**ERŐTÖRVÉNYEK**

**1. Földi nehézségi (gravitációs) erő**

A Föld által bármely testre kifejtett vonzóerő.

**Fg**

Nagysága: *F*g = *mg*, ahol  
*g* a gravitációs gyorsulás, aminek értéke kis mértékben függ attól, hogy a Föld mely pontján van a test (ld. később), Magyarországon *g* ≈ 9,81 m/s2;

iránya: függőlegesen lefelé;

vektorként: ***g***-t vektorként értelmezve ***F*g** = *m****g*** ,

vagy függőlegesen felfelé mutató *z*-tengellyel felírva ***F*g** = –*mg* ***k*** .

**2. Általános tömegvonzási (gravitációs) erő**

Bármely két test között fellép.

m1

m2

r

F

Nagysága:

Fgrav = γ ,

ahol

*m*1 ill. *m*2 a testek tömege [kg],

*γ* univerzális állandó (*γ* = 6,67·10–11 m3s2/kg ),

*d* a két tömegpont közötti távolság [m];

iránya: vonzó a két testet összekötő egyenes mentén;

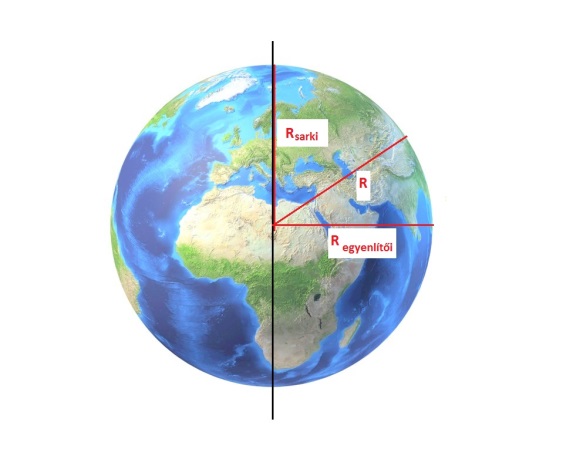
vektorként:

,

ahol ***r*** az egyikből a másikba mutató vektor.

Az tömegvonzási erő a távolság növekedésével csökken, de sehol nem zérus.

A földi nehézségi erő az általános tömegvonzási erőből származik, ahol a két egymást vonzó test közül az egyik a Föld. Az általános képlet tömegpontokra vonatkozik, de a Föld nagy kiterjedésű a felszínén levő testhez képest – hogyan használható a képlet? úgy, hogy (térfogati integrálból következik az, hogy) a Föld teljes tömege a Föld középpontjába képzelendő, a távolság pedig a Föld sugara. [Ha a Föld „belsejében” van egy test, akkor csak az a része számít a Földnek, ami „beljebb” van, mert a vonzóerő szempontjából a külső gömbhéj eredője zérus. Ha átfúrnánk a Földet és beleejtenénk egy követ, az harmonikus rezgőmozgásba kezdene.]



Tehát a Föld felszínén

,

és ezt használjuk röviden

*F*g = *mg* alakban

→ a gravitációs gyorsulás értéke a Föld felszínén

*g*0 = .

A *γ* = 6,67430⋅10–11 m3s2/kg,

*M*Föld = 5,972⋅1024 kg,

*R*Föld = 6371 km értékek behelyettesítésével kapjuk meg *g*0 értékét, ld. lejjebb.

*g* értéke függ a földrajzi szélességtől

egyrészt, mert a Föld nem gömb alakú:

a sugara az Egyenlítőnél nagyobb

(*R*Föld,E = 6378,2 km, a saroknál *R*Föld,s = 6356,8 km)

mivel *g* ~ 1/(*R*Föld)2 → *g* értéke kisebb az Egyenlítőnél;

másrészt, mert a Föld forog

ld. később a neminercia-rendszereknél!

Számoljunk:

*g*0 = .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | *R*Föld  (km) | *g*számolt,1 (m/s2) | *g*mért (m/s2) |
| Egyenlítő | 6378,2 | 9,798 | 9,780 |
| sarok | 6356,8 | 9,864 | 9,832 |

Budapest g = 9,81 m/s2 ≈ 10 m/s2.

*g* értéke függ a tengerszint feletti magasságtól:

a tengerszinten

,

*h* magasságban

, amiből

*g*h = ,

azaz ,

a Föld középpontjától távolodva *g* értéke csökken (a Mount Everesten ez kb. 0,3 %-os csökkenés).

Eddig homogénnek tételeztük fel a Földet, de *g* értéke függ még a helyi kőzettömegektől is.

Kérdés: A Föld és egy ember közötti kölcsönhatásban melyikre hat nagyobb ható tömegvonzási erő?

member aember → aember

MFöld aFöld → aFöld

az erő egyenlő, a gyorsulások térnek el!

A hajítás pályája:

z(*x*) = *v*0 ⋅ *x*/(*v*0cos*α*) ⋅ sin*α* – ½ *g⋅*[*x*/(*v*0cos*α*)]2 = tg*α*⋅ *x* – ½ [*g*/(*v*02cos2*α*)]⋅ *x*2 : ez egy parabola

Földi → általános gravitációs erő:

Mi történik, ha a Föld felszínéről egyre nagyobb kezdősebességgel „dobunk” fel valamit?

