}$$

és

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{(41-21)}$$

Ez a megállapítás új megmaradási törvényhez vezet, a tömegenergia megmaradási törvényéhez, amely a klasszikus fizika két megmaradási elvét egyesíti, az energia megmaradásának elvét, és a „klasszikus" tömeg megmaradásának elvét (mely a kémiai reakciók leírásában játszott fontos szerepet).

Egy részecskerendszer U belső energiája a rendszer $E_0 = mc^2$ nyugalmi energiájának része. Ha például egy rugót megnyújtunk és ezáltal pozitív U_{sp} potenciális energiát adunk neki, akkor a rendszer nyugalmi energiája is megnő egy kevéssel (bár a növekedés olyan kicsiny, hogy közvetlenül megmérni lehetetlen). A protonból és neutronból álló kötött rendszer, a deuteron nevű stabilis részecske (a ^{2}H hidrogén-izotóp atommagja) példa arra, hogy egy rendszer belső energiája negatív is lehet. A proton és a neutron szétválasztásához az őket összetartó erőkkel szemben munkát kell végezni a rendszeren. Ez azt jelenti, hogy a deuteron belső kötési energiája (a zérus potenciális energiát képviselő nyugvó szabad protonból és neutronból álló rendszerhez képest) negatív és a deuteron nyugalmi energiája kicsit kisebb, mint a szabad proton és a szabad neutron nyugalmi energiájának az összege.

41-9 PÉLDA

A deuteron egy neutron és egy proton kötött állapota. A 41-1 táblázat alapján számítsuk ki, mekkora energia kell ahhoz, hogy a deuteront neutronra és protonra bontsuk fel.

MEGOLDÁS

A proton és a neutron együttes nyugalmi energiája 938,280 MeV + 939,573 MeV = 1877,853 MeV. A deuteron nyugalmi energiája 1875,628 MeV, amit az előző összegből levonva 2,2 MeV adódik. Ez a deuteron kötési energiája.

A fenti példában, a deuteron felbontásához szükséges energiát úgy is betáplálhatnánk, hogy a deuteront egy másik részecskével vagy elegendően nagy energiájú fotonnal (melynek a jele γ a gamma sugárból) bombáznánk. Ezt az ún. *foto-indukált reakciót* a

$$\gamma + d \to n + p$$

alakban szokás felírni. A fordított reakció a proton és a neutron egyesítése deuteronná, melynek során egy 2,22 MeV energiájú foton szabadul fel. Ez viszi el a beépülő részecskék nyugalmi energia változásának megfelelő energiát. A reakció

$$n + p \to d + \gamma$$

Lásd a 45. fejezetet a magreakciók részletesebb tárgyalását illetően.

Általában úgy gondoljuk, hogy a részecskéknek zérusnál nagyobb nyugalmi tömegük van. Vannak azonban más típusú részecskék is, amelyekről úgy hisszük, hogy nyugalmi tömegük zérus. Ilyenek a fotonok, a neutrinók és az (eddig még nem észlelt) gravitonok[9]. Az $E\sqrt{1-\beta^2} = mc^2$ összefüggésből arra következtetünk, hogy ezek a zérus nyugalmi tömegű részecskék szükségszerűen csak a fény $v = c$ sebességével mozoghatnak, hogy a relativisztikus impulzus képletében szereplő négyzetgyökös tényező is zérus legyen.

Az E-re, K-ra és p-re vonatkozó képleteket kombinálva az alábbi hasznos összefüggéseket kaphatjuk:

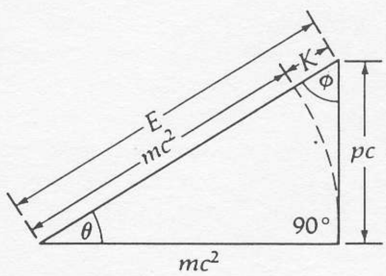
TOVÁBBI ÖSSZEFÜGGÉ-SEK A RELATIVISZTIKUS ENERGIA ÉS IMPULZUS KÖZÖTT

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \tag{41-22}$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K^2 + 2mc^2K} = \sqrt{2mK\underbrace{\left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right)}_{\text{Relativisztikus korrekció}}} \tag{41-23}$$

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{(pc)^2}{2mc^2} = K\underbrace{\left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right)}_{\text{Relativisztikus korrekció}} \tag{41-24}$$

$$v = \frac{pc^2}{E} = c\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} \tag{41-25}$$



41-14 ábra
Az E, K és a p mennyiségek közötti kapcsolat emlékezetben tartását elősegíti a derékszögű háromszög és a Pitagorasz-tétel, amely szerint $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$. Jegyezzük meg azt is, hogy $E = mc^2 + K$. Azt is könnyű megmutatni, hogy $\sin\theta = \beta$ és $\sin\phi = \sqrt{1-\beta^2}$.

[9] Az 1987A szupernova értékelésekor a neutrínókitörésnek a fényfelvillanáshoz képest mért késése esetleg azzal magyarázható, hogy a neutrínó egyik formájának – az elektron-antineutrínónak – kicsiny, 14 eV/c^2-nél nem nagyobb nyugalmi tömege van. Ez a következtetés azonban a szupernova-robbanás lefolyásáról alkotott (igencsak vitatható) képünkön alapul, így az sem kizárt, hogy minden neutrínó tömege valóban zérus. A graviton egy feltételezett zérus tömegű részecske, melyet a gravitációval kapcsolatos modern elméletekben használunk.

Amikor az E energia sokkal nagyobb, mint az mc^2 nyugalmi energia, a (41-22) képlet első tagját el lehet hanyagolni, amivel egy új hasznos összefüggéshez jutunk.

NAGY ENERGIÁS KÖZELÍTÉS $\qquad E \approx pc \quad (\text{ha } E >> mc^2) \qquad$ **(41-26)**

41-10 PÉLDA

Adjuk meg annak a protonnak a) az impulzusát, b) a sebességét, amelynek a mozgási energiája egyenlő a nyugalmi energiájával!

MEGOLDÁS

a) A (41-23) képletből

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{K^2 + 2mc^2K} = \frac{K}{c}\sqrt{1 + 2\frac{mc^2}{K}}$$

Mivel $K = mc^2$, ekkor

$$p = \frac{mc^2}{c}\sqrt{1+2} = \frac{(938\,\mathrm{MeV})}{c}\sqrt{3} = 1625\frac{\mathrm{MeV}}{c}$$

b) Mivel $K = mc^2$, ezért $E = mc^2 + K = 2mc^2$. Így a (41-24) képletből

$$v = \frac{pc^2}{E} = \frac{\left(1625\dfrac{\mathrm{MeV}}{c}\right)(c^2)}{(2)(938\,\mathrm{MeV})} = 0{,}866c \quad \text{vagy} \quad 2{,}60\times 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

41-11 PÉLDA

Adjuk meg a) az E teljes energia, b), a K mozgási energia és c) a p impulzus értékét egy $v = 0{,}6c$ sebességű elektron esetére!

MEGOLDÁS

a) $$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Minthogy $\sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-(0{,}6)^2} = 0{,}8$ és $mc^2 = 0{,}511$ MeV, kapjuk, hogy

$$E = \frac{0{,}511\,\mathrm{MeV}}{0{,}8} = 0{,}639\,\mathrm{MeV}$$

b) A mozgási energia:

$$K = E - mc^2 = 0{,}639\,\mathrm{MeV} - 0{,}511\,\mathrm{MeVm} = 0{,}128\,\mathrm{MeV}$$

c) Az impulzus: $p = mv/\sqrt{1-\beta^2}$. Ha a számlálót és a nevezőt c^2-tel megszorozzuk, azt kapjuk, hogy

$$p = \frac{mc^2 v}{\sqrt{1-\beta^2}c^2} = \frac{(0{,}511\,\text{MeV})(0{,}6c)}{(0{,}8)(c^2)} = 0{,}383\frac{\text{MeV}}{c}$$

41-12 PÉLDA

Egy gyorsítóból protonok lépnek ki 500 GeV (5×10^5 MeV) mozgási energiával. a) Mennyivel tér el β az egységtől ezekre a protonokra? b) Mekkora az impulzusuk GeV/c egységekben?

MEGOLDÁS

a) Minthogy a protonok mozgási energiája 500-szor nagyobb a nyugalmi energiájuknál, alkalmazhatjuk az extrém-relativisztikus esetre vonatkozó közelítést (lásd a 41-4 példát):

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cong \frac{mc^2}{\sqrt{2(1-\beta)}}$$

Átrendezéssel:

$$\sqrt{2(1-\beta)} = \frac{mc^2}{E} = \frac{938\,\text{MeV}}{5\times10^5\,\text{MeV}} = 1{,}876\times10^{-3}$$

$$(1-\beta) = \frac{(1{,}876\times10^{-3})^2}{2} = 1{,}76\times10^{-6}$$

b) A (41-26) képletből adódik, hogy

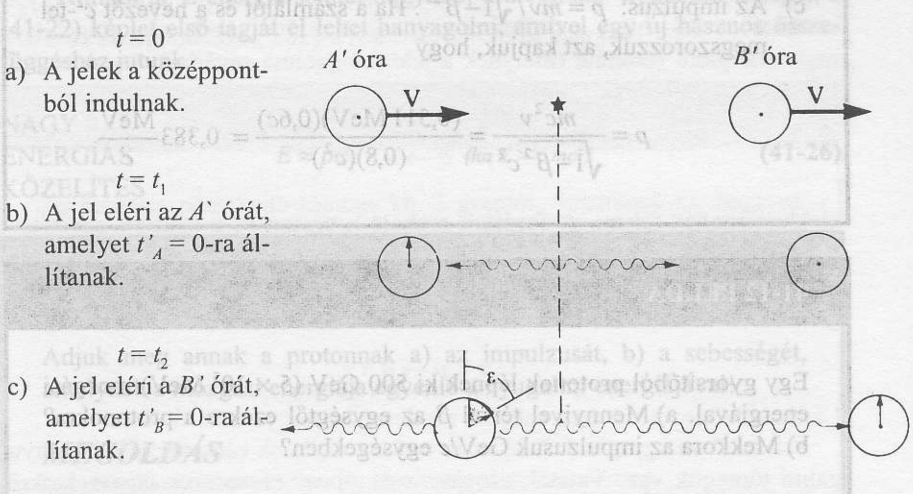
$$p = \frac{E}{c} = \frac{500\,\text{GeV}}{c}$$

Figyeljük meg, hogy milyen nyilvánvaló előnyökkel jár az impulzus GeV/c egységekben való kifejezése.

41.13 A mozgó órák aszinkronitása

Az S' rendszerben előírás szerint szinkronizált órák rendszere az S vonatkoztatási rendszerből nem látszik megfelelően szinkronizáltnak. Az idődilatáció mellett ez a jelenség talán a legnagyobb próbatétele a józan észre épülő elgondolásainknak. Ez a jelenség a forrása a speciális relativitás legtöbb – úgynevezett – „paradoxonának”.

Idézzük fel az A' és a B' óra szinkronizálásának a módszerét. Ezek az órák az S' rendszerben nyugalomban vannak (41.3 pont). Az S' rendszerből nézve az órák között félúton lévő villanólámpa az ellenkező irányban lévő órák felé fényjelet küld. Amikor a fényimpulzus az órákhoz érkezik, az órákat a $t' = 0$ időpontra állítják. Ezzel az eljárással az A' és B' helyesen van szinkronizálva az S' rendszerben.



41-15 ábra

Az S rendszerben mérve úgy tűnik, hogy az S'-ben előírás szerint szinkronizált órák ε-nal kiestek a szinkronitásból. Természetesen *az S' rendszerben* az órákat helyesen szinkronizálták, mert a 41-4 ábrán bemutatott eljárást követték. Az egyidejűségnek nincs abszolút, vonatkoztatási rendszertől független jellege.

Most vizsgáljuk meg ezt az eljárást az S vonatkoztatási rendszerből (lásd a 41-15 ábrát). Minthogy az A' óra a fényjel felé mozog, a fényimpulzussal előbb találkozik, ezért ezt az órát előbb állítják a $t'_A = 0$ értékre. A (fényjellel egy irányban mozgó) B' óra a fényjelet (az S rendszer szerint) egy későbbi időpontban fogja fel, és csak akkor állítják a B' órát a $t'_B = 0$ időpontra. Így az S megfigyelői szerint a hátsó óra későbbi időpontot fog mutatni, mint az elülső óra. Vagyis: az S rendszerben egy adott időpontban az órák nem lesznek szinkronban.

