**DINAMIKA**

**Newton axiómái**

**I. axióma**: ha nincs kölcsönhatás → (inerciarendszerben) nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgás végez: a sebességvektora állandó, **v** = konst. → a gyorsulása zérus.

<https://www.youtube.com/watch?v=LmRkPyuet_o>

**II. axióma**: a dinamika alaptörvénye.

A test gyorsulása arányos a rá ható erővel:

***a*** ~ ***F***,

az arányossági tényező a test tömege:

***F*** = *m****a*** .

Új fizikai mennyiség az ***F*** és az *m*:

az *m* **tömeg** a **tehetetlenség mértéke** [kg],

az ***F*** **erő** a **kölcsönhatás mértéke** [N],

ezeket az alábbi mérési utasításokkal definiáljuk:

Dinamikai és sztatikai erő- és tömegmérés



Sztatikai tömeg- ill. erőmérés: Az ismeretlen tömeg ill. erő mellett szükségünk van ismert, változtatható nagyságú tömegre ill. erőre, és egy „nulldetektor”-ra. Az ismeretlen tömeget / erőt összehasonlítjuk az ismert tömeggel / erővel, aminek nagyságát tudjuk változtatni. A nulldetektor mutatja, hogy mikor egyenlőek. Pl. tömegmérés kétkarú mérleggel; erők összehasonlítása hasonlóan (ismert erő lehet pl. rugós erőmérő).

Dinamikai mérés:

Dinamikai erőmérésnél egy testet (aminek a tömegét nem ismerjük) gyorsítunk

egy ismert nagyságú *F*1 erővel → a test *a*1 gyorsulással mozog, ill.

az ismeretlen *F*2 erővel → a test *a*2 gyorsulással mozog.

m

F1

F2

m

Mivel a tömeg állandó, ezért *F*2/*a*2 = *F*1/*a*1 , amiből *F*2-t ki tudjuk számolni.

(Ismert nagyságú erőt rugóval vagy tömeggel hozunk létre.)

A gyorsulásokat a gyorsított test mozgásából (idő- és helymérés alapján) tudjuk kiszámolni.

Dinamikai tömegmérésnél azonos (de nem ismert) nagyságú erővel gyorsítjuk

az ismert *m*1, ill.

az ismeretlen *m*2 tömegű testet,

m1

m2

F

F

meghatározzuk a gyorsulásukat,

és mivel *F* állandó, *m*1*a*1 = *m*2*a*2 alapján számoljuk ki az ismeretlen tömeget.

**III. axióma**: kölcsönhatás törvénye.

Jelölje ***F*AB** az A test által a B testre kifejtett erőt, és ***F*BA** a B test által az A testre kifejtett erőt; a két erő egyenlő nagyságú, megegyező hatásvonalú és ellentétes irányú, azaz ***F*BA** = –***F*AB** , azaz   
***F*AB** + ***F*BA** = **0**.

A

B

FBA

FAB

Az erő-ellenerő (akció-reakció) megnevezés azt sugallja, hogy az egyik váltja ki a másikat, időben késleltetés van közöttük, de ez nem igaz, egyszerre, egy időben lépnek fel.

**IV. axióma**: szuperpozíció törvénye (az erők összegzése).

Ha egy testre egyszerre több erő is hat, akkor a test gyorsulását az erők vektori eredője határozza meg: ***F*eredő** = Σ***F*i** , az ***F*** = *m****a*** egyenletbe az erők vektori eredőjét kell írni: Σ***F*i** = *m****a***.

Ez azt is jelenti, hogy az egyszerre fellépő erők nem befolyásolják egymást (vagyis a kölcsönhatások egymástól függetlenek).

F2

F1

F3

F4

F1+F2

F3

F4

F1+F2+F4

F3

F1+F2+F4+F3 = Fe

Kérdés: hogy is tudunk eltolni egy szekrényt? A III. axióma szerint Σ***F*** = 0 , a IV. axióma szerint   
Σ***F*** = *m****a*** , akkor ezek szerint mindig ***a*** = 0?!? Nem, a kérdés az, hogy mikor mire összegzünk: a III. axióma egy kölcsönhatásra, a IV. axióma pedig egy testre vonatkozik!