Amíg *mg*-vel számolhatunk (azaz nem kell figyelembe vennünk, hogy a távolság növekedése miatt a gravitációs erő csökken): a pálya parabola.

Ha magasabbra „dobjuk” / lőjük, akkor már nem számolhatunk konstans *g*-vel, hanem az általános tömegvonzási erővel kell számolni.

Lesz egy speciális sebesség, amikor pont „körbeesi” a Földet: *v*1 ≈ 7,9 km/s (ennek levezetését ld. később a körmozgás dinamikájánál); ez az első kozmikus sebesség, amivel Föld körüli körpályára lehet állítani valamit.

Ha *v* < *v*1 ill. *v* > *v*1, akkor ellipszis alakú a pálya, csak az a különbség, hogy *v* < *v*1 esetén a Föld középpontja az ellipszispálya eldobástól távolabbi fókuszpontjában van, *v* > *v*1 esetén pedig a közelebbiben.

Második kozmikus (azaz szökési) sebesség: *v*2 ≈ 11,2 km/s (ennek levezetését ld. később az energia-megmaradásnál); ez az a legkisebb sebesség, amely esetén már nem jön vissza a Földre, hanem parabolapályán távolodik a Földtől. Ha ennél is nagyobb a kezdősebesség, hiperbola pályán távolodik a Földtől.

**Bolygómozgás**

Ha nézünk két bolygót (mindkettő mozog), az még megoldható („kéttest probléma”):

2 test <https://www.youtube.com/watch?v=m4WOU1wZRVY>

de három bolygó (mind mozog) már nagyon nehéz!

3 test <https://www.youtube.com/watch?v=rr0JpgKPKgg>

hát még több…

Naprendszer <https://www.youtube.com/watch?v=gvSUPFZp7Yo>

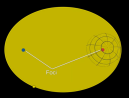
Hány bolygó van a Naprendszerben? 9 → 10 → 8 (Plútó…).

Kéttest probléma: ***r*1**  ill. ***r*2** helyvektorú bolygókra felírjuk az erőket és felhasználjuk, hogy a két erő összege zérus → az jön ki, hogy a tömegközéppontjuk nem gyorsul, tehát felírhatjuk a mozgásukat a tömegközéppontot tekintve origónak, így megoldható a mozgásegyenlet. Háromtest: nem megoldható!

Mivel a Naprendszer bolygóira felírt mozgásegyenleteknek nincs analitikus megoldása (és a numerikus se könnyű), ezért jönnek jól

**Kepler törvényei**

műholdak <https://youtu.be/fxgmMg-YnKw?t=23>

****

<http://nagysandor.eu/AsimovTeka/Kepler/full.html>

|  |  |
| --- | --- |
| 1. A bolygók ellipszis alakú pályán mozognak, a pálya egyik fókuszpontjában a Nap van. | Nap  bolygó  nagytengely  kistengely  x  x  fókuszpontok |
| vezérsugár  A1  A2  Nap | 1. A Naptól a bolygókhoz húzott vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol (azaz a területi sebesség állandó)   [ez azt jelenti, hogy Napközelben nagyobb a bolygó sebessége]. |
| 1. *T*2 / *a*3 = konst. minden bolygóra,   ahol *T* a bolygó keringési ideje,  *a* a pálya nagytengelyének fele. |  |

Pálya excentricitása: (a középpont és gyújtópont távolsága) / (nagytengely fele)

0: kör; 0–1: ellipszis; 1: parabola; 1– : hiperbola

pl. Föld: nagytengely fele 149597887,5 km, kistengely fele 149576999,8 km, excentricitás 0,0167

A bolygók pályájának excentricitása kicsi, az ellipszisek jó közelítéssel körnek tekinthetők, a pálya nagytengelyének fele (*a*) helyett használható az *R* pályasugár.

A III. Kepler törvény képletének értelmezésére a körmozgásnál visszatérünk.

A Neptunusz keringési ideje ≈165 (földi) év.

Milyen távolságban kering a Neptunusz a Nap körül?

(A Nap felszínéről a Földre 8,3 perc alatt ér a fény;

a Nap-Föld távolság 150 millió km.)

TNeptun = 165 év

aFöld = 150 millió km = 1 CSE

TFöld = 1 év

*T*2 / *a*3 = konst.

MO.

A III. Kepler-törvényt alkalmazva

,

azaz

,

amiből ≈ 30,

és behelyettesítve a Nap-Föld távolságot

*a*Neptun = 30 *a*Föld = 30·150·106 km = 4500·106 km = 4,5·1012 m (30 CSE).

Pontos adat: 4495·106 km.

**3) Kényszererők: felület, kötél, rúd**

A testek mozgását felület, kötél, rúd korlátozza, ezt a geometriai kényszert a test és a felület, kötél, rúd között ható erővel írjuk le.

Csak az irányukat tudjuk (a geometriai kényszer miatt), a nagyságukat nem, az mindig az adott problémából adódik!

A testre a felület által kifejtett ***F*ny** nyomóerő:

iránya: a felületre merőleges (ha görbült a felület, akkor a pontbeli érintősíkra merőleges); csak nyomni tud;

nagysága akkora, hogy a test a felületen maradjon.