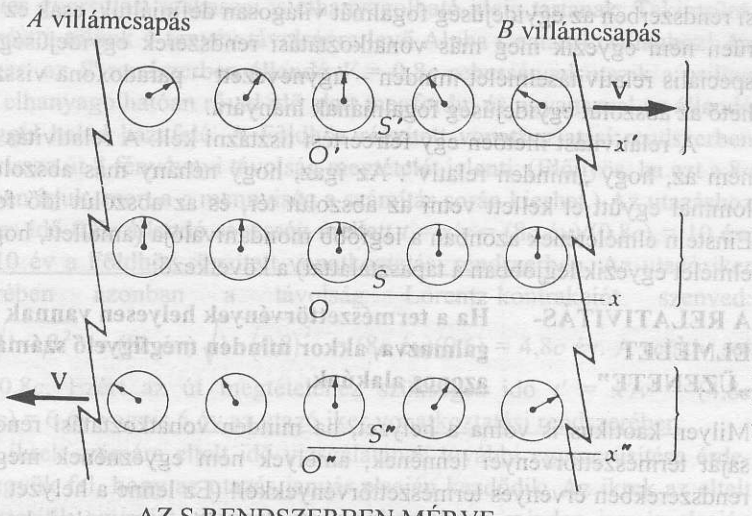
Természetesen a helyzet szimmetrikus. Az S' megfigyelői ehhez hasonló módon azt állapítják meg, hogy az S órái nincsenek megfelelően szinkronizálva. Mégis: az órák szinkronizálása olyan időskálát állapít meg, *amellyel az események egyidejűsége egy-egy vonatkoztatási rendszerben megállapítható.* Viszont nincs értelme annak, hogy az egyik rendszer szerinti egyidejűséget a másiknál többre értékeljük. Ezért a (térben egymástól távol végbemenő) egy vonatkoztatási rendszerben egyidejűnek tűnő események nem szükségszerűen egyidejűek egy másik vonatkoztatási rendszerben. Az aszinkronitás mértéke közvetlenül kapcsolatos a Lorentz-transzformáció időre vonatkozó képletének (Vx'/c^2) tagjával. Következésképpen a t' idő nemcsak a t és a V, hanem az x helykoordináta értékétől is függ. A relativitáselméletben a hely és időkoordináták különböző rendszerekben kölcsönösen függnek egymástól. Megmutatható, hogy két, egymáshoz képest mozgó óra által mért idő közti különbség a következő:

MOZGÓ ÓRA-RENDSZEREK ASZINKRONITÁSA

Az S' rendszerben helyesen szinkronizált két óra, melynek távolsága $\Delta x'$, az S rendszer megfigyelői számára helytelenül szinkronizáltnak látszik, az eltérés

$$|\varepsilon| = \frac{V\Delta x'}{c^2} \qquad \textbf{(41-27)}$$

A hátulsó óra **késõbbi** *időpontot mutat, mint az elülső óra.*



41-16 ábra
Három vonatkoztatási rendszer óráinak összehangolása adott időpontban az *S* rendszerből mérve. Mindegyik órarendszert a maga vonatkoztatási rendszerében helyesen szinkronizálták. Ugyanakkor azonban az *S* rendszerből mérve a mozgó órarendszer nem látszik szinkronizáltnak. Az összehasonlítás megkönnyítése végett feltesszük, hogy a rendszerek origójában lévő órák zérus időpontot mutatnak az egybeeséskor.

Az *S*-beli megfigyelők számára azonban csak az x' tengely iránya mentén elhelyezett órák szinkronizmusa sérül ilyen módon; az y', ill. a z'-tengely irányában (az S'-ben) lévő órák mindkét vonatkoztatási rendszerből nézve helyesen szinkronizáltak maradnak.

A szinkronitás sérülésének egy másik vonása tárul fel, ha három vonatkoztatási rendszert veszünk tekintetbe, amelyek mindegyikében egy sor óra helyezkedik el a mozgás irányában (lásd a 41-16 ábrát). Tekintsük nyugvónak az S rendszert, mozogjon, az S' rendszer a $+x$ irányban, az S'' rendszer pedig a $-x$ irányban. Az egyszerűség kedvéért feltesszük továbbá, hogy a centrumokban lévő órák mindegyike zérust mutat egy, az *S*-ben kijelölt pillanatban. A mozgó órasor esetén minden egyes óra *későbbi* időpontot mutat, mint a sorban előtte lévő. Tegyük most fel, hogy az adott időpontban egy-egy villámcsapás, *A* és *B* éri rendre a bal és a jobb oldali óracsoportot. Ezt a két eseményt az *S* megfigyelői egyidejűeknek észlelik, mert a becsapódások helyén az órák ugyanazt az időpontot mutatják. Ellenben az S' rendszer óráit leolvasva a *B* esemény az *A* esemény előtt következett be, míg az S'' megfigyelői szerint az *A* esemény következett be *B* előtt. Ennélfogva nincsen abszolút egyidejűség!

Vajon nem jelenti-e az események sorrendjének ez a megfordulása azt, hogy valamelyik vonatkoztatási rendszerben az „okozat" megelőzheti az „okot"? Előfordulhat-e, hogy a nyíl előbb csapódjon a céltáblába, mint ahogyan az íj húrját elhagyta volna? Nem! Gondos elemzés feltárja, hogy csak azoknak az eseményeknek a sorrendje fordulhat meg a vonatkoztatási rendszer megváltoztatásával, amelyeket sehogyan sem lehet oksági kapcsolatba hozni. Így a relativitáselmélet fenntartja az okság fontos elvét.

Hangsúlyozni kell, hogy az események sorrendjére vonatkozó eltérő eredmények nem abból adódnak, hogy egy távoli eseménytől származó fényjelnek véges időre van szüksége, míg a megfigyelőhöz elér (és így a megfigyelő az egyik eseményt a másik után látja). Még akkor is fennmaradnak az egyidejűség (vagy a nem-egyidejűség), különleges tulajdonságai, ha a véges jelátfutási időt figyelembe vesszük. Természetesen adott vonatkoztatási rendszerben az egyidejűség fogalmát világosan definiáltuk, csak ez egyszerűen nem egyezik meg más vonatkoztatási rendszerek egyidejűségével. A speciális relativitáselmélet minden – úgynevezett – paradoxona visszavezethető az abszolút egyidejűség fogalmának hiányára.

A relativitást illetően egy félreértést tisztázni kell. A relativitás üzenete nem az, hogy „minden relatív". Az igaz, hogy néhány más abszolút fogalommal együtt el kellett vetni az abszolút tér, és az abszolút idő fogalmát. Einstein elméletének azonban a legfőbb mondanivalója (amellett, hogy ez az elmélet egyezik legjobban a tapasztalattal) a következő:

A RELATIVITÁS-ELMÉLET „ÜZENETE"	**Ha a természettörvények helyesen vannak megfogalmazva, akkor minden megfigyelő számára azonos alakúak.**

Milyen kaotikus is volna a helyzet, ha minden vonatkoztatási rendszernek saját természettörvényei lennének, amelyek nem egyeznének meg a más rendszerekben érvényes természettörvényekkel! (Ez lenne a helyzet ugyanis, ha valaki a newtoni fogalmakhoz ragaszkodna.) Einstein azáltal, hogy olyan modellt adott, amelyben a természet minden vonatkoztatási rendszerben ugyanolyan módon viselkedik, nagy egyszerűsítő lépést tett az Univerzum megértésében.

41.14 Az ikerparadoxon

Az úgynevezett ikerparadoxon egymaga több vitát okozott, mint bármely más kérdés a relativitáselméletben.[10] Röviden kifejtve az ikerparadoxon a következő: két iker él a Földön. Az egyik elhatározza, hogy relativisztikus utazást tesz egy távoli csillaghoz, majd visszatér. A relativitás elmélet szerint, amikor az utazó iker visszatér, fiatalabb lesz, mint a Földön maradó testvére. A paradoxon akkor adódik, ha felvetjük, hogy vajon: az utazó iker miért nem állíthatja, hogy mivel ő vonatkoztatási rendszeréből nézve a Földön maradt testvére mozgott hozzá képest nem ő, hanem a földi testvér maradt fiatalabb az újratalálkozáskor? Végtére is nem éppen a relativitás elmélet állítja, hogy az abszolút mozgás csupán fikció?! Nem lehet az ikertestvérek közül bármelyiket mozgónak vagy nyugvónak tekinteni, és így a helyzetet szimmetrikusnak felfogni? Nem bizony! Mert az utazó testvérnek valamiképpen gyorsulnia kell, hogy a visszatéréshez megváltoztassa a sebességét, a gyorsulás pedig csak az utazó iker vonatkoztatási rendszerével kapcsolatos! A gyorsulás abszolút, nem pedig relatív dolog, ezért az esemény nem szimmetrikus. A következmények részletezése fáradságos, de a következtetés elkerülhetetlen: az utazó iker valóban fiatalabb lesz visszatértekor, mint a Földön maradt testvére.

Az ikerparadoxont a speciális relativitáselmélet keretei között is elemezhetjük, ha az utazást egyenes vonal mentén lezajló mozgásként képzeljük el, melynél a fordulással járó gyorsulási szakaszok elhanyagolhatóan rövidek a többi időintervallumhoz képest,[11] valamint feltételezzük, hogy az indulás és

[10] A relativitáselméletről kitűnő információforrás a Resource Letter SRT-1 (Selected Reprints: Special Relativity Theory), amit az American Institute of Physics adott ki (335 East 45th Street, New york, NY:10017) A relativitáselmélet történeti előzményeinek érdekes diszkussziója található G. Holton cikkében: American Journal of Physics 28. 627 (1960). Az ikerparadoxon átfogó ismertetésének kérdésében lásd L. Marder: Time and the Space Traveller (University of Pennsylvania Press 1971).

[11] Kísérletileg (a Mössbauer effektus segítségével) bebizonyították, hogy gyorsulások egészen a 10^{16} g értékig nem befolyásolják az órák járását. Csak a relatív sebességek teszik ezt. Lásd C. W. Sherwin, Physical Review 120. 17 (1960).

a megállás gyorsulási szakaszai is elhanyagolható ideig tartanak. Tekintsünk egy utazást a tőlünk 4 fényév távolságra levő Alpha Centauri csillaghoz! Az egyik iker, az S' rendszerben állandó $V = 0{,}8c$ sebességgel utazik a csillag felé, ott elhanyagolhatóan rövid idő alatt megfordul és ugyanazzal az állandó sebességgel halad hazafelé. A Földhöz régzített vonatkoztatási rendszerben az oda-vissza út 8 fényévnyi távolság megtételét jelenti. (Előnyös, ha ezt a $8c$ év alakban írjuk, mert a c mennyiség a számítás során kieshet.) Az utazáshoz szükséges idő $0{,}8c$ állandó sebesség mellett $t = x/v = (8c \text{ év})/(0{,}8c) = 10$ év, vagyis 10 év a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben. Az utazó iker rendszerében azonban a távolság Lorentz-kontrakciót szenved: $L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = (8c \text{ év})\sqrt{1-(0{,}8)^2} = (8c \text{ év})(0{,}6) = 4{,}8c$ év. A relatív sebesség $0{,}8c$. Ezért az út megtételéhez szükséges idő $t' = x'/v = (4{,}8c \text{ év})/(0{,}8c) = 6$ év vagyis 6 év az utazó iker vonatkoztatási rendszerében.

Az ikrek számára eltelt idő vizsgálatának további egyszerűsítése érdekében tegyük fel, hogy az utazás január elsején kezdődik. Az ikrek az eltelt időről értesítik egymást, megegyeznek abban, hogy minden január elsején rádió jelekkel újévi köszöntést küldenek egymásnak. Ezek a rádiójelek c sebességgel terjednek, és gyakoriságuk 1 impulzus/év (helyi időskála szerint). A 41-17 ábra az utazás diagramját mutatja a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben. Itt a távolságot a vízszintes tengelyen (fényév egységekben), a függőleges tengelyen pedig az időt (években) ábrázoltuk.

