A fizikai mérések hibája

A természettudományos megismerés egyik alapvető módszere a *kísérletezés, mérés*. Tapasztalatokat, adatokat szolgáltat a gyakran nem nyilvánvaló összefüggések felismeréséhez, és lehetőséget nyújt az elméleti eredmények ellenőrzésére. A mérés során a mérendő mennyiséget az egységül választott mennyiséggel (etalonnal) hasonlítjuk össze, melynek eredményét számokkal fejezzük ki.

A méréssel meghatározott fizikai mennyiségek szükségképpen véges pontosságúak. Az ismételt mérések valamilyen mértékben mindig eltérnek egymástól. A mért értékek bizonytalansága különböző forrásokból származhat, úm. a mérőberendezések tökéletlensége, ismeretlen környezeti hatások, ill. a vizsgált jelenségek sztochasztikus jellege. Ezért a mérés csak akkor tekinthető teljesnek, ha a legvalószínűbbnek tartott érték mellet megadjuk annak várható hibáját is. **A mérési hiba legalább közelítő meghatározása nélkül a mérési eredmény információ tartalma vitatható!**

Az alábbiakban összefoglaljuk a hibaszámítás alapjait a laboratóriumi gyakorlatokhoz szükséges szinten. Az ismertetésre kerülő fogalmak ill. eljárások szigorú megalapozására a valószínűségszámítás keretében kerül sor.

1. Hibatípusok

Eredetük szerint az alábbi hibafajtákat különböztetjük meg:

- rendszeres (szisztematikus) hiba;
- véletlen hiba;
- statisztikus hiba.

Rendszeres (szisztematikus) hiba: Meghatározott módon ható okok következményeként lép fel. Azonos körülmények között végzett méréseknél nagysága és előjele nem változik. Ilyenek a mérőeszköz tökéletlenségéből származó hibák (a működés ill. hitelesítés pontatlanságai), melyek nagyságát a műszerekre vonatkozó hitelesítési táblázatok, ill. műszerleírások tartalmazzák. [Pl. a mérlegsúlyoknál megadják, hogy a valódi érték mennyire térhet el a névleges (ráírt) értéktől.] Ezen adatokat valamennyi mérőeszközre ismernünk kell, hogy a hibaszámítás során figyelembe vehessük. A szisztematikus hibák bizonyos fajtái nem kezelhetők ilyen módon. Ide tartoznak a mérési módszerek specifikus hibái, vagy az elhanyagolt külső hatásokból (nyomás, hőmérséklet, páratartalom, elektromos és mágneses szórt terek, stb.) eredő bizonytalanság. Ezek általában csak akkor észlelhetők, ha a mérést több független módszerrel is elvégezzük.

Véletlen hiba: A mérést befolyásoló sokfajta külső ok együttes következményeként lép fel. Minden egyes mérésnél másképp jelentkezik. Előjele negatív és pozitív egyaránt lehet. Ilyen eredményre vezetnek a véletlenszerűen fellépő környezeti hatások (mechanikai rezgések, feszültség- ill. hőmérséklet-ingadozások, stb.), a mechanikus alkatrészek kotyogása, beállítási- és leolvasási pontatlanságok (az utóbbiak mérésautomatizálással nagymértékben csökkenthetők), stb. A véletlen hibák teljes kiküszöbölésére nincs mód, számításba venni csak átlagos hatásukat lehet.

Statisztikus hiba: Nagyszámú egymástól független esemény megfigyelésekor lép fel. Ilyen például a részecskeszámlálásnál észlelt hiba. Ha t idő alatt n független esemény következett be, az nem jelenti azt, hogy t idő alatt minden esetben n az események bekövetkezésének száma. Egyszer több, másszor kevesebb esemény következik be. Ez a *statisztikus ingadozás*. A valószínűségszámítás szerint, ha az észlelt események száma meghatározott idő alatt középértékben n, akkor ez az érték $\pm\sqrt{n}$ statisztikus ingadozást mutat. Ez a *valószínű statisztikus hiba*. A statisztikusan ingadozó mennyiségek *relatív* hibája (ld. alább) úgy csökkenthető, hogy a megfigyelést lehetőleg hosszú időre ill. nagyszámú eseményre terjesztjük ki. A $\pm\sqrt{n}/n$ relatív hiba értéke ugyanis n növelésével csökken.