Példák, rajzok: vízszintes sík, lejtő, körpálya; külső erő hatása (van-e általános képlet?)

A testre a kötél által kifejtett ***F*kötél** kötélerő:

iránya: csak húzni tudja a testet, kötélirányban;

nagysága: a test a kötél hosszánál távolabbra nem kerülhet a kötél rögzítési pontjától.

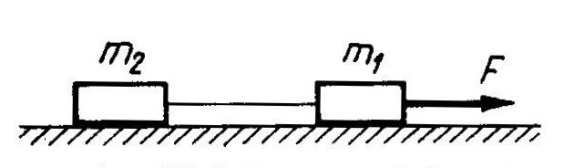
Példák, rajzok: függőleges helyzet; inga szélső pontja, alsó pontja, általános helyzete.

A testre rúd által kifejtett ***F*rúd** rúderő:

iránya: húzni és nyomni is tudja a testet, rúdirányban;

nagysága abból adódik, hogy a rúd hossza nem változhat.

Vízszintes irányú, *F* = 10 N nagyságú erővel hatunk az *m*1 = 2 kg tömegű testre, amely egy fonállal az *m*2 = 3 kg tömegű testhez van kötve az ábrán látható elrendezésben. Mekkora erő feszíti a fonalat, ha a fonál tömegétől és a súrlódástól eltekintünk?



Megoldás

Fkb = 6 N

Fkj = 6 N

F = 10 N

m1 = 2 kg

m2 = 3 kg

m2g

m1g

Fny1

Fny2

z

x

m1a = F – Fkötél

m2a = Fkötél

amiből

a = F / (m1+m2) = 2,0 m/s2;

Fkötél = 6,0 N.

Megjegyzés:

m1-et F – Fkötél gyorsítja, a1 = (F – Fkötél)/m1 ,

m2-t pedig Fkötél gyorsítja: a2 = Fkötél/m2 ,   
ezek hatására lesz a1 = a2.

A számértékekkel:

a1 = (F – Fkötél)/m1 = (10–6)/2 = 2 m/s2; a2 = Fkötél/m2 = 6/3 = 2 m/s2.

**4) Súrlódási erők**

**Csúszási** súrlódási erő

Szilárd felület és a hozzá képest mozgásban levő test között lép fel (a felületek között ható kémiai erők és a felületek érdessége miatt).

Nagysága: *F*s = *μ* *F*ny , ahol

*F*ny a testre ható nyomóerő,

*μ* a csúszási súrlódási együttható;

iránya: a sebességgel ellentétes irányú;

vektorként: ***F*s** = –*μ F*ny ⋅ ***v***/*v* .

(Figyelem: ***F*s** = – *μ* ***F*ny** nem jó felírás, mert ***F*s** és ***F*ny** merőlegesek egymásra!)

**Tapadási** súrlódás

Szilárd felület és a hozzá képest nyugalomban levő test között lép fel, ha valamilyen külső erő el akarja mozdítani őket egymáshoz képest.

Nagysága: akkora, amekkora ahhoz szükséges, hogy a test nyugalomban maradjon, de nem lehet nagyobb, mint *F*t,max = *μ*t *F*ny , ahol

*F*ny a testre ható nyomóerő,  
*μ*t a tapadási súrlódási együttható;

(ha ennél nagyobb erőre lenne szükség, akkor a test elkezd mozogni a felülethez képest);

iránya: a felülettel párhuzamos; azzal ellentétes irányú, amerre a külső (eredő) erő el akarja mozdítani a testet.

Pl.

Mekkora súrlódási erő lép fel, ha egy m = 100 kg tömegű testet szeretnénk eltolni

a) Fa = 150 N nagyságú, b) Fb = 250 N nagyságú erővel?

A tapadási súrlódási együttható μt = 0,2; a csúszási súrlódási együttható μ = 0,1.

Megoldás: Ft,max = μt·mg = 0,2·100·10 = 200 N

a) esetben Fa < Ft,max → Ft = Fa = 150 N nagyságú tapadási súrlódási erő lép fel.

b) esetben Fb > Ft,max → a test elkezd csúszni, Fs = μ·mg = 0,1·100·10 = 100 N nagyságú csúszási súrlódási erő lép fel.

RAJZ: Fsúrlódási az Fkülső függvényében

Pl. Vízszintes, sík felületre helyezett, nyugalomban levő 15 kg tömegű testre 50 N nagyságú erő hat vízszintesen, a felülettel párhuzamosan.   
A test és a felület közötti csúszási súrlódási együttható értéke 0,5;  
a tapadási súrlódási együttható értéke 0,6.

Megoldás

Ft,max = μtmg = 0,6∙15∙10 = 90 N

F = 50 N < Ft,max = 90 N → a testre Ft = 50 N tapadási súrlódási erő hat.

Gördülési ellenállás: *F*gördülési = *μ*gördülési *F*ny

Azonos felületek között *μ*gördülési < *μ*csúszási < *μ*tapadási .

Pl. ABS, induláskor kipörgő kerék, szög kihúzása.

Mire jó a súrlódás?