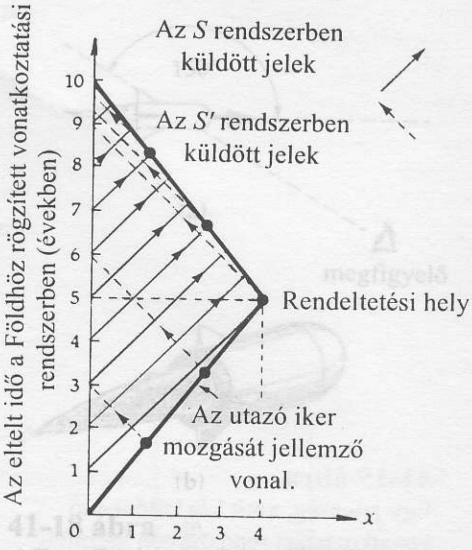
Most pedig a fény *relativisztikus Doppler-eltolódásának* ismert és jól igazolt effektusát fogjuk felhasználni (ami hasonlít a hang Doppler-effektusához, lásd a 18.10 pontot). A relativisztikus Doppler-összefüggés mozgó forrásból érkező fényjel (vagy bármilyen más elektromágneses jel) frekvenciájának eltolódását írja le. (Emlékezzünk azonban arra, hogy a mozgó forrásból érkező fény sebessége is mindig c.) Amikor a fényforrás a megfigyelőtől $V = \beta c$ sebességgel távolodik, a felfogott sugárzás f frekvenciája kisebb, mint a forrás által kibocsátott f_0 frekvencia. Amikor a forrás a megfigyelőhöz közeledik, akkor a felfogott frekvencia nagyobb mint f_0.[12]

	Távolodó fényforrás	**Közeledő fényforrás**	
RELATIVISZTIKUS DOPPLER-ELTOLÓDÁS FÉNYNÉL	$f = f_0\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$	$f = f_0\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$	**(41-28)**

Az ikerparadoxon példájában a rádiójeleket $f_0=1$ impulzus per év frekvenciával küldik. A fényforrás sebessége $\beta = 0{,}8$. Ha ezeket az értékeket behelyettesitjük a Doppler-eltolódás képletébe, megkapjuk az észlelt frekvenciákat, (az észlelt jelgyakoriságot):

távolodáskor $$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = f_0\sqrt{\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}} = \tfrac{1}{3}f_0$$

közeledéskor $$f = f_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = f_0\sqrt{\frac{1+0{,}8}{1-0{,}8}} = 3f_0$$



A FÖLDHÖZ RÖGZITETT S VONATKOZTATÁSI RENDSZERBEN RAJZOLVA

41-17 ábra

Az ikerparadoxon diagramja a földi vonatkoztatási rendszerben. Az utazó iker egyenes mentén $v = 0{,}8c$ sebességgel mozog. (Az indulás, a fékezés, a megfordulás időintervallumai a feltevés szerint elhanyagolhatóan kicsik.) A helyi idő szerint mindegyik iker a másiknak minden január elsején rádiójelet küld. Ezek a rádiójelek a fény c sebességével haladnak és ezért az x-tengelyhez képest 45°-os egyenesekkel ábrázoltuk a jelek útját.

[12] Ha a látóvonal és a forrás mozgásának iránya által bezárt szög θ, akkor az összefüggés

$$f = f_0\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta}\right)$$

Amikor $\theta = 90°$, akkor a frekvenciaeltolódás éppen az idődilatáció effektusával egyezik meg.

Világos, hogy az utazás tartama alatt a Földön (az S rendszerben) 10 esztendő telik el. A legmeglepőbb dolog az, hogy ezalatt az S'-ben csak 6 esztendő telik el. Ez utóbbi időtartamot az ikerpár bármely tagja saját vonatkoztatási rendszerében is kiszámolhatja, felhasználva a relativisztikus Doppler-összefüggéseket, és figyelembe véve a testvérétől érkező rádiójelek gyakoriságát. A számolás menete a következő:

Az S'-ben számolva: Az S'-ben lévő iker 3 évente fog fel jelet az utazás első felében, és 3 jelet észlel évente az utazás második felében. A jelészlelés átlagos gyakorisága az egész utazás alatt így

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\right)(3)=\tfrac{5}{3} \text{ évente.}$$

Összesen tíz jel érkezett, így a teljes idő: 10/(5/3) = 6 év!

Az S-ben számolva: Az S-ben lévő iker évente 1/3 gyakorisággal fog fel jeleket az utazás első 9 éve alatt és 3 jel/év gyakorisággal az utazás utolsó évében. A felfogott jelek száma az S-ben így (1/3)(9) + (3)(1) = 6, ami azt jelenti, hogy hat év telt el S'-ben.

Így mindkét iker arra a következtetésre jut, hogy S'-ben 6 év telt el az utazás alatt. Jóllehet mindkét iker öregedett az utazás során, a találkozáskor az űrutazó iker 4 évvel fiatalabb, mint testvére, aki a Földön maradt.

A részletesebb elemzés azt mutatja, hogy a jelenség döntő mozzanata az S' rendszer mozgásának a fordulópontja. Ez a gyorsulás ugyan nem változtatja meg az órák *járásának ütemét*, de drámaian megváltoztatja az *egyidejűség skáláját* az S' számára (lásd pl. a 41-15 ábrát). Csábítást érezhet az Olvasó a részletek kidolgozására. (Ötlet: vázoljuk fel az órák rendszerét a két vonatkoztatási rendszerben a fordulás különböző pillanataira, de gondosan csak *pontszerű eseményeket* rajzoljunk, amelyeket adott pillanatban az adott vonatkoztatási rendszerben mérnek. Emlékezzünk arra, hogy események, amelyek egy vonatkoztatási rendszerben egyidejűek, nem szükségképpen egyidejűek egy másik vonatkoztatási rendszerben)[13]

Az ikerparadoxon-effektust bőséges kísérleti eredmény igazolja. Az egyik kísérletben például igen rövid felezési idejű radioaktív részecskéket vezetnek nagy energiájú részecskegyorsítók „tárológyűrűjébe", és nagy sebesség mellett vizsgálják a részecskék bomlását. E részecskékből több éli túl az egy körbefutást, mint amennyire számítanánk hasonló, de a laboratóriumhoz lépest nyugalomban levő részecskék bomlása esetén egyszerűen azért, mert az „utazó" vonatkoztatási rendszerében kevesebb idő telik el. Az egyik kísérletben az eltérés egy 30-as tényező volt, pontos egyezésben a relativitáselmélet megállapításával. Az első olyan kísérletet, amit makroszkópikus órákkal hajtottak végre, 1971-ben végezték, mikoris négy cézium-órát vittek körbe repülőgépen a Föld körül, kettőt keleti, kettőt nyugati irányban[14]. Az eredmények igazolták az ikerpardoxon-effektust. Persze különösnek látszik, hogy két eredetileg szinkronizált óra, amelyek *mindegyike a helyes sajátidőt mutatja*, az utazás során egymástól eltávolodva majd újra találkozva, eltérő

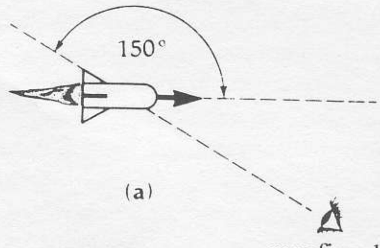
---

[13] Ennek a következményeit egy tanulmányban E. S. Lowry magyarázza, *American Journal of Physics*, 31, 59 (1963). Az ikerparadoxon jó tárgyalása található G. David Scott cikkében: *American Journal of Physics* 27. 580 (1959) és A. Schild tanulmányában: *American Mathematical Monthly*, 66. 1 (1959).

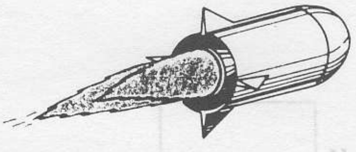
[14] Lásd még J. C. Hafele-R. E. Keating: „Around the World Atomic Clocks", *Science*, 177. 166-170 (1972 júl. 14.) című két egymást követő cikkét. Későbbi kísérletek az effektust 1%-nál nagyobb pontossággal igazolták.

időt mutat. Pedig ez az ikerparadoxon effektusának lényege. S ez csupán a következménye annak a ténynek, hogy nincsen abszolút idő, nincsen abszolút egyidejűség.

Utolsó megjegyzésként egy meglepő példával illusztráljuk az ikerparadoxont: egy elképzelt egyenesvonalú utazással, amelyben egy űrhajó mindvégig állandó g gyorsulással halad mégpedig úgy, hogy kifelé félútig gyorsul, az út másik felén pedig lassul, és a célállomásnál megáll. A visszautazást hasonló módon hajtják végre. Az ilyen állandó g gyorsulásos utazás kényelmesen elviselhető az utazók számára, hiszen ez a megszokott földi feltételeket szimulálja. A 2 millió fényév távolságra levő Andromeda-galaxishoz utazva az űrhajón csak 59 év telne el, míg a Föld több mint 4 millió évvel lenne idősebb az űrhajó visszaérkezésekor. Egy hasonló, de az űrhajó vonatkoztatási rendszerében 78 évig tartó oda-vissza út során 500 millió fényév távolságra juthatnánk el és visszaérve, a Földet több, mint egy milliárd évvel látnánk idősebbnek. Az ilyen utazások, bár semmiféle természeti törvény nem tiltja őket, a felmerülő műszaki nehézségek miatt gyakorlatilag lehetetlenek.[15]



(a)



(b)

41-18 ábra

A Terrell-jelenség. James Terrell megmutatta (elég meglepő módon), hogy ha gyorsan mozgó objektumról elég nagy távolságból fényképet készítünk, akkor az objektum látszólag elfordul nem pedig megrövidül. Miként az alább idézett cikkben említi, Terrell relativisztikus űrhajót vizsgál, ami a megfigyelőhöz $v/c = 0{,}98974$ sebességgel közeledik, és a tárgyat a megfigyelő a mozgás irányához képest 150°-os irányból nézi, ahogyan az (a) vázlat mutatja. A (b) vázlat szerint, a fénykép, illetve a tárgy vizuális megjelenése a megfigyelő számára azt mutatja, hogy a tárgy csaknem a végével közeledik a megfigyelőhöz. Ez a szokatlan jelenség részben abból a tényből származik, hogy a fényképezőgép a számára egyidejűleg beérkező fényeket regisztrálja. Így az objektum távolabbi részeiről korábban kellett elindulniuk a fényjeleknek, mint a közelebbi részeiről, hiszen az előbbieknek több utat kellett megtenniük. További váratlan nyíró-jellegű torzulást okoz az, ha véges térszögből szemléljük a tárgyat, illetve ha térhatású képeket kapunk. A példa azt támasztja alá, hogy a kísérletekben nyert adatok az alkalmazott mérési módszerektől milyen döntő mértékben függenek. (Lásd James Terrell „The Terrell Effect", *American Journal of Physics* 57. 9 (1989))

41.15 A relativitáselmélet és az elektromágnesesség

Tekintsünk egyetlen q töltést, ami az S' vonatkoztatási rendszerben nyugalomban van. Az S'-ben lévő megfigyelők a töltés körül elektromos erőteret észlelnek. Az S-ben lévő megfigyelők számára ez a töltés mozog, ezért nemcsak elektromos, hanem mágneses erőtere is van, a mozgó elektromos töltés ugyanis elektromos áramot képvisel, már pedig az áramok mágneses erőteret keltenek. Így tehát az elektromos és a mágneses erőtér a két – egymáshoz képest mozgó – vonatkoztatási rendszerből különbözőnek látszik. Érdekes, hogy ez volt az a jelenség, ami Einstein speciális relativitásról írt tanulmányának eredetileg a témája volt: „A mozgó testek elektrodinamikája „(*Annalen der Physik* 17. 891-921. (1905)). A tér és az idő új, meglepő fogalmainak mindegyike, amiről a relativitáselmélet híres lett, egyetlen embernek az elméjéből pattant ki, aki a mozgó töltések problémáján gondolkodott.*

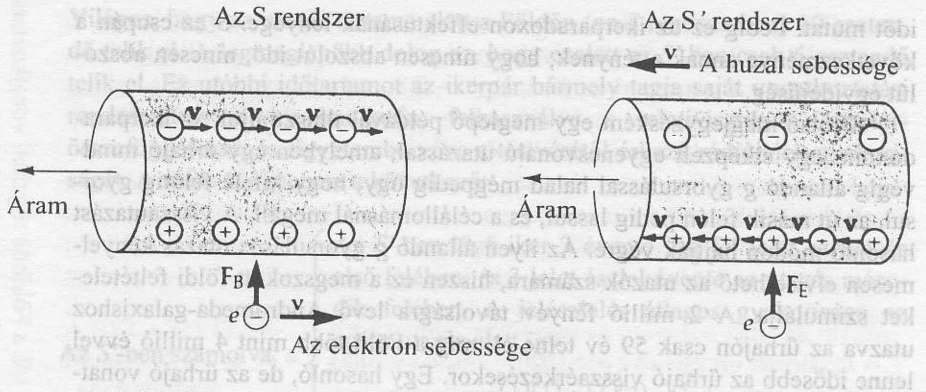
Most olyan helyzetet írunk le, ami világosan mutatja, hogyan lehet az, hogy az egyik vonatkoztatási rendszer elektromos erőterét a másik vonatkoztatási rendszerbeli mágneses erőtérként látjuk. Ez az elrendezés ugyan kissé mesterkélt, de világosan mutatja az elektromágnesség és a relativitáselmélet érdekes kapcsolatát.

