Eddigiek összefoglalása: kinematika x(t) → v(t) → a(t) → ? → ?

Dinamika: F → a → v → x

Minden **egyenes vonalú mozgást**  összefoglalnak ezek a képletek:

x(t) – v(t) = – a(t) =

Nézzük meg, milyen képletek voltak középiskolában

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | x(t) | v(t) | a(t) |
| egyenes vonalú  egyenletes mozgás | x = vt + x0  s = vt | v = konst. | a = 0 |
| egyenes vonalú  egyenletesen változó mozgás | x = + v0·t + x0 | v = at + v0 | a = konst. |
| harmonikus rezgőmozgás | x = A cos(ωt+ϕ0) | v = –Aω sin(ωt+ϕ0) | a = –Aω2 cos(ωt+ϕ0) |

Előjelek!

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| egyenletes mozgás | egyenletesen változó mozgás | |
|  | a > 0 | a < 0 |
|  |  |  |
| x = vt + x0 | x = + v0t + x0 | |
|  |  |  |
| v = konst. | v = at + v0 | |
|  |  |  |
| a = 0 | a = konst. | |

Látható, hogy

és

(ill. visszafelé , ,

ahol a konstansokat v0 és x0 értéke alapján tudjuk meghatározni).

Mikor igaz, hogy „s = v⋅t”?

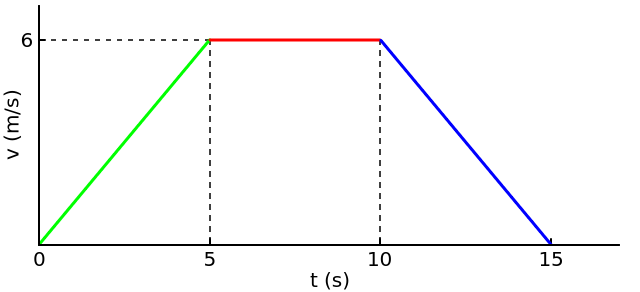
Csak akkor, ha v = konst., vagyis egyenletes mozgás esetén!

Minden más esetben a v(t) függvényt kell integrálni

(ami grafikusan a v – t diagramon a görbe alatti terület, ami negatív is lehet).

**Számolási feladat:**

Az ábra egy felvonó emelkedésének sebesség–idő diagramja.



**a)** Hány métert emelkedett a felvonó a 15 s alatt?

**b)** Mennyi volt az átlagsebessége?

**c)** Rajzoljuk fel a felvonó gyorsulását és a kiindulási szinttől mért magasságát is az idő függvényében!

Megoldás

A mozgás szakaszonként egyenletesen változó mozgás:

v(t) = v0 + at és x(t) = x0 + v0t + ½at2.

Minden mennyiséget SI alapmennyiségekkel írunk fel.

A 0 – 5 s között

a kiinduló koordináta x01 = 0;

a kezdősebesség v01 = 0;

a gyorsulás: a1 = Δv/Δt = (6–0)/(5–0) = 1,2 m/s2 (pozitív, a lift sebessége nő);

→ v1(t) = a1t = 1,2t és x1(t) = ½a1t2 = 0,6t2;

5 s-ban x1(5) = 0,6∙52 = 15 m (és ellenőrizhetjük, hogy v1(5) = 1,2∙5 = 6 m/s).

Az 5 – 10 s között

mivel ez a szakasz az 5 s-nál kezdődik, ezért ezen a szakaszon t2 = t – 5 s;

a kiinduló koordináta x02 = x1(5) = 15 m;

a (kezdő)sebesség v02 = v1(5) = 6 m/s;

a gyorsulás zérus;

→ v2(t) = 6 m/s és x2(t) = 15 + 6∙(t–5);

10 s-ban x2(10) = 15 + 6∙5 = 45 m.