Egy látványos bizonyíték arra, hogy a súrlódási erő nagysága attól függ, hogy mennyire vannak összenyomódva a felületek: <https://www.videoman.gr/106419>

Fenti feladat kiegészítve μ = 0,1 súrlódással:

Fkb

Fkj

F

m1

m2

Fs1

m2g

m1g

Fs2

Fny1

Fny2

m1**a** = **F** + m1**g** + **Fny,1** + **Fkötél** + **Fs,1**; m2**a** = m2**g** + **Fny,2** + **Fkötél** + **Fs,2**

A vízszintes komponensek:

m1a = F – Fk – Fs,1; m2a = Fk – Fs,2

Fs,1 = μ Fny,1 = μ m1g; Fs,2 = μ Fny,2 = μ m2g

azaz

m1a = F – Fkötél – μ m1g; m2a = Fkötél – μ m2g

Ebből a = (F – μ m1g – μ m2g) / (m1+m2) = F / (m1+m2) – μg

μm1g = 2,0 N; μm2g = 3,0 N; a = 1,0 m/s2; Fkötél = 6,0 N.

Vegyük észre, hogy most a1 = (F – Fkötél – Fs,1)/m1 , a2 = (Fkötél – Fs,2)/m2 .

Az eddigi erőtörvények alkalmazása:

**Lejtő** (a vízszintessel *α* szöget bezáró sík felület)

Csúszás a lejtőn:

Ha nincs egyéb külső erő, a mozgásegyenlet vektori alakban: *m****a*** = *m****g*** + ***F*ny** + ***F*s**

Fs

Fg

Fny

α

α

α

α

mgǁ‖ = mg∙sinα

mg⊥ = mg∙cosα

Lejtővel párhuzamos és arra merőleges komponensekre bontjuk:

* lejtőre merőlegesen: *ma*⊥ = *F*ny – *mg*⋅cos*α*  
  mivel a test a felületen mozog, ezért *a*⊥ = 0 kell legyen, innen tudjuk *F*ny nagyságát:   
  ha nincs egyéb erő, akkor *F*ny = *mg*⋅cos*α*,   
  de ha van még a lejtővel nem párhuzamos erő (pl. valaki tolja-húzza), akkor annak a lejtőre merőleges komponensét is figyelembe kell venni;
* lejtővel párhuzamosan: *ma* = ± *mg*⋅sin*α* – *μF*ny

a sebesség irányát szokás pozitív iránynak venni, vagyis a pozitív irány választható felfelé vagy lefelé is, ezért a mindig lefelé mutató *mg*⋅sin*α* előjele lehet pozitív (ha lefelé mozog a test) ill. negatív is (ha felfelé mozog a test); de a súrlódási erő előjele mindig negatív, mert az a sebességgel mindig ellentétes irányú!

Fs

Fg

Fny

α

Tehát ha nincs egyéb erő, akkor *ma* = ± *mg*⋅sin*α* – *μ*⋅*mg*⋅cos*α* ,  
vagyis a testnek a lejtőn állandó nagyságú gyorsulása lesz:

lefelé *a*le = (sin*α* – *μ*·cos*α*)⋅*g*, felfelé *a*fel = –(sin*α* + *μ*·cos*α*)⋅*g*.

Az állandó nagyságú *a*le vagy *afel* gyorsulást felhasználva *v* = *v*0 + at, ill. *s* = *v*0t + ½at2.

Ha lefelé csúszik a test, és a lejtő hajlásszögére teljesül, hogy *μ* = tg*α*, akkor *a* = 0, azaz a sebesség nagysága állandó lesz.

Fs

Fg

Fny

α

Fpárh

Fs’

Fg

Fny’

α

Fv

Fvǁ = Fv ∙cosα

Fv⊥ = Fv ∙sinα

Tapadás a lejtőn:

Ha nincs egyéb külső erő, a mozgásegyenlet vektori alakban: *m****a*** = *m****g*** + ***F*ny** + ***F*t**

* lejtőre merőlegesen: *ma*⊥ = *F*ny – *mg*⋅cos*α* = 0 → *F*ny = *mg*⋅cos*α* ;
* lejtővel párhuzamosan: *ma* = *mg*⋅sin*α* – *F*t .

A test nyugalomban van, azaz *a* = 0, ha *F*t = *mg*⋅sin*α* .

Tudjuk azonban, hogy *F*t maximális értéke *F*t,max = *μ*t⋅*F*ny. Addig tudja a tapadási súrlódási erő mozdulatlanul tartani a testet, amíg *F*t,max ≥ *mg*⋅sin*α*, vagyis *μ*t⋅*mg*⋅cos*α* ≥ *mg*⋅sin*α* , vagyis

tg*α*  ≤ *μ*t.

Ennél meredekebb lejtőn a test csúszni kezd.

**5) Közegellenállási erő**

Fluidum (folyadék, gáz) és a hozzá képest mozgásban levő test között lép fel.

Iránya: a sebességgel ellentétes irányú;

nagysága: valahogy függ a sebesség nagyságától; kísérletek alapján   
kis sebességeknél (lamináris áramlás esetén) jó közelítés a lineáris: *F*k = –*c*1 *v*

nagyobb sebességeknél négyzetes közelítés a jó: *F*k = –*c*2 *v*2 (turbulens áramlás esetében)

vektorként: ***F*k** = –*c*1 ***v*** ill. ***F*k** = –*c*2 *v****v***.