Tegyük fel, hogy egy e elektron áramtól átjárt huzal mentén azzal párhuzamosan mozog (41-19a ábra). Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az elektronokat a huzalban a pozitív ionoktól elkülönítve ábrázolhatjuk, és az elektronok v áramlási sebességgel egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek. A huzalon kívüli e elektront is v sebességgel mozgatjuk és feltesszük, hogy a huzalnak nincsen eredő töltése. A huzalban folyó áram mágneses erőteret hoz létre, amely a mozgó elektron helyén az ábra síkjából kifelé mutat. Emiatt az elektronra a huzal felé mutató $\mathbf{F_B}$ mágneses Lorentz erő hat. Az elektron a huzal felé gyorsul.

Most pedig vizsgáljuk meg ugyanezt a helyzetet a 41-19b ábrán a mozgó töltés szempontjából. Itt a huzal mozog bal felé és az e elektron áll. Az

[15] A hosszútávú űrutazás gyakorlati nehézségeinek érdekes áttekintése található S. von Hoerner tanulmányában, „The General Limits of Space Travel" (Az űrutazás általános korlátai) *Science* 137. (1962) 18-23.

* Ez a megállapítás kissé túlzó, a relativitáselmélet fogalmai mások, pl. Lorentz és Poincaré munkásságához is kapcsolódnak (a fordító megjegyzése.)



Feltételek:	Feltételek:
1. A pozitív töltések nyugalomban vannak	1. A negatív töltések nyugalomban vannak
2. A negatív töltések jobb felé mozognak v sebességgel. Ezért a negatív töltések közti távolság Lorentz-kontrakcióban látszik.	2. A pozitív töltések bal felé mozognak v sebességgel. Ezért a pozitív töltések közti távolság Lorentz-kontrakcióban látszik.
3. Az eredő lineáris töltéssűrűség a huzal mentén zérus, (mert a Lorentz-kontrakcióban látszó távolság a mozgó negatív töltések között ugyanakkora, mint a nyugalomban lévő negatív töltések közti távolság.)	3. A huzal mentén az eredő töltéssűrűség pozitív (mert a nyugvó negatív töltések között a távolság nagyobb, mint a mozgó pozitív töltések közti Lorentz-kontrakcióban látszó távolság.)
4. Az *e* elektronra ható erő teljes egészében mágneses.	**4. Az *e* elektronra ható erő teljes egészében elektrosztatikus.**
a)	b)

41-19 ábra

Egy jelenség, amit két különböző vonatkoztatási rendszerben szemlélhetünk. Az, hogy az elektronra ható erő mágneses vagy elektrosztatikus vagy éppen a kettő kombinációja, az a vonatkoztatási rendszer megválasztásától függ. Az S rendszerben az e elektron jobb felé mozog v sebességgel, a huzal pedig nyugalomban van. Az elektronra ható erő *teljes egészében mágneses*. Az S'-ben a huzal mozog balra v sebességgel és az e elektron van nyugalomban. Ekkor az elektronra ható erő *teljes egészében elektrosztatikus*.

elektron rendszerében történő megfigyelés szerint a huzal áramot visz, mert bár az elektronok nyugalomban vannak, a fém pozitív töltései balra mozognak. Mivel az elektron nem mozog, az $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ mágneses Lorentz erő zérus. Nyilvánvaló azonban, hogy ha az elektron az egyik vonatkoztatási rendszerben gyorsul a huzal felé, akkor minden más rendszerből nézve is gyorsulnia kell. Mi lehetne hát (ha nem a *mágneses* erőtér) annak az erőnek a forrása, ami a gyorsulást létrehozza?

Erre a speciális relativitáselmélet adja meg a választ. Az S rendszerből (41-19a ábra) nézve a pozitív ionok nyugalomban vannak, míg a huzal elektronjai $\mathbf{v}$ sebességgel mozognak jobb felé. Az elektronok a huzal mentén a $\sqrt{1-v^2/c^2}$ nagyságú Lorentz-kontrakció miatt közelebb látszanak egymáshoz, mint nyugalmi (saját) távolságuk. Ez a Lorentz-kontrakciót szenvedett távolság azonban éppen akkora, mint a mozdulatlan pozitív ionok közti távolság, hiszen a huzalnak nincsen eredő töltése. Az S' rendszerből nézve (ami az e töltés sebességével mozog) a helyzet egészen más. A huzal elektronjai nyugalomban vannak és így nagyobb távolságban látszanak egymástól, mint amennyire az S rendszerben voltak. Ugyanakkor a pozitív ionok a $\sqrt{1-v^2/c^2}$ Lorentz-kontrakciós tényező miatt közelebb látszanak egymáshoz. Összességében az S' megfigyelő, a *huzalnak pozitív töltést tulajdonít*. Ezért S'-ből szemlélve, az elektronra a huzal irányába mutató elektrosztatikus erő hat. A részletes elemzés azt mutatja, hogy *az S rendszerben a mágneses erő pontosan ugyanakkora, mint az S' rendszerben vizsgálva kapott elektrosztatikus erő.*

Ennek az elemzésnek az érvényessége azon a feltevésen alapul, hogy az elemi töltés nem függ a töltés és a megfigyelő relatív mozgásától. Kísérletek egész sora mutatja e feltevés igazságát. Így például amikor egy fémdarabot melegítünk, az elektronok hőmozgása sokkal jobban növekszik, mint a pozitív ionoké. Mégsem tapasztaljuk, hogy a fémdarab eredő töltése megváltozna.

Idézzük fel újra a 28-1 példát, amely azt mutatta, hogy az elektronok vándorlási sebessége egy huzalban, amelyben áram van csak kb. 0,1 mm/s nagyságrendű. Milyen meglepő, hogy az ilyen kicsiny sebesség mellett fellépő mágneses erőtérről a relativisztikus Lorentz-kontrakciós effektus ad számot.

41.16 Az általános relativitáselmélet

Mindezideig elkerültünk egy különös rejtélyt. A tömegnek két, látszólag különböző tulajdonsága van: gravitációs vonzóképessége és tehetetlensége a gyorsítással szemben. Ez a két tulajdonság látszólag különböző. Hogy ezt a különbséget kifejezzük, a gravitációs tulajdonság és a tehetetlenségi tulajdonság jelölésében g és t indexet használunk.

Gravitációs tulajdonság $W = m_g g$

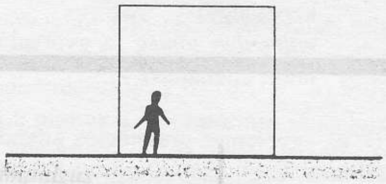
Tehetetlenségi tulajdonság $F = m_t a$

A G gravitációs állandó értékét úgy választottuk meg, hogy m_g és az m_t számértékre egyenlő legyen. Tekintet nélkül azonban a G érték rögzítésére, m_g és m_t szigorú *arányosságát* kísérletileg rendkívüli nagy pontossággal megállapították,• a relatív eltérés kevesebb, mint 10^{-12}. Ennélfogva úgy látszik, a gravitációs és a tehetetlen tömeget pontosan arányosnak tekinthetjük.

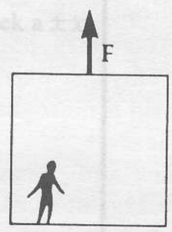
De miért? Mikor úgy látszik, hogy az anyag két teljesen különböző tulajdonságát fejezik ki: a tömegek közti kölcsönös gravitációs vonzást és tömeg reakcióját a gyorsítással szemben. Ez a körülmény már Newton és más fizikusok érdeklődését is felkeltette, mígnem aztán Einstein 1916-ban nyilvánosságra hozta gravitációs elméletét, amit *általános relativitáselmélet* néven ismerünk. Az elmélet matematikai szempontból bonyolult, így csak utalhatunk arra az eleganciára és mélységre, amely Einsteinnek ezt az alkotását jellemzi.

Einstein nézete szerint az a figyelemreméltó tény, hogy m_g és m_t szigorúan arányos egymással, a két fogalom igen mély belső kapcsolatának a megnyilvánulása. Rámutatott arra, hogy *mechanikai* kísérlettel (pl. testek ejtésével) nem lehet megkülönböztetni a 41-20 (a és b) ábrán felvázolt két különböző helyzetet. A megfigyelő által elengedett test mindkét esetben g gyorsulással mozog lefelé, a kabin padlója felé.

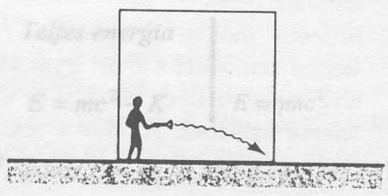
Einstein ezt az elgondolást tovább folytatva elmélete egyik alapposztulátumaként azt a feltevést javasolta, hogy nincs olyan mechanikai, vagy bármely más jellegű fizikai kísérlet, amelynek alapján a fent vizsgált két eset között különbséget lehetne tenni. A gyorsuló, ill. gravitációs térbe helyezett rendszerek egyenértékűségének ez a fajta általános, bármely jelenségkörre való kiterjesztése igen érdekes következményekkel jár. Tegyük fel például, hogy egy fényimpulzust küldünk a kabinon keresztül vízszintes irányban, ahogy a 41-20 (c) ábra mutatja. A felfelé gyorsuló kabinban a fényimpulzusnak lefelé, a kabin padlója felé görbülő pályája lenne. Einstein elgondolása



a) Homogén gravitációs erőtérben nyugvó megfigyelő, a g gyorsulás a gravitáció következménye.



b) Megfigyelő – elhanyagolható gravitációjú térrészben. A vonatkoztatási rendszert külső F erő a térben állandó g gyorsulással mozgatja.



c) Ha az (a) és (b) igazán egyenértékűek, ahogyan Einstein elképzelte, akkor a fénysugárnak a gravitációs erőtérben el kellene görbülnie. Ilyen effektus létét kísérletileg igazolták olyan fény-, illetve rádiójelek vizsgálatával, amelyek a Nap erős gravitációs terén haladtak át.

41-20 ábra

Einstein szerint ez a két vonatkoztatási rendszer, az (a) és a (b) minden tekintetben egyenértékű. Semmiféle fizikai kísérlettel sem lehet köztük különbséget tenni.

• (Ezt az arányosságot először Eötvös Loránd mutatta ki nagy pontossággal, kísérleti alapot szolgáltatva ezzel az általános relativitáselmélet megalkotásához (a fordító megjegyzése)) szerint így az (a) esetben is a fénysugárnak a gravitációs erőtérben lefelé (a gravitációs tér irányában) el kell görbülnie. (Ilyen fénysugárelgörbülés nem szerepelt Newton gravitációelméletében.)