A 10 – 15 s között

mivel ez a szakasz a 10 s-nál kezdődik, ezért ezen a szakaszon t3 = t – 10 s;

a kiinduló koordináta x03 = x2(10) = 45 m;

a kezdősebesség v03 = v2(10) = 6 m/s;

a gyorsulás a3 = Δv/Δt = (0–6)/(15–10) = –1,2 m/s2 (negatív, a lift sebessége csökken);

→ v3(t) = 6 – 1,2(t–10) és x3(t) = 45 + 6(t–10) – 1,2(t–10)2;

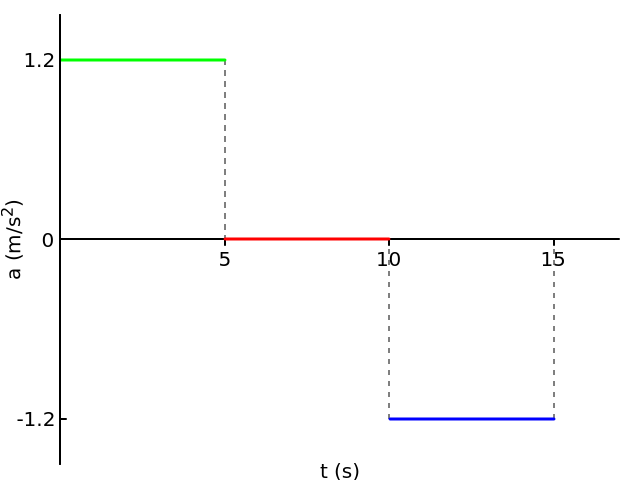
15 s-ban x3(15) = 45 + 6∙5 – 0,6∙52 = 60 m   
 (és ellenőrizhetjük, hogy v3(15) = 6 – 1,2∙5 = 0 m/s).

**a)** A felvonó emelkedése x3(15) = 60 m volt.

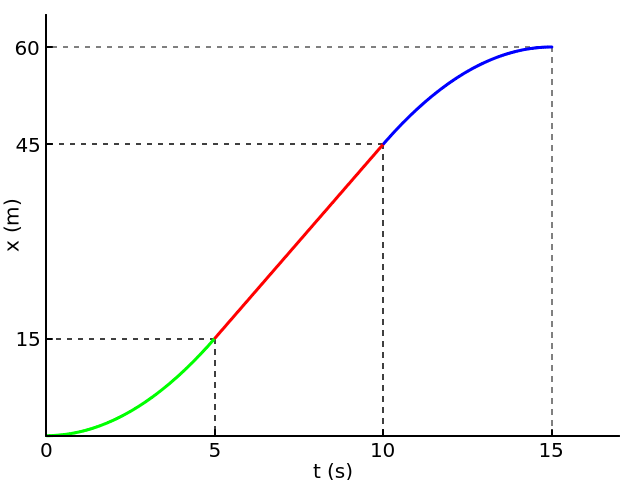
**b)** A felvonó átlagsebessége vátl = Δx/Δt = (60–0)/(15–0) = 4 m/s volt.

**c)**

a1 = 1,2 m/s2 a2 = 0 a3 = –1,2 m/s2



x1(t) = 0,6t2 x2(t) = 15 + 6∙(t–5) x3(t) = 45 + 6(t–10) – 1,2(t–10)2



**KÖRMOZGÁS felírása szögváltozóval**

Ugyanúgy kezelhető, mint az x tengely menti haladó mozgás, csak

ϕ(t) **szögváltozó**val adjuk meg a test helyét [–] (az x(t) helyett),

aminek deriváltja az

ω **szögsebesség**: [s–1] (a v sebesség megfelelője),

és annak deriváltja a

β **szöggyorsulás**: β = [s–2] (az a gyorsulás megfelelője).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | ϕ(t) | ω(t) | β(t) |
| egyenletes körmozgás | ϕ =ωt + ϕ0 | ω = konst. | β = 0 |
| egyenletesen változó körmozgás | ϕ = + ω0t + ϕ0 | ω = βt + ω0 | β = konst. |

R sugarú körön

i = R ϕ,

v = R ω,

at = R β (a gyorsulásra a dinamikánál visszatérünk!).

ϕ(t) – ω(t) = – β(t) =

**SÍKBELI ÉS TÉRBELI MOZGÁS**

**Helyvektor**, **r** : az O vonatkoztatási pontból az adott pontba mutató vektor.

A test mozgásával a helyvektor időben változik: **r**(t) (vektor-skalár függvény)

**Pálya**: a helyvektor végpontja által érintett pontok (paraméteres térgörbe).

**Út (s)**: a pálya hossza.

**Elmozdulásvektor**: Δ**r** = **r2** – **r1** = **r**(t2) – **r**(t1) (a helyvektor megváltozása)

mindig a későbbiből vonjuk ki a korábbit!

r1

Δr

r2

r(t)

O

vátl

**Átlagsebesség-vektor**: ,

iránya megegyezik a Δ**r** elmozdulásvektor irányával,

nagysága az elmozdulás nagysága (Δ**r** abszolút értéke) osztva az eltelt idővel.