Hol a határ? ez függ a közeg viszkozitásától, sűrűségétől is (Reynolds szám).

(Autónál pl. már négyzetessel kell számolni.)

Reynolds szám Re = ρlv/η ρ: sűrűség, l: karakterisztikus hossz, v: sebesség, η: viszkozitás;

szemléletesen: Re = Fgyorsító / Fsúrlódási = Ekin / Wsúrl

Re < 1 esetén Stokes törvény (a fluidum belső súrlódása miatt lép fel):

Fe = –6πηr v η: a közeg viszkozitása .

A.) Ha súrlódásmentes vízszintes síkon mozog a test:

A.1) Lineáris: m⋅ = –cvx .

A megoldás:

vx = vx0·e–(c/m)t , x = (m/c)·vx0·(1 – e–(c/m)t) ; ezekből v = v0 – (c/m)·x → xmax = v0⋅m/c.

A test végtelen ideig mozog, de nem jut el bárhová, a megtett út véges.

A.2) Négyzetes: m⋅ = –c’vx2 .

A megoldás:

vx = vx0 / (1 + (c’vx0/m)·t ) , x = (m/c’)·ln(1 + (c’vx0/m)·t); ezekből vx = vx0·e–(c’/m)x .

A test végtelen ideig mozog, és végtelen utat tesz meg. (Persze ahogy csökken a sebessége, áttérünk a négyzetesről a lineáris közelítésre.)

B.) Függőleges mozgás esetén:

Függőlegesen lefelé zuhanó testre ható erők: *m****a*** = *m****g*** + ***F*k** , azaz

lefelé *mg* nagyságú,

felfelé a sebességétől függő (*F*k = *c*1 *v*, ill. *F*k = *c*2 *v*2) nagyságú erő hat.

Ha *mg* > *F*k, akkor a két erő eredője lefelé hat → a test sebessége nő → *F*k is nő, mindaddig, amíg be nem áll az a sebesség, amire teljesül az, hogy *mg* = *F*k.

Ha *mg* < *F*k, akkor a két erő eredője felfelé hat → a test sebessége csökken → *F*k is csökken, mindaddig, amíg be nem áll az a sebesség, amire teljesül az, hogy *mg* = *F*k.

Azt a sebességet, amivel teljesül *mg* = *F*k , **stacionárius** sebességnek nevezzük.

A stacionárius sebesség arányos a *mg* -vel (azaz a ható erővel) és fordítottan arányos a közegellenállási együtthatóval. Ez olyan, mint amit az arisztotelészi világképben megfogalmaztak: azaz hogy a test sebességének fenntartásához erő szükséges, és a kialakuló sebesség arányos a ható erővel és fordítottan arányos az „ellenállással”. Azaz a megfigyeléseink (el nem hanyagolható közegellenállás esetén) tényleg azt mutatják, hogy az erő a (stacionárius!) sebességgel arányos.

B.1) Lineáris: m⋅= –cvz –mg.

A megoldás:

vz = (mg/c + vz0)· e–(c/m)t – mg/c , z = (m/c)·(mg/c + v0)·(1 – e–(c/m)t ) – (mg/c)·t

Ha felfelé mutat a kezdősebesség, gyorsabban veszíti el, mint közegellenállás nélkül.

Lefelé zuhanva kellő hosszú úton beáll a stacionárius sebesség: vz,stac = – mg/c .

B.2) Négyzetes: ekkor felfelé ill. lefelé máshogy kell felírni a mozgásegyenletet:

felfelé m⋅ = –c’vz2 – mg,

lefelé m⋅ = –c’vz2 + mg.

Az egyenlet megoldható, a v(t), z(t) függvények felírhatók, de nagyon csúnyák.

A stacionárius sebesség kifejezhető a második egyenletből: vz,stac = .

Pl. néhány stacionárius sebesség, és hogy mekkora úton áll be:

puskagolyó: 145 m/s (522 km/h), 2500 m

ejtőernyős szabadon: 60 m/s (216 km/h), 430 m

ejtőernyős ernyővel: 5 m/s (18 km/h), 3 m (pl. Felix Baumgartner, Redbull Stratos)

esőcsepp (3 mm átmérőjű): 7 m/s (25 km/h), 6 m

C.) Ferde hajítás közegellenállással:

C.1) Lineáris: m**a** = –mg**k** + **Fk** = –mg**k** – c (vx **i** + vz **k**) → m⋅ = – c vx , m⋅= – mg – c vz

A két differenciálegyenlet egymástól függetlenül megoldható (ld. A.1 ill. B1.), a megfelelő fenti megoldások eredője lesz a mozgás.

C.2) Négyzetes: a ra és a -ra felírt differenciálegyenletek csatoltak lesznek:

m**a** = –mg**k** + **Fk** = –mg**k** – c’ (vx **i** + vz **k**)

→ m⋅= – c’ ⋅vx , m⋅= – mg – c’ ⋅*vz*

Ez a két egyenlet nem oldható meg egymástól függetlenül, csak numerikus megoldás állítható elő!