Jelölések: A mérési hiba jelölésére leggyakrabban a görög delta (Δ) betűt használjuk (így pl. az l hosszúság hibája Δl), de speciális hibatípusok esetén (mint pl. a szórás) más jelöléseket alkalmazunk (ld. alább). Az x mennyiség hibáját *abszolút* (Δx), *relatív* ($\Delta x/x$), vagy *százalékos* formában ($\Delta x/x \cdot 100\%$) adhatjuk meg: $\Delta l = \pm\ 0{,}002$ m, $\Delta l/l = \pm\ 0{,}0015$, vagy $\Delta l/l = \pm\ 0{,}15\ \%$. Az utóbbi kettő előnye, hogy önmagukban is jelzik a mérés pontosságát. A mérési eredményeket csak annyi számjegyig érdemes feltüntetni, ahány jegyig pontosságuk terjed.

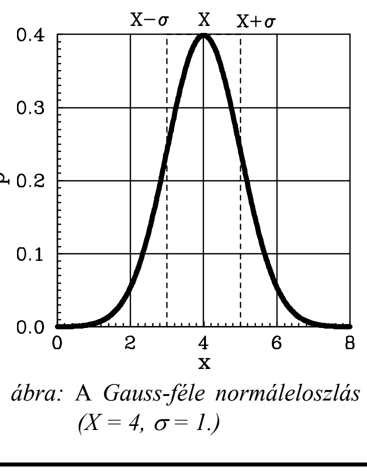
A laboratóriumi gyakorlat mérései során mindhárom hibatípus fellép. A meghatározandó mennyiségek vagy *közvetlenül* mérhetőek, vagy ismert függvénykapcsolat segítségével közvetlenül mért mennyiségekből *közvetve* határozhatók meg. Az alábbiakban a közvetlen és közvetett mérések hibáit tárgyaljuk.

2. Hibaszámítás közvetlen mérések esetén

A legkedvezőbb érték (átlagos érték): Tegyük fel, hogy egy x mennyiséget igen sokszor mérünk meg azonos körülmények között. A tapasztalat szerint az egyes mérésekből származó adatok egy értéktartományon belül szórnak. A tartomány közepére eső értékek gyakoribbak, mint széleken levők. Ez a viselkedés rendszerint jól közelíthető a *Gauss-féle normáleloszlás*sal:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2} \right],$$

ahol $p(x)\mathrm{d}x$ annak valószínűsége, hogy a mérés eredménye az $(x, x+\mathrm{d}x)$ tartományba esik, σ az eloszlás szélessé-



1. ábra: A *Gauss-féle normáleloszlás* *(X = 4, σ = 1.)*

gét meghatározó paraméter, és X a valódi érték. Belátható, hogy $n \to \infty$ esetén a mért értékek aritmetikai átlaga

$$x_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \to X .$$

A gyakorlatban a mérések száma korlátozott, így x_k csak X legkedvezőbb becslésének tekinthető. Az, hogy az x_i és x_k értékek mennyire közelítik meg X-et az egyes mérések hibáiból számítható, és többféle módon számszerűsíthető. Mivel a nagyszámú (normáleloszlást követő) mérés hibáinak algebrai középértéke nullához tart, az egyszerű középértékképzés hiba meghatározásra nem alkalmas. Megadhatók ellenben az egyes mérések ill. a középérték *kvadratikus* hibái. Az alábbiakban csak a leggyakrabban használt hiba definíciókra térünk ki.