Einstein **általános relativitáselméletének** két alapposztulátuma:

AZ ÁLTALÁNOS RELATIVITÁS-ELMÉLET ALAP-POSZTULÁTUMAI

1. **A természet törvényei megfogalmazhatóak úgy, hogy tetszőleges tér-idő-vonatkoztatási rendszerben bármely megfigyelő szerint azonos matematikai alakúak legyenek, akár gyorsul a vonatkoztatási rendszer, akár nem.** (Ez a *kovariancia-elve.*[16])

2. **Tetszőleges pont közelében a gravitációs tér minden tekintetben egyenértékű egy olyan gyorsuló vonatkoztatási rendszerrel, amelyben nincs gravitáció.** (Ez az *ekvivalencia-elv.*)

A második posztulátumnak az a következménye, hogy a gravitációs és tehetetlen tömeg nemcsak arányos, hanem teljesen egyenértékű is egymással. Amit eddig két különböző tömegnek gondoltunk, az most ténylegesen, alapvetően azonos.

Az általános relativitáselmélet által megjósolt érdekes hatások egyike, hogy az idő múlásának ütemét a gravitáció megváltoztatja. A gravitációs térbe helyezett óra lassabban jár, mint az olyan, melynek helyén a gravitáció elhanyagolható. Ennek következtében az erős gravitációs erőtérben lévő atomok által kibocsátott fény színképvonalai a kis frekvenciák felé tolódnak el, vagyis *vöröseltolódást* mutatnak az ugyanolyan atomok gyenge gravitációs térben kibocsátott fényének színképvonalaival összehasonlítva. Ezt a gravitációs vöröseltolódást a nagy tömegű csillagok által kibocsátott fény színképvonalainál ki is mutatták. A Földön is megfigyelték ezt az effektust, összehasonlítva egymástól 20 méteres szintkülönbségben elhelyezett azonos atommagok gammasugárzásának frekvenciáit[17].

A második posztulátum azt a benyomást kelti, hogy a „gravitációs erőtér kitranszformálható" bármely pontban, ha megfelelően gyorsuló – szabadon eső – vonatkoztatási rendszert választunk és arra térünk át. Einstein szellemes módszert dolgozott ki a szükséges gyorsulás egzakt jellemzésére. Speciális mennyiséget vezetett be, a *téridő görbületét*, amellyel a gravitációs hatás a téridő minden pontjában leírható. A görbült téridő ténylegesen helyettesíti Newton gravitációelméletét.[18] Einstein szerint nincs olyasmi, mint gravitációs erő. Ehelyett a nagy tömegek, mint pl. a Nap közelében a tömeg a téridőben görbületet okoz, ez a görbület kialakítja a téridőben azokat a pályákat, amelyeket a szabadon eső testek követnek. Ahogyan egy fizikus kifejezte: „A tömeg megmondja a téridőnek, hogy hogyan görbüljön, a görbült téridő pedig megmondja a tömegnek, hogy hogyan mozogjon".

Ha a tömegkoncentráció nagyon naggyá válik, – ami elképzeléseink szerint akkor következik be, pl., amikor egy nagy csillag elhasználta nukleá-

[16] Azt az egyenletet, amely a koordinátarendszerek közötti transzformáció alkalmazása után is ugyanolyan alakú marad, erre a transzformációra nézve *kovariánsnak* nevezzük.

[17] Lásd R. V. Pound – J. L. Snider: „Effects of Gravity on Gamma Radiation" (A gravitáció hatása a gamma-sugárzásra) *Physical Review* B. 140. 788 (1965) – Egy további kísérletről R. F. C. Vessot et al: „Test of Relativistic Gravitation with Space-Borne Hydrogen Maser" (A relativisztikus gravitáció ellenőrzése űrhajón elhelyezett hidrogén-mézerrel) *Physical Review Letters*, 45. 2081 (1980)

[18] A görbült téridő elméletébe bevezetés található pl. J. J. Callahan: „The Curvature of Space in a Finite Universe" (A térgörbület véges Univerzumban) *Scientific American*, (1970 aug) 90-100

ris üzemanyagát és igen kis térfogatúra omlik össze – akkor kialakulhat egy **fekete lyuk**. Itt a téridő görbülete már olyan nagy, hogy a centrumtól bizonyos távolságig, az összes anyag, beleértve a fényt is, csapdába kerül.

Ebben a fejezetben a relativitáselméletnek azokra a vonásaira irányítottuk a figyelmet, amelyek a térrel, az idővel, az energiával és az impulzussal kapcsolatosak. A relativitáselmélet igazán nagy jelentőségűvé az atomfizikai és a magfizikai alkalmazásokban, az elektromos és mágneses erőterek tárgyalásában, asztrofizikai és kozmológiai vizsgálatokban válik. Ez a rövid bevezetés csak felkeltheti az Olvasó étvágyát ennek az érdekes tárgykörnek a további részletes tanulmányozására. A relativitáselmélet minden bizonnyal az emberi elme legkimagaslóbb alkotásainak egyike.

Összefoglalás

A **speciális relativitáselmélet** két különböző (S és S') vonatkoztatási rendszerben vizsgált események mérési adatait hasonlítja össze, amikor a rendszerek egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek V sebességgel.

Pontszerű esemény (x, y, z, t) (Az S rendszerben); (x', y', z', t') (Az S' rendszerben)

Mindegyik eseményt az esemény helyén lévő helyi megfigyelő regisztrálja, akit a vonatkoztatási rendszer többi órájával szinkronizált órával láttak el..

A speciális relativitáselmélet posztulátumai

1. *A fizika minden törvényének ugyanaz az alakja bármely speciális vonatkoztatási rendszerben* (ez a relativitás elve).
2. *A fény sebessége (vákuumban) minden inerciarendszerben ugyanaz a c érték* (ez a fénysebesség állandóságának elve).

Ezekből a posztulátumokból a következő összefüggéseket lehet levezetni. (Megjegyezzük, hogy $\beta \equiv V/c$ és $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$.)

Az idődilatáció

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ ahol a T_0 olyan időintervallum kell, hogy legyen, amit egyetlen órával kell megmérni $$T = \gamma T_0$$

A hosszkontrakció

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2}$$ ahol L_0 olyan távolság kell, hogy legyen, amelyet olyan vonatkoztatási rendszerben kell megmérni, ahol az objektum nyugalomban van $$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

A relativisztikus impulzus

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad p = \gamma m v$$

Relativisztikus sebességösszeadás (olyan sebességekre, amelyek a $\pm x$ irányban mutatnak):

$$v = \frac{v' + V}{1 + \left(\frac{v'V}{c^2}\right)}$$

A mozgási energia

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2 \qquad K = mc^2(\gamma - 1)$$

A nyugalmi energia $E_0 = mc^2$ | *Teljes energia* $E = mc^2 + K$ | $E = \gamma mc^2$

Amikor a $E >> mc^2$, akkor $E \approx pc$. (Lásd a (41-22)-(41-25) képleteket is.)

Ha egy Δm mennyiségű tömeg eltűnik, amikor részecskék kötött rendszerré egyesülnek, akkor ehhez $\Delta E = (\Delta m)c^2$ nagyságú energia is társul, ami a rendszer kötési energiája.

Az *ikerparadoxon*. Amikor egy ikerpár egyik tagja relativisztikus oda-vissza úton vesz részt, akkor visszatértekor fiatalabb lesz, mint otthon maradó testvére.

A *mozgó órák aszinkronitása*. Két óra, melynek távolsága $\Delta x'$, s amelyek az S' rendszerben helyesen voltak szinkronizálva, az S megfigyelői számára helytelenül szinkronizáltnak bizonyulnak, az eltérés $|\varepsilon| = V\Delta x'/c^2$.

Az „üldöző” óra későbbi időt mutat, mint a „vezető” óra.

A relativitás üzenete: *Ha a természettörvényeket helyesen fogalmazzuk meg, azok minden megfigyelő számára* ***azonosak***.

Az általános relativitáselmélet. Kísérletek mutatják, hogy a tömeg két különböző tulajdonsága arányos egymással:

m_g = *gravitációs tömeg* (más tömegek vonzásának képessége)

m_i = *tehetetlen tömeg* (a gyorsulással szemben mutatott ellenállás)

A G, az egyetemes gravitációs állandója, úgy van meghatározva, hogy számszerinti egyezés álljon fenn m_g és m_i között. Einstein oly módon általánosította relativitáselméletét, hogy az magába foglalja a gyorsuló vonatkoztatási rendszereket és a speciális relativitáselmélet inerciarendszereit.

Az általános relativitáselméletelmélet posztulátumai

1. *A természettörvények minden vonatkoztatási rendszerben ugyanolyan alakúak, akár gyorsul a rendszer, akár nem* (ez a kovariancia elve).
2. *Tetszőleges gravitációs erőtér bármely pontja minden tekintetben egyenértékű egy gravitáció nélküli gyorsuló vonatkoztatási rendszerrel,* (ez az ekvivalencia elve).

A newtoni gravitációs erő helyére lépő görbült téridő határozza meg a szabadon eső testek által követett pályákat.

Kérdések

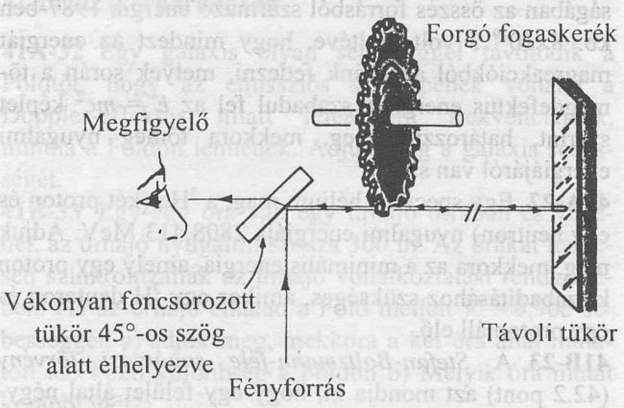
1. Miben járult hozzá Galilei a speciális relativitáselmélet felismeréséhez?
2. Magyarázzuk meg, hogyan lehet az, hogy az oszcilloszkóp ernyőjén mozgó pont a fény sebességénél gyorsabban is mozoghat anélkül, hogy megsértené a relativitás elvét.
3. Beszéljünk arról, hogy milyen lenne az élet, ha a fénysebesség, mondjuk, 100 km/óra lenne.
4. Soroljunk fel mennyiségeket, amelyek értékei két, egymáshoz viszonyítva mozgó inerciarendszerben különbözőek lennének. A fény sebességén kívül, mely mennyiségeknek lenne ugyanaz az értéke a két rendszerben?
5. Milyen körülmények között lehetne valaki idősebb a szüleinél?
6. Érdekes módon a speciális relativitáselméletben semmi sem tiltja a c-nél gyorsabb mozgásokat, feltéve, hogy az ilyen részecskék mindig a c-nél gyorsabban haladnak. Amikor a részecske a fény sebességét egyik vagy másik oldalról megközelíti, a c olyan korlát, amin egyik oldalról sem lehet áthatolni. Van olyan javaslat, hogy léteznek c-nél gyorsabban mozgó részecskék, amiket tachyonoknak neveznek, (a tachos (sebesség) görög szó alapján). Kísérleteket végeztek kimutatásukra, de eddig siker nélkül. Lehetne-e ezeknek nyugalmi tömegük? Mik lennének a kauzalitásban ennek a következményei? (Lásd Bilaniuk és Sudarshan: Particles beyond the Light Barrier” (Részecskék a fénykorláton túl) *Physics Today*, 1969 május, 43.)
7. Magyarázzuk meg, miért mondták azt, hogy a „relativitáselméletet” az „abszolutizmus elméletének” is lehetne nevezni.
8. Egy híres sci-fi-történetben idegenek több embert elrabolnak és egy úrhajón elviszik őket. Az egyik megjegyzi: „A fény sebességével utazunk – nézz az órádra!” Valaki más ránéz az órájára, majd felkiált: „Istenem megállt az órám!” Ennek a jelenetnek a leírásában hol tévedett a szerző?

Feladatok

41.6 Az órák összeigazítása
41.7 Hosszmérések összehasonlítása
41.8 A sajátidő és nyugalmi hossz

41B-1 A stanfordi lineáris elektrongyorsítóból kilépő elektronok sebessége a fénysebességtől $5\times10^{-11}c$-vel tér el. Adjuk meg ezt az eltérést cm/s egységekben.