(Dinamikai felhajtóerő)

**6) Lineáris rugalmas erő, rugóerő** (mit jelent a rugalmas és a lineáris?!?)

Rugalmas test alakváltozása esetén a rugalmas test végéhez rögzített testre kifejtett erő.

Nagysága: *F*r = *k*⋅Δ*ℓ*, ahol

*k* a rugóállandó [N/m] = [kg/s2],

Δ*ℓ*= *ℓ*–*ℓ*0 a rugó megnyúlása (*ℓ* a rugó aktuális hossza, *ℓ*0 a nyugalmi hossza);

iránya: mindig a rugó nyugalmi hosszának megfelelő irányba mutat.

Hooke-törvény.

RAJZ

Vegyük fel az *x* tengelyt úgy, hogy *x*=0 az *ℓ*0 nyugalmi hossznál legyen, és *x* pozitív iránya mutasson a megnyújtott állapot irányába, vagyis *x*>0, ha megnyújtottuk, *x*<0, ha összenyomtuk.

*F* iránya mindig ellentétes *x*-ével: vektorként: ***F*r** = –*kx****i*** , skalárként *F*r = –*kx*.

Alkalmazás:

**Rezgőmozgás**

Rugó vízszintes, súrlódásmentes felületen: *m****a*** = ***F*r** + *m****g*** + ***F*ny**

A függőleges erők eredője zérus, Fny = mg.

Vízszintes síkban a rugóerő hat a testre; az *x* koordinátára, azaz a rugó megnyúlására felírható egyenlet:

*m* = –*kx* *k*: rugóállandó [N/m] = [kg/s2]

Ez a test mozgásegyenlete – milyen *x*(*t*) függvény ennek a differenciálegyenletnek a megoldása? Matekból nem tudunk hozzá eleget, hogy megoldjuk, viszont tudjuk, hogy a rugó végéhez rögzített test harmonikus rezgőmozgást fog végezni:

*x*(*t*) = *A* cos(*ωt*+*ϕ*0)

Kérdés, hogy a létrejövő rezgőmozgás *A* amplitúdója, *ω* körfrekvenciája és *ϕ*0 fázisállandója mitől és hogyan függ.

Kinematikánál láttuk, hogy

*v*(*t*) = = –*Aω* sin(*ωt*+*ϕ*0)

*a*(*t*) = = –*Aω*2 cos(*ωt*+*ϕ*0) , azaz:  = – *ω*2 *x* .

A mozgásegyenletünk pont ilyen alakú, ha *m*-mel osztunk: = –(*k*/*m*) *x* ,

vagyis látható, hogy a mozgásegyenlet megoldása tényleg *x*(*t*) = *A* cos(*ωt*+*ϕ*0) alakú lesz,

és a rezgés körfrekvenciáját, periódusidejét a két egyenlet összevetéséből határozhatjuk meg.

*ω*2 = *k*/*m* → *ω* = → *T* = 2π/*ω* = 2π .

És mitől függ *A* és *ϕ*0? az *x*0 kezdeti kitéréstől és a *v*0 kezdeti sebességtől:

*x*(0) = *x*0 = *A* cos*ϕ*0

*v*(0) = *v*0 = –*Aω* sin*ϕ*0

Elosztva őket

tg*ϕ*0 = – *v*0 / (*ωx*0) ,

és a sin2*x* + cos2*x* = 1 azonosságot használva

.

Ha a mozgást úgy indítjuk el, hogy egy adott *x*0 kitérésnél kezdősebesség nélkül elengedjük, azaz *v*0 = 0 esetén *A* = *x*0 és *ϕ*0 = 0 (ezért előnyös a cos(…) alakú felírás).

Hogyan lehet kísérletileg létrehozni különböző amplitúdójú és kezdőfázisú rezgéseket?!?

|  |  |
| --- | --- |
| Vízszintes, súrlódásmentes asztalon a rugó végéhez rögzített *m* = 100 g tömegű golyó 10 cm-rel való kihúzásához 1 N erőre van szükség.  a) A golyót elengedve mekkora lesz a rezgésidő?  b) Mekkora a golyó sebessége a nyugalmi helyzeten való áthaladáskor?  c) Az elengedés után 2 s múlva hol lesz a golyó? | l0  0  x |

MO.

a) k = F/x = 1 / 0,1 = 10 N/m = 10 kg/s2 .

.

b) vmax = Aω : A = 0,1 m , , vmax = 1 m/s .

c) x = A cos(ωt+ϕ0) = 0,1 cos (10t)

(ϕ0 = 0, mert kezdősebesség nélkül indul a test a maximális kitérésről)

x(2) = 0,1 cos (10·2) ≈ 0,0408 m = 4,08 cm .

Rugó függőlegesen: *m****a*** = ***F*r** + *m****g***

RAJZ

Vegyük fel az *x* tengelyt függőlegesen lefelé, *x*=0 legyen most is a rugó nyugalmi hosszánál (*ℓ*0):

*m* = –*kx* + *mg*

Az *mg* tag miatt most nem teljesül, hogy  = –konst. ⋅ *x* , ahogy azt egy *x*(*t*) = *A* cos(*ωt*+*ϕ*0) alakú megoldásnál láttuk. Mi lesz ennek a mozgásegyenletnek a megoldása? Be fogjuk látni, hogy ez is harmonikus rezgőmozgás lesz. Kérdés, hogy miben tér el a vízszintes helyzetű rugóval létrejövő rezgőmozgástól? pl. a rezgésidő ugyanannyi lesz-e, mint vízszintes helyzetben?