Az egyes mérések kvadratikus középhibája (várható v. standard eltérése): A mért x_i értékeknek a valódi X értéktől való átlagos eltérése. Szokásos jele σ. Gyakran használt további elnevezése az *egyes mérések várható* vagy *standard eltérése* (*standard deviation*, *Standardabweichung*). Nagyszámú mérés esetén az alábbi közelítő kifejezés alapján számítható:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_k)^2} \qquad (1)$$

- $x = x_k \pm \sigma$ a Gauss-görbe inflexiós pontjaihoz tart. A mérési pontok 68,3 %-a esik ebbe a tartományba, míg 95,4 % ill. 99,7 % felel meg az átlag $\pm 2\sigma$ ill. 3σ nagyságú környezetének.
- Vegyük észre, hogy miközben a mérési pontok számának növelése az x_k átlagérték javulásához vezet, σ-t *nem* csökkenti. Ez azt tükrözi, hogy az egyes mérések pontosságán a mérés megismétlése nem változtat.

Az átlagérték kvadratikus középhibája (várható v. standard eltérése): Az előbbinél (ti. az egyes mérésekből kapott eredmény bizonytalanságánál) lényegesebb fogalom az átlagérték közepes hibája, σ_k, mely az x_k átlagnak az X tényleges értéktől való közepes eltérését adja meg. Ennek megfelelően az *átlagérték várható* vagy *standard eltérésé*nek is nevezik. σ_k az x_k átlagértéket körülfogó azon tartomány szélességének a fele, melyben a tényleges érték 68,3 % valószínűséggel található meg.

$$\sigma_k = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_k)^2} \qquad (2)$$

- A tényleges érték 95,4 ill. 99,7 % valószínűséggel található a $x_k \pm 2\sigma_k$ és $x_k \pm 3\sigma_k$ tartományokban.
- Szemben σ-val, a mérések számának növekedésével σ_k csökken, ami azt tükrözi, hogy az átlag egyre jobban megközelíti a tényleges értéket.

A gyakran használt *szórás* (*scattering*, *Streuung*) és *variancia* (*variance*, *Varianz*) kifejezések a megfelelő *kvadratikus középhibát* (σ, σ_k) jelentik. Szigorúan véve, az (1) és (2) összefüggések csak igen nagyszámú mérés ($n > 100$) esetén érvényesek. A gyakorlatban sokszor meg kell elégednünk 3-10 méréssel. Ekkor a (2) egyenlettel számított σ_k-t az alábbi táblázatban megadott ún. *t-faktor*ral kell megszorozni.

Általános megjegyzések: A fenti képleteket nem szabad formálisan alkalmazni. Tegyük fel, hogy egy távolságot többször megmérünk, de csak a cm-es osztásokat olvassuk le, s így mindig 100 cm-t kapunk. A (2) egyenlet formális alkalmazásával a mérési hiba nullának adódik. Valójában a pontatlan leolvasás következményével állunk szemben. A (2) képletből legfeljebb csak akkor kaphatunk reális eredményt, ha a műszer leolvasását a lehető legnagyobb pontossággal végezzük. Ekkor az utolsó jegy már becsült, tehát az egyes mérésekre különbözni fog. Ez az ingadozás nem egyszerűen a leolvasási hibából ered, hanem sok, esetleg teljesen ismeretlen tényező is szerepet játszhat benne. (Digitális műszereknél a leolvasási hiba lényegesen kisebb jelentőségű, de általában ott is található olyan jegy, melyhez a véletlenszerűen változó kijelzés miatt nehezebb értéket rendelni.) Ezért fontos, hogy a mérés ismétlésével a véletlen hibát lehetőség szerint csökkentsük. Ha a mérési adatok megegyeznek, hibaként az eredmény utolsó jegyében fél egységet veszünk. Amennyiben ismert a műszer hitelesítéssel megadott hibája is, a kettő közül a nagyobbat tekintjük a mérés hibájának. Ennél pontosabb felvilágosítás csak akkor kapható, ha a mérést több különböző módszerrel is elvégezzük.