41B-2 1849-ben H. L. Fizeau kísérletileg meghatározta a fény sebességét úgy, hogy fénysugarat bocsátott át forgó fogaskerék fogai között, miközben a fogaskeréktől 8633 m-re tükör volt elhelyezve, lásd a 41-21 ábrát. Amikor a fényimpulzus visszatért a tükörtől, csak akkor tudott ismét áthaladni a fogaskerék fogai között, ha annak a forgási sebessége éppen megfelelő volt, a fény csak így juthatott el a megfigyelő szeméhez. Így a fogaskerék felgyorsulásakor a megfigyelő folyamatosan a világos-sötét, majd újra világos és így tovább, átmeneteket láthatott attól függően, hogy a visszatérő fényimpulzus a forgó fogaskeréken fogba ütközött-e vagy a fogai között, ha annak a forgási sebessége éppen megfelelő volt, a fény csak így juthatott el a megfigyelő szeméhez. Így a fogaskerék felgyorsulásakor a megfi-



41-21 ábra
A 41B-2 feladathoz

gyelő fokozatosan átmeneteket láthatott, váltakozva a fénysebességből a sötétségbe, majd újra a fénysebességbe, attól függően, hogy a visszatérő fényimpulzus a forgó fogaskeréken fogba ütközött-e vagy a fogak közti résen át tudott-e haladni. Fizeau megfigyelte, hogy a kerékforgás felgyorsulása közben a visszatérő impulzus első takarása a 12,6 fordulat/másodperc esetén következett be. A fogaskeréken 720 fog és 720 köz volt, mind egyenlő szélességűek. Ezeknek az adatoknak a felhasználásával adjuk meg a fény terjedési sebességének Fizeau által is kiszámított értékét! (A Fizeau-féle érték kicsit nagyobb volt, mint a későbbi, pontosabb mérések eredménye.)

41A-3 Egy űrhajósnak a karórája szerint 2 percre van szüksége, hogy egy csokoládérudat elfogyasszon. a) Ha az űrhajós 0,5*c* sebességgel utazik a Földhöz képest, határozzuk meg, mekkora időtartam telik el ezalatt a Föld vonatkoztatási rendszerében. b) Adjuk a Föld vonatkoztatási rendszerében, hogy ez alatt az idő alatt mekkora távolságot tesz meg az űrhajó.

41A-4 Bár a Shinkansen „expressvonat" (Japánban) biztonságosan tud haladni 260 km/óra sebességgel, utazósebességét mégis 210 km/óra értékre korlátozták, hogy a zajszintet 75 fon értéken lehessen tartani. Ezen a kisebb sebességen mennyivel rövidebb a vonat a földi megfigyelő számára, mint a nyugalmi hossza, ami 230 m?

41A-5 Az Alpha Centauri csillag 4 fényévnyi távolságra van tőlünk. Egy rakétával hajtott űrhajó a Földről egy nap alatt ér el ehhez a csillaghoz (az űrhajó utasai szerint mérve). Adjuk meg az űrhajó sebességét a Földhöz viszonyítva. Adjuk meg, hogy a β mennyivel tér el az egységtől? [Útmutatás: minthogy β annyira közel van az 1-hez, használjuk a következő alkalmas közelítést: $1 - \beta^2 = (1 + \beta)(1 - \beta) \approx 2(1 - \beta)$] b) Az űrhajó vonatkoztatási rendszerében milyen messzire van a csillag az utazás kezdetekor?

41B-6 Két űrhajó *A* és a *B* egymáshoz közel halad el, miközben ellenkező irányba tartanak. Mindkettő saját-hossza 300 m. Az A űrhajó vonatkoztatási rendszerében 2×10^{-6} s-ig tart, míg a *B* orra *A* űrhajó mentén elhalad. Az *A* űrhajó orrában elhelyezett óra pontosan zérust mutat, amikor ott a *B* orra elhalad. Adjuk meg, mit mutat ez az óra, amikor a *B* fara előtte elhalad!

41B-7 A radioaktív részecskeminták felezési ideje az az idő, mely alatt az anyagmintában lévő részecskék fele elbomlik. Egy bizonyos mennyiségű radioaktív részecske a laboratóriumban 0,8*c* sebességgel 30 m utat tesz meg. Ezalatt a részecskék fele elbomlik. Adjuk meg a részecskék felezési idejét a saját vonatkoztatási rendszerükben!

41B-8 Pozitív pionokból álló részecskenyaláb sebessége 0,7*c*. Az együttmozgó rendszerben a pionok átlagos élettartama elbomlásukig $2{,}6 \times 10^{-8}$ s. a) Milyen hosszú ideig élnek a pionok a laboratórium vonatkoztatási rendszerében átlagosan? b) A laboratóriumban ez alatt az idő alatt milyen távolságra jutnak el?

41B-9 Ha egy sugárhajtású repülőgépen New Yorkból Los Angelesbe utazunk (4000 km légvonalban a távolság) 1000 km/óra átlag sebességgel, mennyivel fiatalabbak vagyunk megérkezéskor, mintha New Yorkban maradtunk volna a repülés ideje alatt? (Útmutatás: Vegyük észre, hogy a *T* idő, amit New Yorkban töltöttünk volna, igen közel áll T_0-hoz, a repülőgépen töltött időhöz!)

41B-10 Egy űrhajós az 2 millió fényévnyi távolságban lévő Andromeda-galaxist olyan űrhajón akarja meglátogatni, amelynek a vonatkoztatási rendszerében az uton is 30 évig tart. Feltéve, hogy az űrhajó sebessége állandó, mekkora a sebessége a Földhöz viszonyítva? Fejezzük ki a választ úgy, hogy β mennyivel tér el az egytől.

41B-11 Egy űrhajó nyugalmi hossza 100 m. A földfelszínhez közel halad 0,8 c állandó sebességgel. A földi megfigyelők elhatározzák, hogy megmérik az űrhajó hosszát úgy, hogy két tornyot építenek, *A*-t és *B*-t, melyek éppen egybeesnek az űrhajó elejével, ill. végével, amikor az elhalad mellettük. Az *A* torony az űrhajó orránál, a *B* űrhajó a végénél van. a) A földi megfigyelők milyen messzire építik a tornyokat egymástól? b) Mit mondanak a földi megfigyelők, mennyi idő telik el, míg az űrhajó orra az *A*-tól a *B*-ig elmegy? c) Milyen hosszú Az űrhajó vonatkoztatási rendszerében végzett mérések szerint, mennyi ideig tart, míg az űrhajó orra az *A* toronytól a *B*-ig elmegy? d) Az űrhajósok szerint milyen messzire vannak egymástól a tornyok? e) Adjuk meg azt a sajátidő-intervallumot, mely az 1 eseménytől (az űrhajó orra az *A* toronnyal esik egybe), a 2 eseményig tart (az űrhajó orra a *B* toronnyal esik egybe)!

42B-12 Térjünk vissza az előző problémához! a) Az űrhajó vonatkoztatási rendszerében mennyi ideig tart, míg egy fénysugár az űrhajó orrából a végébe eljut? b) A földi lakosok szerint mennyi időre van szüksége a fénynek, hogy az űrhajó elejétől a végéig elérjen? c) Egy lövedéket lőnek ki az űrhajó végénél, az űrhajó orra felé, az űrhajósok mérése szerint 0,6*c* sebességgel. Adjuk meg a lövedék sebességét a földi vonatkoztatási rendszerben. d) Határozzuk meg, hogy mekkora lett volna a lövedék Földhöz viszonyított sebessége, ha az űrhajóhoz viszonyítva ugyanakkora sebességgel, de ellentétes irányban lőtték volna ki.

41.9 A relativisztikus impulzus

41.11 A relativisztikus sebességösszeadás

41A-13 Bizonyos típusú mezon nyugalomban két egyenlő tömegű részecskére bomlik el, amelyek ellenkező irányban távoznak 0,8*c*-sebességgel. Tegyük fel, hogy a mezon a laboratóriumban 0,6*c* sebességgel halad, amikor bomlástermékek a haladás iránya mentén repülnek szét (ellenkező irányban). Adjuk meg a két bomlástermék sebességét a laboratóriumi rendszerben.

41A-14 A mozgás irányával párhuzamosra állított méterrúd és egy 1 kg-os tömegű tárgy van az űrhajó fedélzetén, amely a Földhöz viszonyítva 0,6*c* sebességgel mozog. a) Adjuk meg a méterrúd hosszát és b) a tárgy impulzusának nagyságát a földi vonatkoztatási rendszerben! c) Ha egy űrhajós 6 óra alatt készíti el fizikaházifeladatát, számítsuk ki, mennyi időt vesz ez igénybe a földi vonatkoztatási rendszerből megfigyelve! d) A földi megfigyelők szerint (c órában kifejezve), milyen messzire jut az űrhajó ennyi idő alatt?

41A-15 Egy csillagász megfigyeli, hogy két távoli galaxis a Földtől ellenkező irányban távolodik; mindegyik 0,9*c* sebességgel. Mekkora volna a másik galaxis távolodási sebessége az egyiken lévő megfigyelő számára?

41A-16 Egy bizonyos kvazár a Földtől $v = 0{,}87c$ sebességgel távolodik. Egy anyagot lövell ki a Föld felé a kvazárhoz képest 0,55*c* sebességgel. Adjuk meg a kilövelt anyag sebességét a Földhöz viszonyítva!

41B-17 Egy *M* tömegű részecske $v_1 = 0{,}6c$ sebességgel frontálisan összeütközik egy másik *m* tömegű és $v_2 = 0{,}8c$ sebességű, ellenkező irányban mozgó részecskével. Az ütközés után a két részecske egy összetett rendszert képez, amely a laboratóriumhoz viszonyítva nyugalomban van. Adjuk meg a tömegek *M*/*m* arányát!

41B-18 Egy *m* tömeg v_0 kezdeti sebességgel mozog és frontális rugalmas ütközést szenved egy 3*m* tömeggel, ami kezdetben nyugalomban volt. Nemrelativisztikusan az *m* tömeg visszapattan $v_0/2$ sebességgel, míg a 3*m* tömeg előremegy $v_0/2$ sebességgel. Relativisztikusan azonban a végsebességek nem lehetnek egyenlők. Legyen $v_0 = 0{,}8c$ és mutassuk meg, hogy ha mindkét tömeg végsebességeket 0,4*c* lenne, akkor az impulzus nem maradna meg.

41.12 A relativisztikus energia

41A-19 Határozzuk meg mekkora annak a tárgynak a sebessége, amelynek a mozgási energiája egyenlő a nyugalmi energiájával.

41A-20 Egy proton 0,8*c* sebességgel mozog. Adjuk meg MeV-ben (a) a proton *E* teljes energiáját és (b) a *K* kinetikus energiáját. (c) Adjuk meg az impulzusát MeV/*c* egységekben!

41A-21 Becslések szerint az Egyesült Államok gazdaságában az összes forrásból származó energia 1987-ben kb. 8×10^{19} J volt. Feltéve, hogy mindezt az energiát magreakciókból akarnánk fedezni, melyek során a tömegdefektus energiája szabadul fel az $E = mc^2$ képlet szerint, határozzuk meg, mekkora tömeg nyugalmi energiájáról van szó!

41A-22 Egy speciális hélium mag, a ^{3}He (két proton és egy neutron) nyugalmi energiája 2808,413 MeV. Adjuk meg, mekkora az a minimális energia, amely egy proton kiszabadításához szükséges, amikor egy ^{2}H deuteron és egy proton áll elő.

41B-23 A *Stefan-Boltzmann-féle sugárzási törvény* (42.2 pont) azt mondja ki, hogy egy felület által négyzetméterenként kisugárzott *R* teljesítmény *T* kelvin hőmérsékleten $R = \sigma T^4$, ahol a *Stefan-Boltzmann-állandó* $\sigma = 5{,}672\times10^{-8}$ W/m^{2}K^4. Számítsuk ki a Nap tömegveszteségét, ami a kisugárzott energiával együtt távozó tömegből adódik (hiszen az energia a Nap belsejében zajló magreakciókban a tömegdefektus energiaegyenértékeként szabadul fel) ((lásd a G függeléket a további adatok végett).

41B-24 A földi légkör felső rétegénél normális körülmények között egységnyi területre kb. 1370 W/m^2 teljesítmény érkezik a napsurárzásból. Ebből az információból (és további adatokból az L függelék használatával) adjunk becslést a Nap másodpercenkénti tömegveszteségére.($E = mc^2$)

41B-25 Az *E* és a *p* definíciójából kiindulva vezessük le a (41-22) képletet, mely szerint $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$.