3 test van kölcsönhatásban: az ember, a szekrény, és a padló. Egy-egy kölcsönhatásban érvényes a III. axióma, az erő nagysága egyenlő:

ember

szekrény

A szekrény két kölcsönhatásban vesz részt, a két erő eredője határozza meg a gyorsulását:

ember

szekrény

Az ember két kölcsönhatásban vesz részt, a két erő eredője határozza meg a gyorsulását:

ember

szekrény

Fk2

Fk2

Fk1

Ftr

m1

m2

mtr

Fs,tr

Fs1

Fg2

Fg1

Fg tr

Fk1

Fs2

Fny1

Fny tr

Fny2

**MOZGÁSEGYENLET**

Az *m****a*** = Σ***F*i** egyenletbe

egyrészt behelyettesítjük az egyes kölcsönhatásoknak megfelelő erőtörvényeket (ld. később), amelyek általánosan ***F***(***r***,***v***,*t*) alakban írhatók fel;

másrészt tudjuk kinematikából, hogy ; ezeket behelyettesítve

: ez a test **mozgásegyenlet**e ,

(matematikailag ez egy másodrendű differenciálegyenlet)

ennek megoldásaként kapjuk az ***r***(*t*) függvényt, ami a mozgást leírja. A megoldáshoz szükség van 2 integrációs állandóra, azaz a kezdeti helyvektorra és a kezdősebességre is (vagy hely és sebesség vektorára bármely időpontban).

Determinisztikus, azaz a mozgásegyenlet és a kezdeti feltételek ismeretében a jövőbeli viselkedés meghatározható.

[De: létezik determinisztikus káosz is! ilyenkor a rendszer nagyon érzékeny a kezdeti feltételekre, a közeli állapotok kis eltérése exponenciálisan növekedhet, és mivel a valóságban kis eltérésekre mindig számítani kell, a viselkedés megjósolhatatlan lesz.

Pl. <https://www.youtube.com/watch?v=N6cwXkHxLsU> ]

**ERŐTÖRVÉNYEK**

avagy: mitől, hogyan függ az egyes kölcsönhatásokban fellépő erő? milyen alakú az ***F***(…) függvény?

Általánosan az erő függhet a test helyétől, sebességétől, és függhet az időtől is: ***F***(***r***,***v***,*t*)

Akkor van úgy-ahogy könnyű dolgunk, ha ***v***-től nem függ.

Ha nem függ helytől: HOMOGÉN

Ha nem függ időtől: STACIONÁRIUS

Ezeket az erőtörvények fogjuk tanulni:

1) Általános tömegvonzási (gravitációs) erő:

2) Földi nehézségi (gravitációs) erő:

3) Kényszererők: felület, kötél, rúd

4) Súrlódási erők (csúszási és gördülési súrlódás, tapadási súrlódás)

5) Közegellenállási erő

6) Lineáris rugalmas erő, rugóerő

Erőnek hívjuk, de nem erőtörvények:

– a centripetális „erő”: mint látni fogjuk, ez nem a Σ***F***-ben jelenik meg, hanem az *m****a*** tartalmaz   
*macp*= „*Fcp*” -t, ha a mozgás görbe vonalú (az erők eredőjének a sebességre merőleges komponense). Nem köthető egy bizonyos kölcsönhatáshoz (többféle kölcsönhatásból is származhat);

– a tehetetlenségi erők (transzlációs, centrifugális, Coriolis, Euler erő).

Nézzük sorra az erőtörvényeket, és hogy mi következik belőlük:

**Földi nehézségi (gravitációs) erő**

A Föld által bármely testre kifejtett vonzóerő.

**Fg**

Nagysága: *F*g = *mg*, ahol  
*g* a gravitációs gyorsulás, aminek értéke kis mértékben függ attól, hogy a Föld mely pontján van a test (ld. később), Magyarországon *g* ≈ 9,81 m/s2;

iránya: függőlegesen lefelé;

vektorként: ***g***-t vektorként értelmezve ***F*g** = *m****g*** ,

vagy függőlegesen felfelé mutató *z*-tengellyel felírva ***F*g** = –*mg* ***k*** .

Alkalmazás:

**Hajítás**

A test szabadon mozog, a testre ható egyetlen erő a nehézségi erő, ami adott testre egy konstans erő, mert hajítás esetén eltekinthetünk *g* helyfüggésétől.

Tetszőleges **konstans erő** esetén: ha ***F*** = konst.

→ a test gyorsulása ***a*** = ***F***/*m* = = konst.