Az (1) és (2) egyenletek származtatása: Az egyes mérések tényleges hibája $e_i = x_i - X$. Véges számú mérésből sem X, sem pedig e_i nem határozható meg. Az egyes mért értékek tényleges szórása definíció szerint $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum e_i^2$, ahol Σ az összes pontra való összegzést jelenti. Meghatározni ezt sem tudjuk, de a látszólagos hibákkal kifejezhető az alábbiak szerint. A tényleges hiba definíciójából

$$X = \frac{1}{n}\sum(x_i - e_i) = \frac{1}{n}\sum x_i - \frac{1}{n}\sum e_i .$$

Minthogy $x_k = \frac{1}{n}\sum x_i$, ezért $X = x_k - \frac{1}{n}\sum e_i$, azaz a valódi érték, az egyes mérések átlagértékétől, a tényleges hibák középértékével különbözik.
A tényleges hibát definiáló egyenletből e_i-t kifejezve

$$e_i = x_i - X = x_i - x_k + \frac{1}{n}\sum e_i = v_i + e_k ,$$

ahol $v_i = x_i - x_k$ a látszólagos hiba, $e_k = \frac{1}{n}\sum e_i$ a tényleges hibák átlaga. Ebből az egyenletből adódik, hogy $v_i = e_i - e_k$ ill. $v_i^2 = e_i^2 - 2e_ie_k + e_k^2$. Képezzük most az egyes mérések látszólagos hibanégyzeteinek átlagát:

$$\frac{1}{n}\sum v_i^2 = \frac{1}{n}\sum\left(e_i^2 - 2e_ie_k + e_k^2\right) = \frac{1}{n}\sum e_i^2 - 2e_k\frac{1}{n}\sum e_i + e_k^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum e_i^2 - e_k^2 .$$

Vegyük észre, hogy

	$n = 3$	4	5	6	8	10	20
68,3 % bizonyosság	$t = 1{,}32$	1,20	1,15	1,11	1,08	1,06	1,03
99,7 % bizonyosság	$t = 19{,}2$	9,2	6,6	5,5	4,5	4,1	3,4

$$e_k^2 = \left(\frac{1}{n}\sum e_i^2\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(e_1^2 + e_2^2 + ... + e_n^2 + 2e_1e_2 + ...\right) \cong$$

$$\cong \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum e_i^2 \ ,$$

mivel nagyszámú normáleloszlású adat esetén hasonló nagyságú vegyesszorzatok azonos valószínűséggel fordulnak elő pozitív és negatív előjellel, s így a vegyesszorzatok összege elhanyagolható. Az utóbbi két kifejezést az $\frac{1}{n}\sum v_i^2 = \frac{1}{n}\sum e_i^2 - e_k^2$ egyenletbe helyettesítve, és azt $\sum v_i^2$ -re megoldva megkapjuk a tényleges és a látszólagos hibák közti összefüggést:

$$\sum v_i^2 = \frac{n-1}{n}\sum e_i^2 \ .$$

Ezt a szórás $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum e_i^2$ kifejezésébe helyettesítve az egyes mérések *tényleges* kvadratikus hibájára az (1), míg az átlagérték *tényleges* kvadratikus hibájára a (2) kifejezések adódnak.

3. Hibaszámítás közvetett mérések esetén

Méréseinknél a keresett mennyiséget legtöbbször nem közvetlenül észleljük, hanem közvetlenül mérhető adatokból ismert függvénykapcsolat alapján számítjuk. A kiinduló adatokat ismételt mérésekkel határozzuk meg. Az egyes mérési eredményekből kiszámítjuk a legvalószínűbb értéket, melynek a képletbe történő helyettesítésével kapjuk a keresett mennyiség legvalószínűbb értékét. Ebben az esetben a mérés hibája az alábbiak szerint számítható.