41B-26 a) Határozzuk meg mekkora munka szükséges egy elektronnak a nyugalomból a $v = 0{,}8c$ sebességre való felgyorsításához a newtoni mechanika szerint. b) Mekkora ez a munka a relativitáselmélet szerint? A választ az mc^2 egységeiben fejezzük ki. (Útmutatás: emlékeztetünk arra, hogy egy testen végzett munka egyenlő a test mozgási energiájának megváltozásával).

41B-27 Az *E* és a *p* alapvető definicióiból kiindulva vezessük le a (41-25) képletben szereplő $v = pc^2/E$ összefüggést:

41B-28 Szabad neutron protonra, elektronra és egy antineutrinóra (egy zérus tömegű részecskére) bomlik. A neutron és a bomlástermékek nyugalmi energiája közti különbségből számítsuk ki az összes mozgási energiát (joule-ban), amivel a bomlástermékek akkor rendelkezhetnének, ha a neutron kezdetben nyugalomban lett volna.

41B-29 A *K* és a *p* definíciójából vezessük le a (41-23) képletet: $p = \sqrt{2mK\left[1 + \left(k/2mc^2\right)\right]}$.

41B-30 Elektron mozgási energiája háromszor akkora, mint a nyugalmi energiája. Adjuk meg a) az elektron teljes energiáját eV-egységekben, b) a sebességét *c*-egységekben.

41B-31 Az E_0 és az *E* definíciójából kiindulva mutassuk meg, hogy a (41-25) képletben szereplő $v = c[1-(E_0/E)^2]^{1/2}$ helytálló.

41.13 Mozgó órák aszinkronitása
41.14 Az ikerparadoxon

41A-32 Egy galaxis olyan sebességgel távolodik a Földtől, hogy az emissziós színképének vonalai a Doppler-effektus miatt feleakkora frekvenciájúak, mintha a Földön lennének. Adjuk meg a galaxis sebességét.

41B-33 Egy-egy óra van egy űrhajó orrában és végénél, az űrhajó nyugalmi hossza 300 m. Az órákat helyesen szinkronizálták az űrhajó vonatkoztatási rendszerében. Ha az űrhajó elhalad a Föld mellett $V = 0{,}90c$ sebességgel, a) adjuk meg, mekkora a két óra által mutatott idő közti különbség a Földön b) Melyik óra mutat korábbi időt?

41B-34 Képzeljük azt, hogy a Nap egy R_g sugarú gömbbé roppan össze, úgy, hogy a gömb felszínéről egy m tömeg eltávolításához mc^2 energia szükséges. Ezt a sugarat a Nap *gravitációs sugarának* nevezzük. Adjuk meg az R_g képletét! (Általános az a nézet, hogy sok csillag végállapotát az jelenti, amikor gravitációs sugaruk által meghatározott gömbre, vagy még annál is kisebbre roppannak össze).

41B-35 Térjünk vissza a 41B-11 problémához. Amikor az űrhajó a tornyok mellett elhalad, a földi vonatkoztatási rendszerben a következő két esemény egyidejű:

az (a) esemény: *az A torony egybeesik az űrhajó végével*

a (b) esemény: *a B torony egybeesik az űrhajó orrával.*

a) Készítsünk szemléletes ábrákat a méretek jelölésével annak megvilágítására, hogy hogyan látszanak ezek az események az űrhajó vonatkoztatási rendszeréből. b) Adjuk meg, mekkora ez az időintervallum az űrhajó vonatkoztatási rendszeréből!

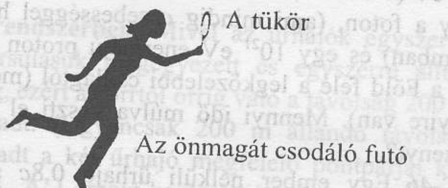
41B-36 Az űrhajó (S'-rendszer) elhalad a Föld (S-rendszer) mellett a $t = t' = 0$ időpontban. Az űrhajó sebessége a Földhöz képest 0,9c. Egy másodperccel később (a Föld rendszerében mérve) rádiójelet küldenek az űrhajóhoz. Adjuk meg, hogy mikor fogják a rádiójelet észlelni az űrhajó rendszerében.

Vegyes feladatok

41C-37 A mi vonatkoztatási rendszerünkben pontosan délben egy 0,8c sebességgel mozgó óra déli 12,00 időt mutat, amikor az origón áthalad. a) Adjuk meg c függvényében, hogy az óra milyen messze lesz, amikor mutatói 12:00 után egy másodpercet mutatnak. b) Amikor az óra 12,00 után egy másodpercet mutat, az órából fényjelet küldenek vissza a mi vonatkoztatási rendszerünk origójához. A mi vonatkoztatási rendszerünk szerint mikor fog a fényjel az origóba érkezni?

41C-38 Az L nyugalmi hosszúságú űrhajó $v = 4/5c$ sebességgel halad el a Föld mellett. Amikor az űrhajó végénél lévő óra $t' = 0$ időpontot mutat (és a földi óra is $t = 0$ időpontot mutat) egy fényjelet küldenek az űrhajó végéből az eleje felé. Határozzuk meg azt az időpontot, amikor a fényjel eléri az űrhajó elejét a) az űrhajó órái szerint, b) a földi órák szerint. c) Az (a) és (b) kérdésekre adott válaszokat nem kapcsolja össze az idődilatációs képlet. Vajon miért nem? d) A fényjelet az űrhajó elején lévő tükör visszaveri az űrhajó vége felé. Adjuk meg azt az időpontot, amikor a fényjel eléri az űrhajó végét, az űrhajó órái szerint. e) Adjuk meg a (d) kérdésre a választ a földi órák szerint! f) A (d) és az (e) kérdésekre adott válaszokat összekapcsolja az idődilatációs képlet? Magyarázzuk meg, miért (illetve miért nem)?

41C-39 Képzeljük el, hogy egy futó egy tükröt visz, 1 m-re maga előtt (a futó vonatkoztatási rendszerében) és visszavert képét tanulmányozza, ahogy a 41-22 ábra mutatja. A futó pislog egyet. a) A futó vonatkoztatási rendszerében mennyi idő telik el a pislogás után, míg meglátja annak tükörképét? b) Mekkora ez az időtartam a földi vonatkoztatási rendszerben (c függvényében)?



41-22 ábra
A 41C-39 feladathoz

41C-40 A stanfordi 3 km-es lineáris gyorsítóban az elektronok végsebessége 0,999 999 999 7c. a) Ezzel a sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben nézve milyen hosszú ez a gyorsítóberendezés? (Alkalmazzuk a megfelelő matematikai közelítéseket!) b) Evvel az állandó sebességgel utazva, az elektron vonatkoztatási rendszerében mennyi ideig tart ezt a gyorsítót befutni? Meddig tart az elektron útja a gyorsítóban a stanfordi fizikusok szerint?

41C-41 A „mozgó rúd hossza” definiálható úgy, mint a sebességének a szorzata azzal az időtartammal, ami alatt a rúd eleje és a vége egy rögzített pont előtt elhalad. Mutassuk meg, hogy ez a definíció is elvezet a hosszkontrakció megállapított képletéhez: $L = L_0(1-\beta^2)^{1/2}$!

41C-42 Egy golflabda 90 m/s sebességgel halad. A p relativisztikus impulzusa mekkora hányadával tér el a klasszikus mv impulzustól? Más szóval, határozzuk meg a $(p-mv)/mv$ hányados értékét!

41C-43 A relativisztikus impulzus növekedését ki lehet fejezni azzal is, hogy megadjuk azt az f hányadost, ami megmutatja, mennyi p relatív eltérése mv-től, vagyis $f \equiv (p-mv)/mv$. Bizonyítsuk be a $\beta = v/c$ sebességarányra vonatkozó $\beta = \sqrt{f(f+2)}/(f+1)$ összefüggést!

41B-44 Banditák egy robogó vonatot akarnak megállítani úgy, hogy a mozdonyhoz és a szerkocsihoz közel egy-egy robbanó töltetet felrobbantanak. A két robbanás a földi vonatkoztatási rendszerben egyidejűleg történik. A vonat rendszerében is egyidejű lesz-e a két robbanás, ha nem, melyik következik be előbb? Okoz-e valami különbséget az, hogy a vonat a $+x$ vagy a $-x$ irányban halad?

41C-45 A primér kozmikus sugárzás részecskéi nagy energiájú protonok, amelyek a Földet kívülről érkezve érik. A felső légkörben lévő atommagokkal ütköznek és azokat szétrobbantják, s ezáltal szekundér kozmikus sugárzást hoznak létre, amikben elektronok, pozitronok, neutronok, mezonok, fotonok, stb szerepelnek, és záporszerűen özönlenek a Föld felszíne felé. (A legnagyobb áthatolóképességű részecskék a legmélyebb bányákban is észlelhetőek.) Azzal, hogy a Föld felszínén egy négyzetkilométernyi területen egyidejűleg regisztráljuk a beérkező részecskéket, meg becsülni mekkora volt az energiája annak az egyetlen protonnak, ami az egész záport elindította. Olyan eseményeket is észleltek már, amik kb. 100 millió részecskét eredményeztek, kb. 10^{21} eV (1 eV = $1{,}6\times10^{-19}$ J) összenergiával. Tegyük fel, hogy a foton, (ami mindig c sebességgel halad a vákuumban) és egy 10^{21} eV energiájú proton versenyeznek a Föld felé a legközelebbi csillagtól (mely 4 fényévnyire van). Mennyi idő múlva veszti el a proton a versenyt?

41C-46 Egy ember nélküli űrhajó $0{,}8c$ sebességgel távolodik a Földtől. Az űrhajó fedélzetén lévő rádióadó az űrhajó rendszerében pontosan 1s ideig tartó rádiójelet küld vissza, valahányszor a Földről egy „kérdő" jelet kap. Tegyük fel, hogy két igen rövid kérdő jelet kap, melyeket 10 s választ el a Föld rendszerében mérve. Adjuk meg a Föld rendszerében az űrhajó által küldött jel Δt hosszát. b) Adjuk meg, mekkora a T időintervallum a Földön észlelt válaszjelek között!

41C-47 Egy nagy energiájú proton sebessége v egy a Földön nyugvó protonhoz képest. Határozzuk meg annak a vonatkoztatási rendszernek, a V sebességét a Földhöz képest amelyben a két protonnak egyenlő a sebessége.

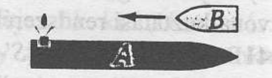
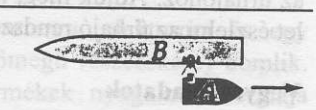
41C-48 Egy lézer λ hullámhosszúságú monokromatikus fényt bocsát ki. A lézernyaláb, a lézerhez viszonyítva V sebességgel távolodó tükörre merőlegesen esik. Mutassuk meg, hogy a lebegés frekvenciája a beeső és a visszavert nyaláb között közelítőleg $2V/\lambda$. (Útmutatás: a tükör vonatkoztatási rendszerében a fény egy, a tükörtől távolodó forrásból érkezik. A lézer rendszerében a visszavert hullám olyan, mintha egy távolodó forrás bocsátotta volna ki).

41C-49 Egy nagy energiájú gyorsítóból kilépő protonnak az E összes energiája az $E_0 = mc^2$ nyugalmi energiájának ötszöröse. Az E_0 nyugalmi energia függvényében adjuk meg a) a K mozgási energiáját és b) a p impulzusát. c) Adjuk meg β értékét. Amikor célszerűnek találjuk, hagyjuk meg a c jelet a feleletre adott képletben.

41C-50 Tegyük fel, hogy neves csillagászok szerint a Nap hamarosan egy szupernova robbanási folyamatán megy keresztül. Egy menekülési erőfeszítés során egy űrhajóval űrutazásra indulunk a 12 fényév távolságban lévő Tau Ceti csillag felé. Amikor az űrben az út felét megtettük, látjuk, hogy a Nap tényleg szupernovaképpen felrobbant, de ugyanakkor látjuk, hogy a Tau Ceti is felrobbant. a) Az űrhajó vonatkoztatási rendszerében vajon arra következtethetünk-e, hogy a két esemény egyidejű? Ha nem, melyik esemény történt korábban? b) Abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben a Nap és a Tau Ceti nyugalomban vannak, vajon egyidejűleg robbantak-e fel? Ha nem, akkor melyik esemény történt előbb?