→ a test sebessége, ha *t* = 0-ban ***v*** = ***v*0**: ***v*** = ***v*0** + ***a***⋅*t*

→ a test helyvektora, ha *t* = 0-ban ***r*** = ***r*0:** ***r*** = ***r*0** + ***v*0**⋅*t* + ½***a*⋅***t*2

Hajítás esetén ***F*** = *m****g***, tehát

→ a test gyorsulása ***a*** = ***g*** = konst.; = ***g***

→ a test sebessége, ha *t* = 0-ban ***v*** = ***v*0**: ***v*** = ***v*0** + ***g***⋅*t*

→ a test helyvektora, ha *t* = 0-ban ***r*** = ***r*0:** ***r*** = ***r*0** + ***v*0**⋅*t* + ½***g*⋅***t*2

(ez koordinátarendszertől független megoldás)

**Függőleges hajítás**

Függőlegesen felfelé mutató z tengelyt veszünk fel → az = – g;

→ a sebessége: vz(t) = v0 – gt ;

→ a z koordinátája (ha a kiinduló koordinátája z0): z(t) = z0 + v0t – ½gt2 .

A sebesség pozitív, ha felfelé mozog a test; a lefelé zuhanás közben a sebesség negatív.

A felfelé és lefelé mozgó szakasz egyben kezelhető.

Szabadesés: olyan függőleges hajítás, amikor v0 = 0 → vz(t) = – gt → z(t) = z0 – ½gt2 .

Feladat:Függőlegesen felfelé dobunk egy követ 20 m/s sebességgel.

**a)** Mekkora lesz a sebessége 3 s múlva?

**b)** Hol lesz ekkor a test?

**c)** Milyen irányban mozog ebben a pillanatban?

**d)** Milyen maximális magasságra jut fel a test?

Megoldás

Számolhatnánk úgy, hogy először kiszámoljuk, mennyi ideig emelkedik, és milyen magasra jut ezalatt, majd a maradék időre a pálya legmagasabb pontjáról induló szabadeséssel számolnánk tovább. Mivel azonban a sebességet a képletben előjeles mennyiségként kezeljük, a felfelé ill. lefelé irányuló mozgást egyben számolhatjuk: felfelé vz > 0, lefelé vz < 0, a legfelső ponton vz = 0.

Adatok: v0 = 20 m/s (pozitív, mert felfelé dobtuk el a testet); és z0 legyen 0

→ vz(t) = 20 – 10t ; z(t) = 20t – 5t2.

**a)** t = 3 s: v(3) = 20 – 10∙3 = –10 m/s.

**c)** v(3) előjele negatív → a test lefelé mozog.

**b)** z(3) = 20∙3 – 5∙32 = 15 m.

**d)** Az emelkedés ideje: v(th) = 0: 20 – 10th = 0 → th = 2 s ;

ezalatt z(th) = 20∙2 – 5∙22 = 20 m magasra jutott, ez volt a maximális magasság.

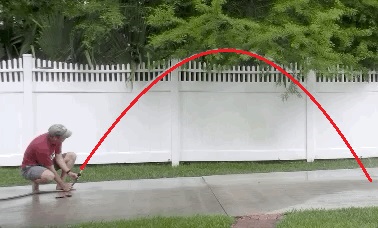
Az ábrán látható, hogy a vz(t) függvény a z(t) deriváltja, vz aktuális értéke a z(t) érintőjének meredekségével arányos:

t = 2 s-nál z(t) érintője vízszintes → ekkor vz = 0;

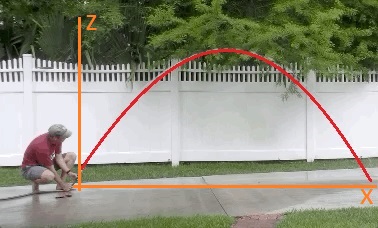
előtte z(t) érintőjének meredeksége pozitív → vz > 0;

utána z(t) érintőjének meredeksége negatív → vz < 0.

**Ferde hajítás**



Írjuk fel a gyorsulást, a sebességvektort és a helyvektort Descartes-koordinátarendszerben. A mozgás az x – z síkban történik, a z tengely felfelé mutat.