Tegyük fel, hogy meghatározandó mennyiségünk y, az a, b, ... mérhető mennyiségek függvénye: $y = y(a,b,...)$. Mivel általában a hibája $\Delta a \ll a$, $\Delta b \ll b$, stb. felhasználhatjuk az $y = y(a,b,...)$ függvény Taylor-sorát, melyből a magasabbrendű tagok elhagyásával y **maximális abszolút hibáját** a következő kifejezés adja:

$$\Delta y = \left|\frac{\partial y}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial y}{\partial b}\right| \Delta b + ... \ . \tag{3}$$

Minthogy ebben a kifejezésben a parciális differenciálhányadosok abszolút értéke szerepel, a legrosszabb esetet teteleztük fel, amikor valamennyi hiba egyszerre és azonos irányban lép fel. (A Δa, Δb, ... hibák is pozitívnak tekintendők.) A differenciálást természetesen csak a számottevő relatív hibával rendelkező mennyiségekre kell elvégezni.

A *Gauss-féle hibaterjedési törvény* figyelembe veszi, hogy az egyes mennyiségek hibái részben kompenzálják egymást. A **kvadratikus abszolút hiba** az alábbi módon fejezhető ki:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\Delta b\right)^2 + ...} \ . \tag{4}$$

Mivel azonos abszolút hiba különböző nagyságrendű mennyiségekhez tartozhat, azt a mérést ítéljük pontosabbnak, amelynél a relatív hiba kisebb. Közvetett mérések esetén a **relatív hiba**

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\left|\frac{\partial y}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial y}{\partial b}\right| \Delta b + ...}{y(a,b,...)} \quad \text{(maximális)}, \tag{5a}$$

vagy

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\Delta b\right)^2 + ...}{y(a,b,...)^2}} \quad \text{(kvadratikus)}. \tag{5b}$$

Ha eredményünket tényezőkből álló kifejezés adja, akkor a tényezők relatív hibái ill. hibanégyzetei összegződnek. Ha eredményeinket hányados fejezi ki, akkor a számláló és nevező relatív hibái ill. hibanégyzetei összegződnek.

Példa: Tekintsük a nehézségi gyorsulás inga segítségével történő meghatározását. Az inga l hosszát és T lengésidejét Δl ill. ΔT hibával mérjük, majd a $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$ összefüggésből számoljuk a nehézségi gyorsulást. Ezen eljárás kvadratikus hibája a (4) egyenlet szerint

$$\Delta g = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}\Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\Delta T\right)^2} \ ,$$

vagy a differenciálás elvégzése után

$$\Delta g = \pm\sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\Delta l\right)^2 + \left(\frac{8\pi^2 l}{T^3}\Delta T\right)^2} \ .$$

Ebből a kvadratikus relatív hiba (5b) alapján

$$\frac{\Delta g}{g} = \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2} \ .$$

Hasonlóképp (3) és (5a) felhasználásával a maximális relatív hibára

$$\frac{\Delta g}{g} = \pm\left(\frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T}\right) \text{ adódik.}$$

4. Egyenes illesztés a legkisebb négyzetek módszerével

Gyakori feladat, hogy a mért (x_1,y_1), (x_2,y_2), ... (x_n,y_n) adatokat összekapcsoló $y = a + bx$ lineáris egyenlet a és b együtthatóit kell meghatároznunk, ahol az y_i-t meghatározó egyes mérések hibája σ_i, és az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az x értékek pontosak. A feladat a **legkisebb négyzetek módszeré**vel oldható meg. Az összes mérési adat figyelembe vételével olyan a és b értékeket keresünk, melyekre az $y = a + bx$ egyenestől való eltérés a lehető legkisebb. Ezen követelmény teljesülését a

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left[y_i - (a + bx_i)\right]^2}{\sigma_i^2} \tag{6}$$

kifejezés minimalizálásával biztosítjuk, melynek feltétele, hogy a és b kielégítse a

$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i^2} \quad \text{és}$$

$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i^2}$$

egyenleteket.