A t1 – t2 intervallumhoz tartozó átlagsebesség **Δr** irányú.

Az egyenes vonalú mozgáshoz hasonlóan a t1 időponthoz tartozó pillanatnyi sebességet úgy tudjuk megkapni, hogy átlagsebességet számolunk egy t1 pillanatban induló Δt hosszú időintervallumra, és nézzük a határértékét Δt → 0 esetén.

r1

Δr2

r2

r(t)

vátl

O

Tekintsünk olyan időintervallumokat, amiknek a kezdete t1, de a vége közelebb van t1-hez, mint t2: ezek t3, t4, t5, … , az ezekhez tartozó átlagsebesség **Δr3** , **Δr4 , Δr5** irányú, vagyis mindig a pálya két pontján (**r1** és **r2**, ill. **r1** és **r3**, ill. **r1** és **r4**, ill. **r1** és **r5**, …) átmenő szelő irányába mutat.

r1

Δr2

r2

r(t)

vátl

r3

Δr3

O

r1

r(t)

vátl

r4

Δr4

r3

Δr3

O

r1

r(t)

vátl

r4

Δr4

Δr5

r5

O

r1

Δr2

r2

r(t)

vátl

r4

Δr4

r3

Δr3

Δr5

r5

O

Δt → 0 esetén a végpont is a t1 időhöz tartozó **r1** , így a pillanatnyi sebesség iránya a pálya **r1**-beli érintőjének iránya lesz.

A **(pillanatnyi) sebesség vektor** az átlagsebesség-vektor határértéke:

.

Vektor, melynek

iránya: a pálya érintőjének iránya,

nagysága: az út idő szerinti deriváltja: , vpill = .

Az átlagsebesség nagysága vátl = |Δ**r**|/Δt.

|Δ**r**|, azaz az elmozdulásvektor nagysága legfeljebb a két pont közötti út hossza: |Δ**r**| ≤ s, de Δ**r** → 0 esetén a két mennyiség megegyezik, ezért lesz a pillanatnyi sebesség nagysága az út deriváltja.