A gyorsulásnak csak egy komponense van:

***g*** = –*g* ***k***.

A kezdősebességet felbontjuk komponensekre:

***v*0** =*v*0 cos*α* ***i*** + *v*0 sin*α* ***k*** ,

v0

v0x = v0 cosα

v0z = v0 sinα

α

így a sebességvektor

***v***(*t*) = *v*0x ***i*** + (*v*0z – *gt*) ***k*** .

A helyvektor

***r***(*t*) = (*x*0 + *v*0x *t* ) ***i*** + *y*0 ***j*** + (*z*0 + *v*0z *t* – ½ *gt*2) ***k*** ,

ill. ha lehet, az origót toljuk az **r0** = x0 **i** + y0 **j** + z0 **k** pontba, így

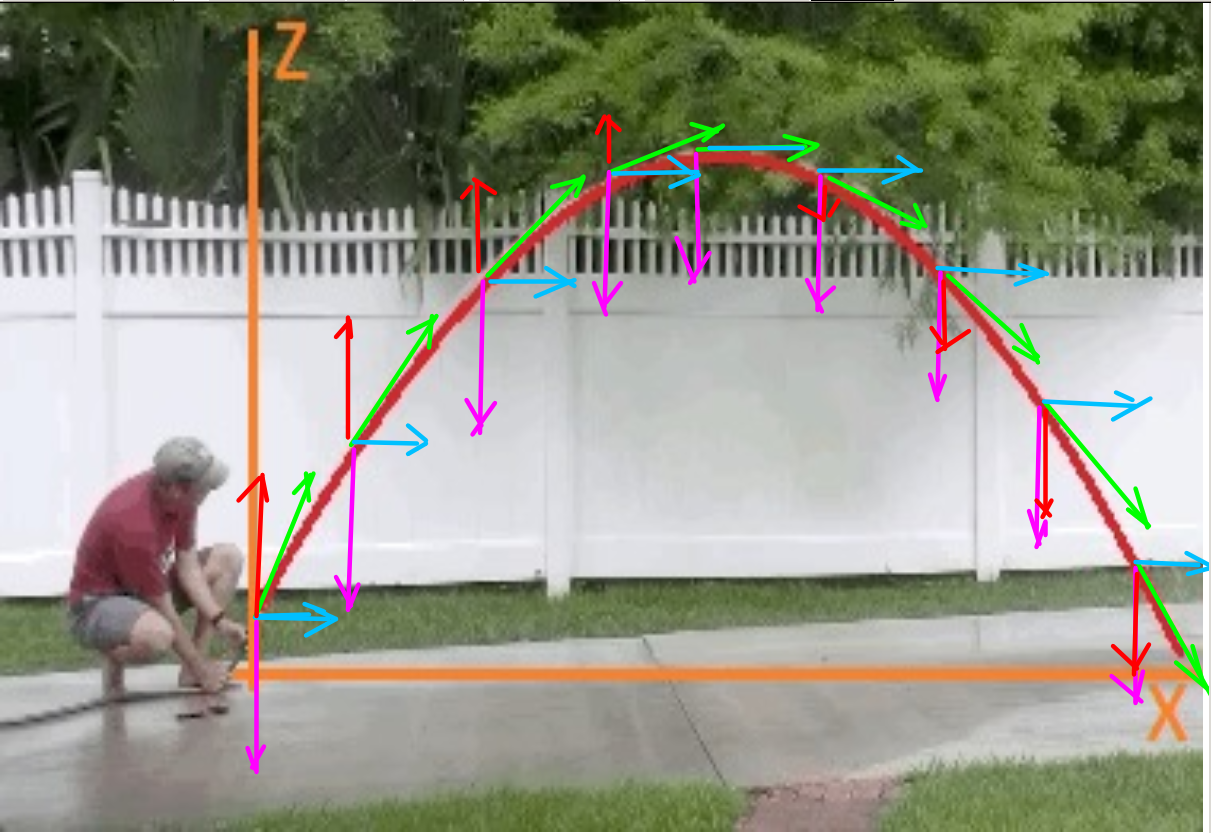
**r**(t) = v0x t **i** + (v0z t – ½ gt2) **k** .