A mozgásegyenletből látjuk, hogy lesz egy egyensúlyi megnyúlás, ahol *a* = = 0 :

–*k x*es + *mg* = 0 → *x*es = *mg* / *k* .

Vezessünk be egy új változót, az egyensúlyi megnyúlástól való eltérést: *y* = *x* – *x*es = *x* – *mg*/*k*.

Ennek deriváltjai megegyeznek *x* deriváltjaival, mivel csak egy konstans köztük a különbség: és = .

Fejezzük ki az új változóval az eredeti változót:

*x* = *y* + *mg*/*k*,

és helyettesítsük be ezt az alakot a mozgásegyenletbe, majd alakítsuk át:

m = *m* = –*kx* + *mg* = –*k*(*y* + *mg*/*k*) + *mg* = –*ky* – *k⋅mg*/*k* + *mg* = –*ky* .

Látjuk, hogy

*m* = –*ky* ,

tehát az egyensúlyi megnyúlástól (de nem a nyugalmi hossztól!) mért eltérésre ugyanolyan egyenletet kaptunk, mint vízszintes helyzetű rugó esetén, vagyis ugyanolyan periódusidejű lesz a rezgőmozgás, csak nem a rugó nyugalmi hossza, hanem a (ráakasztott tömegtől függő) új egyensúlyi megnyúlás körül:

*y*(*t*) = *A* cos(*ωt*+*ϕ*0), ill. *x*(*t*) = *A* cos(*ωt*+*ϕ*0) + *x*es = *A* cos(*ωt*+*ϕ*0) + *mg* /*k* .

Az *A* amplitúdó és a *ϕ*0 fázisállandó meghatározásánál a kiinduló koordináta alapján az *y*0 kezdeti kitérést kell meghatározni, amit az egyensúlyi helyzettől kell mérni.

Függőleges helyzetben tehát a rezgőmozgás az egyensúlyi megnyúlásra lesz szimmetrikus, az lesz a rezgés egyensúlyi helyzete. Az egyensúlyi helyzetben a test gyorsulása zérus, mivel a rugóerő és a nehézségi erő eredője zérus, *F*r = *mg*. Az egyensúlyi helyzet alatt, azaz az egyensúlyinál nagyobb megnyúlások esetén *F*r > *mg* → az eredő erő felfelé mutat. Az egyensúlyi helyzet fölött az eredő erő lefelé mutat. Ez többféleképpen jöhet létre: Ha a rugó meg van nyúlva, akkor *F*r felfelé mutat (*mg*-vel ellentétes irányba), de *F*r < *mg*. Lehetséges az is, hogy a rezgés amplitúdója olyan nagy, hogy a rugó hossza éppen megegyezik a nyugalmi hosszával: ilyenkor *F*r = 0, és az eredő erő abban a pontban *mg*-vel egyenlő. Ha a rezgés amplitúdója olyan nagy, hogy a rezgés közben a rugó összenyomódik, akkor ott a rugóerő lefelé mutat, *mg*-vel egy irányba. A két erő vektori eredője az alsó és felső szélső helyzetben egyenlő nagyságú (a szimmetria miatt).

Vízszintes és függőleges helyzetű rugóval létrejövő harmonikus rezgőmozgás összehasonlítása:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | vízszintes helyzetű rugóval | függőleges helyzetű rugóval |
| mozgásegyenlet | | *m* = –*kx* | *m* = –*kx* + *mg* ill. *m* = –*ky* |
| egyensúlyi helyzet | helye | az *ℓ*0 nyugalmi hossznál  *x* = 0 | az egyensúlyi megnyúlásnál  *x*es = *mg* / *k* ill. *y* = 0 |
|  | rugóerő | Fr = 0 | Fr = k⋅xes = mg |
|  | eredő erő | ΣF = Fr = 0 | ΣF = Fr – mg = 0 |
|  | gyorsulás | 0 | 0 |
|  | sebesség | max | max |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Van egy *ℓ*0 = 32,0 cm hosszú, *k* = 6,40 N/m rugóállandójú rugónk. Ezt a rugót függőlegesen fellógatjuk, és a végére akasztunk egy m tömegű testet, majd meghúzzuk lefelé, hogy a hossza 60,0 cm legyen, elengedjük, és megmérjük 10 rezgés idejét: *t*10 = 8,60 s.

a)Mekkora a rugó végére akasztott test tömege?

b) Mekkora a rezgés amplitúdója?

c) Rajzoljuk meg a testre ható erőket a rezgőmozgás alsó és felső pontjában!

MO.

a) A rezgésidőből → = 0,120 kg

b) Függőleges helyzetben a rezgőmozgás egyensúlyi helyzete nem a rugó nyugalmi hossza lesz, mert az m tömegű testet ráakasztva a rugó a nyugalmi hosszához képest megnyúlik annyit, hogy a testre ható erők eredője zérus legyen: *k*·*x*es = *mg* → *x*es = *mg*/*k* = 0,120·10,0/6,40 = 0,1875 m.