Vezessük be az $S = \sum \frac{1}{\sigma_i^2}$, $S_x = \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}$, $Sy = \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2}$, $S_{xx} = \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}$, $S_{xy} = \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}$ és $\Delta = SS_{xx} - (S_x)^2$ jelöléseket, és fejezzük ki segítségükkel a-t és b-t. A keresett megoldás:

$$a = \frac{S_{xx}S_y - S_x S_{xy}}{\Delta} \quad \text{és} \quad b = \frac{SS_{xy} - S_x S_y}{\Delta} \qquad (7)$$

Meg kell még határoznunk a és b bizonytalanságát, melyhez minden pontpár hozzájárul. A hibaterjedésnek megfelelően a és b szórása

$$\sigma_a^2 = \sum \left(\frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_i^2 \ \text{ill.}\ \sigma_b^2 = \sum \left(\frac{\partial b}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_i^2 .$$

Minthogy $\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{S_{xx} - S_x x_i}{\sigma_i^2 \Delta}$ ill. $\frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{S x_i - S_x}{\sigma_i^2 \Delta}$, a mérési pontokra való összegzés után a és b szórása (varianciája)

$$\sigma_a^2 = \frac{S_{xx}}{\Delta} \quad \text{és} \quad \sigma_b^2 = \frac{S}{\Delta} . \qquad (8)$$

Az illesztés *jóságát* a $Q\left(\frac{n-2}{2}, \frac{\chi^2}{2} \right)$ kifejezés adja meg (ahol Q a *nem-teljes gamma függvény*). Ez annak a valószínűsége, hogy a fenti módon számított χ^2 érték (véletlen folyamatok során) megvalósul. Ha $Q > 0{,}1$, akkor az illesztés eredménye hihető. Amennyiben $Q > 0{,}001$, az illesztés elfogadható lehet, de csak akkor, ha a hibák nem követik a normáleloszlást, vagy kissé alulbecsültek. Végül, $Q < 0{,}001$ esetben a lineáris viselkedés *és/vagy* az illesztési eljárás jogosan megkérdőjelezhető.

- Nem-teljes gamma függvény: $Q(a,x) = \Gamma(a)^{-1} \int_x^{\infty} t^{a-1} e^{-t} \mathrm{d}t$,

  ahol $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ a teljes gamma függvény.

- Ha az egyes mért y_i értékek σ_i hibája nem ismert, megpróbálkozhatunk becslésével. Ennek feltétele, hogy minden pontra vonatkozóan a standard eltérés azonos legyen ($\sigma_i = \sigma$), továbbá hogy az x és y közt feltételezet lineáris kapcsolat jól illeszkedjen a mérési adatokra. Ekkor a $\sigma_i = 1$ feltevéssel számíthatjuk a és b értékét, ill. a χ^2-et, majd ezek ismeretében az egyes mérések szórását $\sigma^2 = \frac{\chi^2}{n-2}$-vel közelítjük. A paraméter értékek szórását pedig úgy kapjuk, hogy a $\sigma_i = 1$ feltételezéssel a (8) egyenletek alapján számított σ_a^2 ill. σ_b^2 értékeket megszorozzuk $\frac{\chi^2}{n-2}$-vel. Ez az eljárás nem teszi lehetővé az illesztés jóságának független meghatározását.
- Vegyük észre, hogy számos látszólag különböző probléma lefordítható a fenti egyenes illesztésre. Ilyenek pl. az $\eta^j = a + b\xi^m$ ill. $\eta = \alpha \exp(bx)$ függvénykapcsolatok, melyeknél az $y = \eta^j$ és $x = \xi^m$, ill. az $y = \ln(\eta)$ és $a = \ln(\alpha)$ helyettesítéseket alkalmazzuk.

Irodalom:

- A hibaszámítás elméleti kérdéseiről ld. Jánossy Lajos *A valószínűségelmélet alapjai és néhány alkalmazása* című könyvét (Tankönyvkiadó, Budapest, 1967).
- A hibaszámítással kapcsolatos problémák korszerű, gyakorlati megközelítése (összefoglalók, alkalmas numerikus módszerek, kész programok, szubrutinok) W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky és W. T. Vetterling, *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing* című könyvében található (Cambridge University Press, 1986).