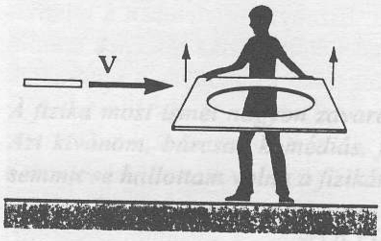
Az alábbi problémák a speciális relativitáselmélet híres „paradoxonai". Itt válasz nélkül mutatjuk be őket. Ha megpróbáljuk magyarázni, hogy valójában miért is nem paradoxonok ezek, akkor közelebb kerülünk a tér és az idő valódi természetének a megértéséhez.

41C-51 Egy űrháború során két azonos űrhajó halad el egymáshoz közel, de ellenkező irányban, a fényéhez közeli sebességgel. Amikor a B űrhajó vége az A űrhajó orra mellett halad el, egy mozsárágyú lövedéket lő ki az A űrhajó a végén lévő ágyúcsőből a mozgás irányára merőlegesen, azzal a szándékkal, hogy eltalálja a B űrhajót (lásd a 41-23 ábrát). Nyilvánvaló, hogy a 41-23 ábra táblázatában foglalt kijelentések nem lehetnek igazak. Vagy eltalálták a B űrhajót, vagy nem. Keressük meg a feladat állításainak ingatag pontjait és vizsgáljuk meg röviden, hogy mi is történik valójában, továbbá miért nem forog fenn paradoxon. Tegyük fel, hogy az űrhajók igen közel haladnak el egymás mellett, továbbá, hogy a lövedék sebessége is igen nagy, és így a lövedék repülési ideje a feladat megoldásánál nem játszik lényeges szerepet.

a) Az A űrhajó vonatkoztatási rendszeréből nézve a B hossza kontrahálódott, így a lövedék nem találja el a B űrhajót.	 Az A űrhajó vonatkoztatási rendszeréből nézve
b) A B űrhajó rendszeréből nézve az A hossza kontrahálódott, így a lövedék eltalálja a B űrhajót.	 Az B űrhajó vonatkoztatási rendszeréből nézve

41-23 ábra
A 41C-51 feladathoz

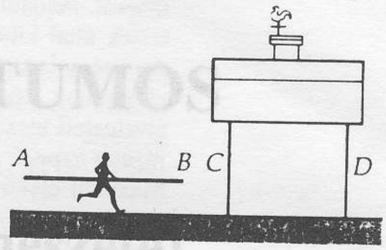
41C-52 A „bot a lyukban" paradoxon a speciális relativitáselmélet egyik legrejtélyesebb „paradoxona". Egy 100 cm hosszú bot relativisztikus sebességgel mozog vízszintesen úgy, hogy a hossza 50 cm Lorentz-kontrakciót szenved a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben (41-24 ábra). Egy megfigyelő a Föld vonatkoztatási rendszerében vékony táblát tart vízszintesen a kezében, melyen 70 cm átmérőjű lyuk van. Amikor a bot vége előtte elhalad, hirtelen függőlegesen felemeli a táblát (úgy, hogy a síkja továbbra is vízszintes maradjon) és engedi, hogy a bot a lyukon áthaladjon! Így adott pillanatban a (kontrahálódott) bot teljes egészében belefér a vízszintes lyukba. A paradoxon a következő. „A bot vonatkoztatási rendszerében a bot 100 cm hosszú, és a lyuk csak 35 cm. Hogyan képes egy 35 cm-es nyílás befogadni egy 100 cm-es botot?" (Útmutatás: fordítsuk a figyelmünket a pontszerű eseményekre. Például: vizsgáljunk a bot mentén négy egymástól egyenlő távolságra lévő pontot a Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben. Ez a négy pont egyidejűleg fekszik a tábla síkjában. Hogyan helyezkednek el ezek a pontok a bot vonatkoztatási rendszerében? Egyidejűek-e ezek az események?)



41-24 ábra
A 41C-52 feladathoz

41C-53 A „rúd a pajtában" paradoxon is a speciális relativitáselmélet híres rejtélye. Tekintsünk egy 20 m hosszú rudat, amit valaki olyan gyorsan visz, hogy a földi vonatkoztatási rendszerben csak 10 m hosszú. (Lásd a 41-25 ábrát.) A rudat egy pajtán viszik át, amelynek szemközti falain C és D ajtók vannak. Minthogy a pajta 12 m hosszú, tehát 2 m-rel hosszabb, mint a mozgó rúd, így rövid időre mindkét ajtót be lehet csukni egyszerre, azaz ekkor a rúd a pajtában lesz. (Később a D ajtót kinyitják, hogy a rúd akadály nélkül folytathassa útját. Másrészt viszont a rudat szállító futó szempontjából a pajta csak 6 m hosszú a Lorentz-féle hosszkontrakció miatt. Itt van tehát a látszólagos paradoxon: „ Hogyan képes a futó a 20 m hosszú rúddal a 6 m hosszú pajtában csukott ajtók mellett bent lenni?" Nyilvánvalóan valahol hiba van. Meg tudjuk-e magyarázni ezt a látszólagos paradoxont? (Útmutatás: Mint a relativitáselmélet legtöbb paradoxonja esetében, a probléma gyökere ott van, hogy két esemény, ami egy vonatkoztatási rendszerben egyidejű, nem szükségképpen egyidejű egy másik vonatkoztatási rendszerben.)

41C-54 A híres „kötél-paradoxon". Vizsgáljunk két vonatkoztatási rendszert. Legyen S a „mi rendszerünk" és S' a „mozgó" rendszer, melynek sebessége $0{,}8c$ a $+x$ irányban. Két 100 m saját hosszúságú űrhajó (A és B) a mi rendszerünkben kezdetben nyugalomban van, a $+x$ irány mentén úgy, hogy A B-vel szemben áll, és az orruk 200 m távolságban van egymástól. A és B orrát. (a



41-25 ábra
A 41C-53 feladathoz

mi mérésünk szerint) egy 300 méter hosszú kötél (100 m laza tartalékkal) köti össze. A két űrhajónak a $+x$ irányában állandó gyorsulást adunk, míg el nem érik a $0{,}8c$ sebességet, majd ekkor a gyorsulást egyidejűleg megszüntetjük. Így végül az S'-ben mindkét űrhajó nyugalomban van.

Az S rendszerben: Mivel az űrhajók egyszerre, gyorsulásuk megegyezett és egyszerre álltak meg, ezért az orrtól orrig való a távolság 200 m maradt. (Ugyancsak 200 m állandó távolság maradt a két űrhajó megfelelő pontpárjai között). A Lorentz-kontrakció miatt az űrhajók hossza végülis 60 m.

Az S' mozgó rendszerben: Mindkét űrhajó kezdetben 60 m hosszúra kontrahálódott, a kezdeti orrtól-orrig való távolság 120 m-re kontrahálódott. A végső helyzetben mindkét űrhajó 100 m hosszú.

Mármost itt a probléma: a) Mutassuk meg, hogy az S'' rendszerben a végső orrtól-orrig való távolság (nyugalomban) 333 m *és így a kötél elszakadt.* b) „Az S rendszerben" kezdetű bekezdés következtetései helyesek, bár azt látszanak alátámasztani, hogy a kötél nem szakadt el, mert az orrtól-orrig való távolság csak 200 m. Oldjuk fel ezt a látszólagos paradoxont. Készítsünk a kezdeti és a végső helyzetről mindkét vonatkoztatási rendszerben vázlatot!

41C-55 Tekintsük az ikerparadoxont. Az utazó iker vonatkoztatási rendszerében a földi órák elmennek, majd visszajönnek, ezért ebben a vonatkoztatási rendszerben mérve, a földi órák *lassabban* járnak, mint azok, amelyek ebben a rendszerben nyugalomban vannak. Ez igaz *a Föld mozgásának mind a távolodási, mind a közeledési* szakaszára. Ezért kérdezzük, hogy miért az utazó iker találja úgy, hogy *több* idő telt el a Földön, mint az utazó vonatkoztatási rendszerben?

Megjegyezzük, hogy van egy érdekes példa, melyben az ikrek mindegyike ugyanannyi ideig és ugynúgy gyorsul, mégis különbözőképpen öregszik. Lásd S. P. Brough: „The Case of the Identically Accelerated Twins" (Az azonosan gyorsuló ikrek esete) *American Journal of Physics* **57.** (1989 szept.).

38B-19 a) zöld b) piros
38B-21 99,6 nm
38B-23 113
38B-25 1,31
38B-27 18,7 cm
38C-29 A válasz adott.
38C-31 A válasz adott.
38C-33 A válasz adott.
38C-35 A válasz adott.
38C-37 A válasz adott.
38C-39 a) $0{,}155\lambda/d$ b) $0.500\lambda/d$
38C-41 543 nm
38C-43 A válasz adott.
38C-45 1,000 30

XXXIX. Fejezet

39A-1 0,396 mm
39B-3 18,0 mm
39B-5 a) $\lambda_1/\lambda_2 = 2$
39B-7 0,684
39B-9 a) 120 b) 60
39A-11 11,5 km
39A-13 15,4
39B-15 420 m
39B-17 $1{,}07 \times 10^{-5}$ m b) $1{,}97 \times 10^{-5}$ m
39A-19 36,9°
39A-21 $7{,}16 \times 10^{-2}$ fok/nm b) 25 000
39B-23 688 nm
39B-25 $1{,}375 \times 10^{-3}$ fok
39A-27 0,300 nm
39A-29 A válasz adott.
39B-31 17,0
39C-33 0,1233 rad
39C-35 lásd 2. lábj.
39C-37 A válasz adott.
39C-39 A válasz adott.
39C-41 A válasz adott.

XL. Fejezet

40A-1 $\frac{7}{8}$
40B-3 $\frac{1}{8}$
40A-5 32,0°
40A-7 49,2°
40B-9 $\operatorname{tg}\theta_p = 1/\sin\theta_c$
40B-11 16,4 μm
40B-13 A válasz adott.
40B-15 68,4 mg/cm³
40C-17 0° és 90°
40C-19 78,1%
40C-21 A válasz adott.
40C-23 A válasz adott.
40C-25 0,085 65 mm vagy 0,1199 mm
40C-27 A válasz adott.
40C-29 118°

XLI. Fejezet

41B-1 1,5 cm/s
41A-3 a) 2,31 perc b) 1,16 c·perc
41A-5 a) $1-\beta \approx 2{,}35 \times 10^{-7}$ b) 1 c · nap
41B-7 $22{,}5m/c$ vagy $\frac{7}{5}\times 10^{-8}$ s
41B-9 6,17 ns
41B-11 a) 60 m b) 75 m/c c) 45 m/c
d) 36 m e) 45 m/c
41A-13 $0{,}946c$ és $-0{,}385c$
41A-15 $v_x = 0{,}994c$
41B-17 1,78
41A-19 $v = 0{,}866c$
41A-21 889 kg
41B-23 $4{,}28 \times 10^9$ kg/s
41B-25 A válasz adott.
41B-27 A válasz adott.
41B-29 A válasz adott.
41B-31 A válasz adott.
41B-33 a) 270 m/c vagy $9{,}00 \times 10^{-7}$ s b) az űrhajó orrában lévő óra mutatja a korábbi időt.
41B-35 b) 80 m/c
41C-37 a) $1{,}33c{\cdot}$s b) 3,00 s
41C-39 a) 2,00 m/c b) 2,50 m/c
41C-41 A válasz adott.
41C-43 A válasz adott.
41C-45 $5{,}55 \times 10^{-17}$ s
41C-47 $V = v\left(\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2}\right)$ ahol $(\beta \equiv v/c)$
41C-49 a) $K = 4E_o$ b) $p = \sqrt{24E_o}/c$
c) $\beta = \sqrt{\frac{24}{25}}$
41C-51 A válasz adott.
41C-53 A válasz adott.
41C-55 A válasz adott.

XLII. Fejezet

42A-1 1,51 cm²
42B-3 0,646%
42A-5 9660 nm
42A-7 5222 K
42A-9 $2{,}43 \times 10^{-12}$ m
42A-11 A válasz adott.
42B-13 $3{,}54 \times 10^6$ m
42A-15 451 nm
42B-17 a) $3{,}56 \times 10^5$ m/s b) 432 nm
42A-19 4,85 pm