Hasonlóan bevezethető az

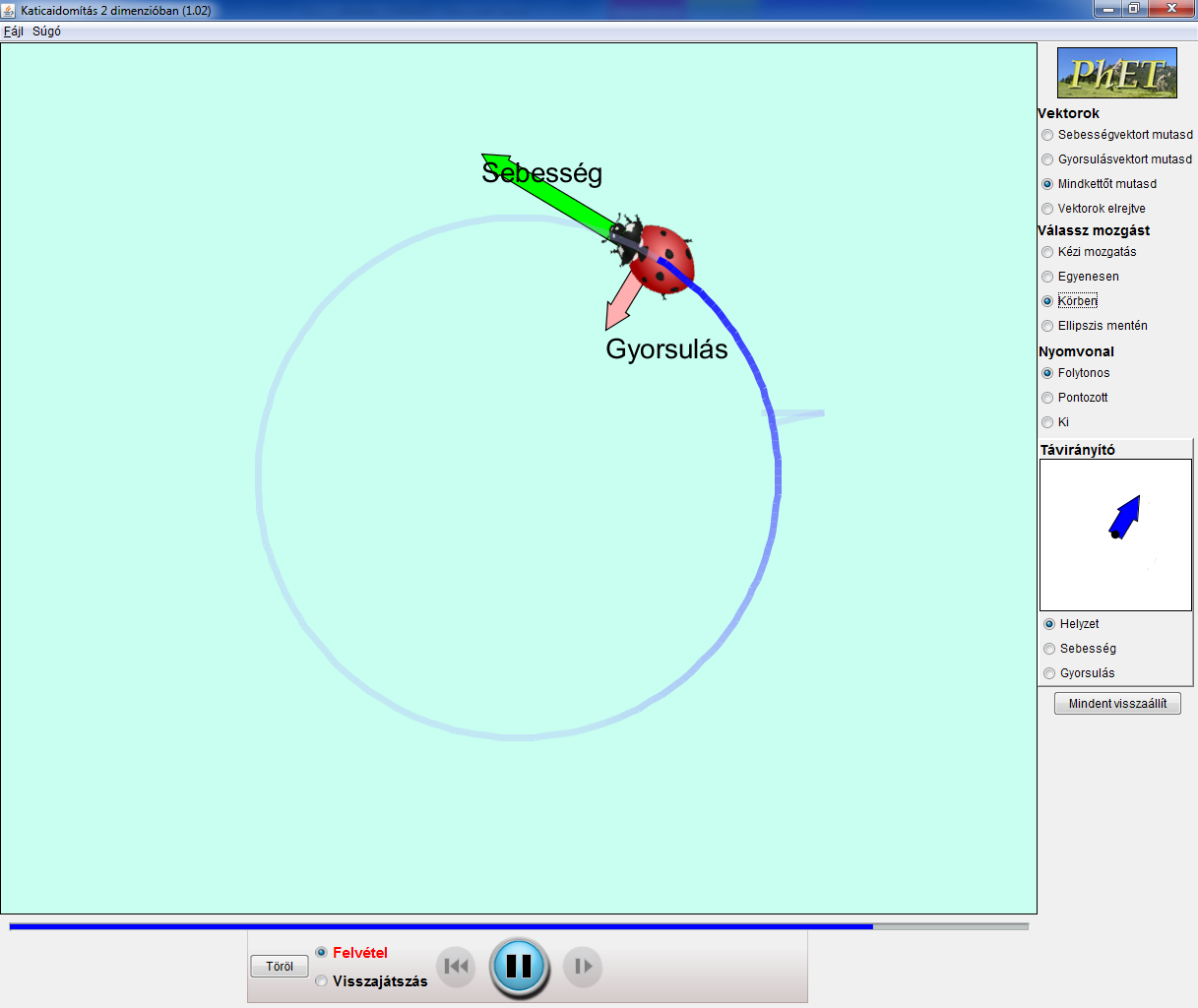
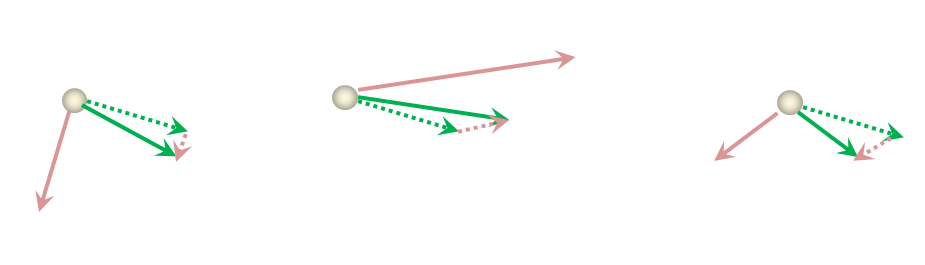
**átlagos gyorsulás**: és a

**(pillanatnyi) gyorsulás**:

Tehát röviden az egész kinematika:

és .

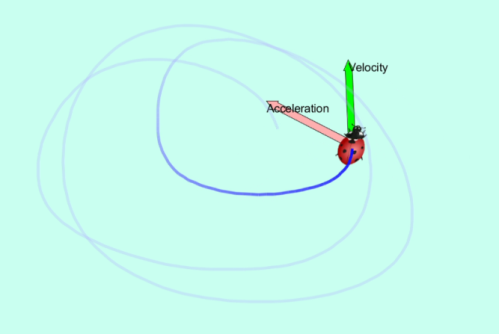
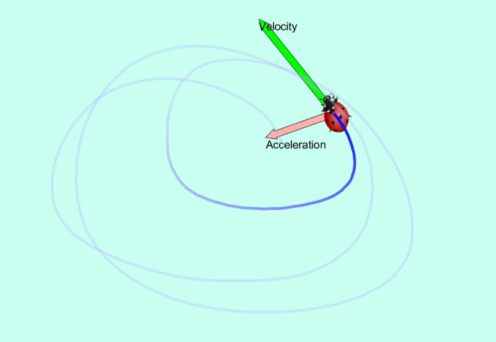
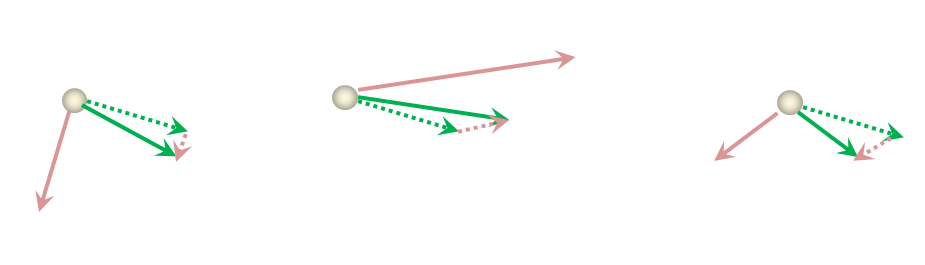
Volt már: milyen lehet a gyorsulásvektor iránya a sebességvektorhoz képest?