A rugó az egyensúlyi helyzetben *ℓ*es = *ℓ*0 + *x*es = 0,320 + 0,1875 = 0,5075 m hosszú.

Az amplitúdó ennek és az elengedéskori hossznak a különbsége:

*A* = 0,600 – 0,5075 = 0,0925 m = 9,25 cm.

A rezgéskor tehát a rugó hossza *ℓ*max = *ℓ*es + *A* = 0,5075 + 0,0925 = 0,600 m és

*ℓ*min = *ℓ*es – *A* = 0,5075 – 0,0925 = 0,415 m között változik.

c) A testre ható erők:

a nehézségi erő *mg* = 0,120·10 = 1,20 N lefelé, és   
a rugóerő (*F*r = *k*·Δ*ℓ* ) a rugó nyugalmi hosszának megfelelő pont felé.   
Az alsó helyzetben a rugó megnyúlása *ℓ*max – *ℓ*0 = 0,600 – 0,320 = 0,280 m,   
a rugóerő *F*r,alsó = 6,40·0,280 = 1,792 N felfelé, az eredő 1,792–1,20 = 0,592 N felfelé;

a felső helyzetben a rugó megnyúlása *ℓ*min – *ℓ*0 = 0,415 – 0,320 = 0,095 m,   
a rugóerő *F*r,felső = 640·0,095 = 0,608 N felfelé, az eredő 1,20–0,608 = 0,592 N lefelé.

RAJZ!!

Csillapított rezgőmozgás (vízszintesen): *m****a*** = ***F*r** + ***F*c** + *m****g*** + ***F*ny**

A csillapítás a pillanatnyi sebesség nagyságával arányosan fékez:

*m* = – *kx* – *c v* = – *kx* – *c* , *c*: [kg/s]

= – (*k*/*m*) *x* – (*c*/*m*) *v*

Szokás bevezetni, hogy *k*/*m* = *ω*02 ahol *f*0 = *ω*0/(2π) a csillapítatlan, gerjesztetlen rendszer frekvenciája, azaz az ún. sajátfrekvencia,

és *c*/*m* = 2*β* , *β*: csillapítási tényező (itt nem szöggyorsulást jelöl!) [1/s]

Kis csillapítás esetén (ahol *β* < *ω*0) a megoldás

*x*(*t*) = ( *A*0·e–*βt* ) cos(*ωt*+*ϕ*0) , azaz

az amplitúdó exponenciálisan csökken ( *A*1/*A*2 = *A*2/*A*3 = … )

és a körfrekvencia kissé változik, méghozzá , a periódusidő nő.

Ez már szigorúan véve nem periodikus, de a zérushelyek periodikusan követik egymást.

Nagy csillapítás esetén (ahol *β* > *ω*0) a megoldás egy perióduson belül zérushoz tart (RAJZ!).

Aperiodikus határeset (ahol *β* = *ω*0): ekkor tart a leggyorsabban zérushoz (így kell tervezni a mérlegeket, hogy minél kevesebb idő alatt beálljanak).

Gerjesztett rezgőmozgás (vízszintesen): *m****a*** = ***F*r** + ***F*c** + ***F*g** + *m****g*** + ***F*ny**

Milyen erővel lehet megakadályozni a csillapodást? periodikussal: *F*g = *F*g0 cos(*ω*g*t*)

*m* = – *kx* – *c v* + *F*g0 cos(*ω*g*t*)

Ha *β* nagy → az amplitúdó monoton csökken.

Ha *β* kicsi: egy átmeneti, tranziens szakasz után periodikus lesz, méghozzá *ω*g körfrekvenciával (de a rezgő rendszer Δ*ϕ* fáziskéséssel követi a gerjesztő rendszert):

*x*(*t*) = *A* cos(*ω*g*t*–Δ*ϕ*).

A rezgés amplitúdója attól függ, mennyire tér el az *ω*g gerjesztő körfrekvencia és a rendszer *ω*0 saját körfrekvenciája. Ha *ω*g = *ω*0, akkor az amplitúdó maximális, ilyenkor azt mondjuk, hogy **rezonancia** lép fel.

RAJZ: rezonanciagörbe!!! *A* – *ω*g diagram

A maximális amplitúdó nagysága függ a csillapítástól is (ha nincs csillapítás, végtelen nagy lenne).

<https://www.youtube.com/watch?v=iyw4AcZuj5k>

TACOMA híd: <https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs>

**Rugók toldása**

Sorosan: az erő megegyezik az összes rugón (egymást húzzák), a megnyúlásuk összeadódik:

Δ*ℓ* = Δ*ℓ*1 + Δ*ℓ*2 , azaz→

*k*s kisebb lesz, vagyis a rugó gyengébb lesz

Párhuzamosan: a megnyúlás megegyezik az összes rugón, és az erők összeadódnak:

*F* = *F*1 + *F*2 , azaz *k*p Δ*ℓ* = *k*1 Δ*ℓ* + *k*2 Δ*ℓ* → *k*p = *k*1 + *k*2

*k*p nagyobb lesz, vagyis a rugó erősebb lesz.