Kiírva külön csak a koordinátafüggvényeket:

|  |  |
| --- | --- |
| *a*x = 0 | *a*z = –*g* |
| *v*x = *v*0x | *v*z(*t*) = *v*0z – *gt* |
| *x*(*t*) = *v*0x *t* (+ *x*0) | *z*(*t*) = *v*0z *t* – ½ *gt*2 (+*z*0) |

illetve a kezdősebesség nagyságát és a vízszintes síkkal bezárt *α* szögét felhasználva:

|  |  |
| --- | --- |
| *a*x = 0 | *a*z = –*g* |
| *v*x = *v*0 cos*α* | *v*z(*t*) = *v*0 sin*α* – *gt* |
| *x*(*t*) = *v*0 *t* cos*α* (+ *x*0) | *z*(*t*) = *v*0 *t* sin*α* – ½ *gt*2 (+*z*0) |



A sebesség vízszintes komponense állandó, mert vízszintes irányban nincs gyorsulása a testnek (mivel nem hat vízszintes erő).

A sebesség függőleges komponense csökken: először felfelé mutat és a nagysága csökken, majd a pálya legfelső pontján zérus, utána lefelé mutat és az abszolút értéke nő.

A két komponens vektori eredője a test pillanatnyi sebessége, ami a pálya érintőjének irányába mutat.

A testre állandó nagyságú gyorsulás hat lefelé (a nehézségi erő miatt), ezért csökken a függőleges sebességkomponens.

Látható, hogy a sebességvektor iránya és nagysága hogyan változik a gyorsulásvektor (ill. a nehézségi erő vektora) hatására.

A hajítás pályája

A fenti függvények minden mennyiséget az idő függvényében írnak le. A pálya megadásához az összetartozó z(x) értékeket kell kifejeznünk, ehhez az időt kiküszöböljük a kifejezésekből (a pálya alakjánál nem lényeges, hogy mikor van az adott ponton a test).

Fejezzük ki x(t)-ből t-t:

x(t) = v0x t → t = x/(v0cosα),

és írjuk át z(t)-be:

z(x) = v0 ⋅ x/(v0cosα) ⋅ sinα – ½ g⋅[x/(v0cosα)]2 = tgα⋅ x – ½ [g/(v02cos2α)]⋅ x2

Látható, hogy ez egy parabola.

Hajítás magassága

azaz: a kiindulási pont magasságához képest mennyivel magasabban van a pálya legfelső pontja?

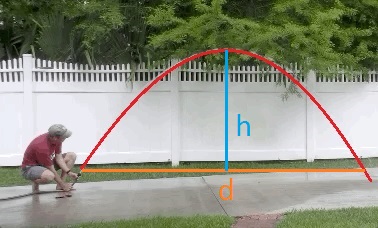
Ez a z(t) = v0 t sinα – ½ gt2 értéke akkor, amikor a test legmagasabban van.

Amikor legmagasabban van, akkor a függőleges sebességkomponens zérus:

v0 sinα – gte = 0 → te = v0 sinα /g .

Ezt az időt helyettesítjük be a z(t) függvénybe:

h = z(te) = v0 te sinα – ½ gte2 = v0 ∙ (v0 sinα /g) ∙ sinα – ½ g ∙(v0 sinα /g)2 = … = .



Hajítás távolsága

azaz: milyen távol van a test a kiindulási ponttól, amikor visszaérkezik a kiindulási pont magasságára?

Ez az x(t) = v0 t cosα értéke akkor, amikor a földre (sík terepen, azaz az elhajítás magasságára) érkezik, azaz amikor z(t) = v0 t sinα – ½ gt2 értéke zérus.

v0 td sinα – ½ gtd2 = 0 → td = 2 v0 sinα / g ,

vagyis td = 2te , hiszen a felfelé és a lefelé rész szimmetrikus.

Ezt az időt helyettesítjük be az x(t) függvénybe:

d = x(td) = v0 td cosα = v0 (2 v0 sinα / g) cosα = .

Ezt az értéket kifejezhetjük a pályából is:

x⋅ (tgα – g/(2v02cos2α)⋅x) = 0 → x1 = x0 = 0 és x2 = d = … = .

Adott v0 kezdősebesség esetén milyen α szöggel elhajítva lesz a legnagyobb a földet érés távolsága?

Mivel sin(2α) maximuma 1, ha 2α = 90° → α = 45°-nál maximális a távolság.

Nem sík terepen a kiindulási és a földre érkezési pont közötti távolság nem ezzel a képlettel számolható, hanem az x(t), z(t) függvényekkel!

Levezethető, hogy h magasságból történő hajítás esetén a maximális távolságra ctg2α = 1 + 2gh / v02.