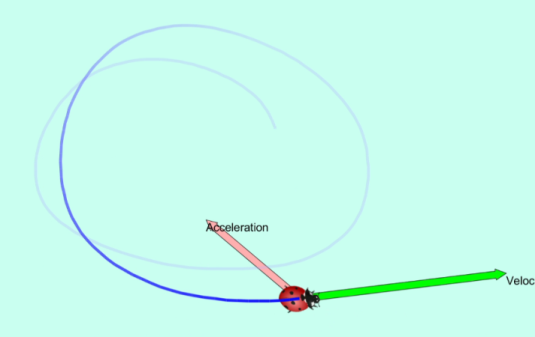
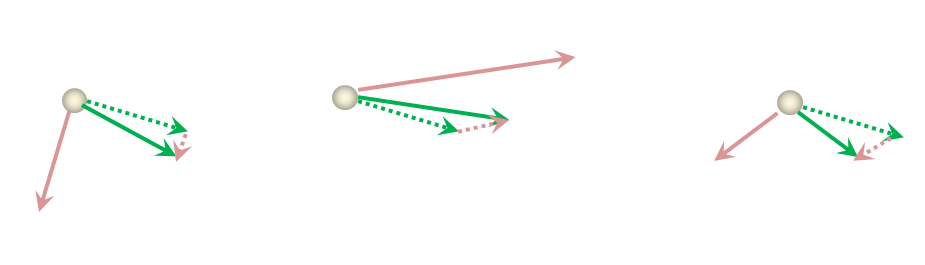
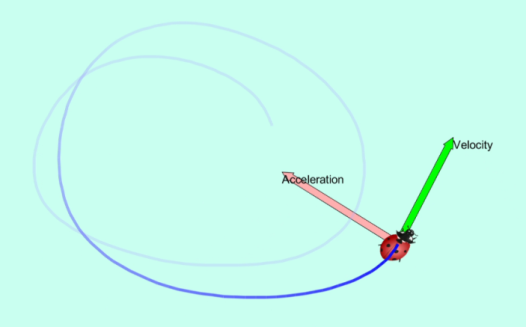
Ha a gyorsulás merőleges a sebességre, akkor a sebesség nagysága nem változik:

Ha a gyorsulás nem pontosan merőleges a sebességre, akkor a sebesség nagysága is változik:

ha hegyes szöget zárnak be, akkor a test gyorsabb lesz:

ha tompa szöget, akkor a test lassul:

A gyorsulásnak a sebességgel párhuzamos komponense a sebesség nagyságát változtatja (növeli, ha egyirányúak, ill. csökkenti, ha ellentétes irányúak); a gyorsulás sebességre merőleges komponense pedig a sebesség irányát változtatja meg (a sebesség nagyságát nem befolyásolja). Ahhoz is kell tehát gyorsulás, hogy a test állandó nagyságú sebességgel irányt változtasson!

**KOORDINÁTARENDSZEREK**

Descartes-koordinátarendszer

2 dimenzióban:

3

y

P

**r**

x

**i**

2

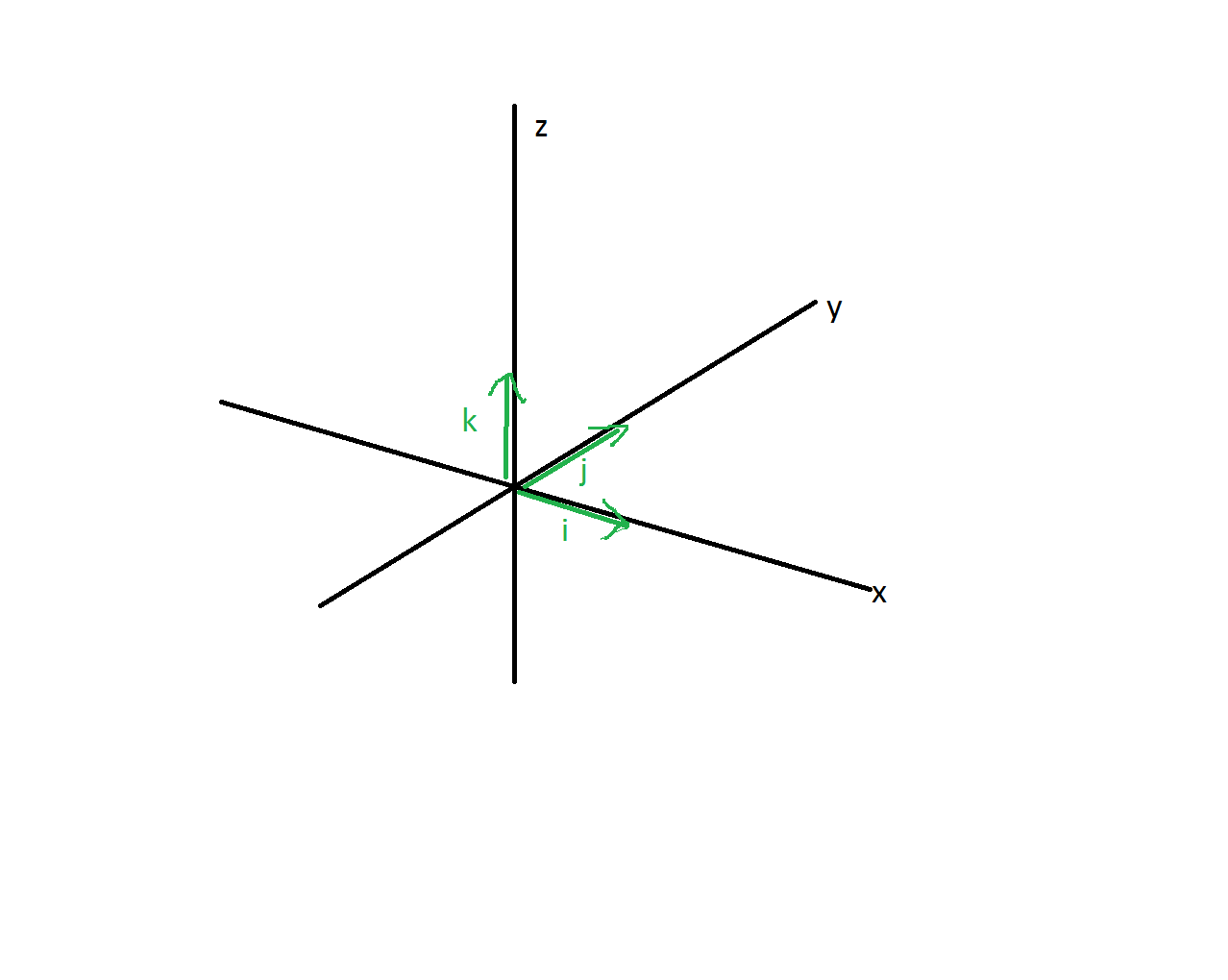
**j**

**r** = 3 **i** + 2 **j**

Koordináták: x, y

Egységvektorok **i**, **j**

3 dimenzióban



Koordináták: x, y, z

Egységvektorok **i**, **j¸**k

Jobbsodrású: **i** × **j** = **k**

(és **j** × **k** = **i**, **k** × **i** = **j**,ciklikus permutáció;

**j** × **i** = –**k**, **k** × **j** = –**i**, **i** × **k** = –**j**)

Helyvektor felírása:

**r** = x **i** + y **j** + z **k**