**METROLÓGIA ÉS HIBASZÁMíTÁS**

**Metrológiai alapfogalmak**

A **metrológia** a mérések tudománya, a mérésekkel kapcsolatos ismereteket foglalja össze.

Méréssel egy objektum valamilyen tulajdonságáról számszerű értéket kapunk. A **mérési** **eredményt** egy számmal (a **mértékszámmal**) és a **mértékegységgel** adjuk meg.

A mérés történhet mérőeszközzel vagy műszerrel.

A **mérőeszközzel** való mérésnél az objektum valamilyen tulajdonságát **közvetlen összehasonlítással** kapjuk meg, pl. ha hosszúságot méterrúddal vagy tömeget mérleggel mérünk.

A **műszerrel** való mérés viszont **közvetett**, az objektum és a műszer valamilyen kölcsönhatásából kalibrálás alapján tudjuk leolvasni a mérni kívánt mennyiség értékét. Pl. az elektromos áram erősségét mérő Deprez-rendszerű ampermérőben a mutató szögelfordulása a műszerben levő mágnes által keltett mágneses tér, az abban elfordulni képes tekercsben folyó áram, és a mutató tövéhez rögzített spirálrugó kölcsönhatásának az eredménye, de a műszer skálája már áramerősségre van kalibrálva.

Sok esetben azonban nem tudjuk a kérdéses mennyiséget mérni, hanem csak más, vele kapcsolatban álló mennyiséget, illetve mennyiségeket, és az ezekre kapott mérési eredményekből számítással tudjuk meghatározni a kívánt adatot. Ekkor is mérésről: közvetett, illetve **összetett mérésről** beszélünk.

**A mérés hibája**

A mérést megismételve általában nem kapunk azonos mérési eredményeket. Ennek oka lehet az, hogy a mérendő mennyiség nem állandó, pl. változhat az idővel, vagy értéke lehet eltérő a tér különböző pontjaiban, vagy sok elvileg azonos tulajdonságú objektum mégse teljesen egyforma. De ha a mérendő mennyiség állandó is, akkor is befolyásolja a mérési eredményt a mérőeszköz vagy műszer állapota és a megfigyelést végző ember is.

Jelöljük a mérni kívánt mennyiség **valóságos érték**ét x-szel, a mérési eredményt, azaz a **mért érték**et xm-mel. A **mérés hibája** a mért érték és a valóságos érték különbsége:

Δx = xm – x 2.1

Szokás használni a relatív hibát is:

δx = Δx / x 2.2

**A műszerek jellemzői**

A mérés megbízhatóságát elsősorban a műszer jellemzői határozzák meg.

Érzékenység: Azt adja meg, hogy a mérendő mennyiség egységnyi megváltozásához a műszerről közvetlenül leolvasható érték mekkora megváltozása tartozik. Pl. ha egy mutatós mA-mérő végkitérése 250 mA, a skálája 50 beosztású (50 skálarész, azaz 50 skr) és lineáris, akkor a műszer érzékenysége 50 skr / 250 mA = 0,2 skr/mA. Az érzékenység a műszerről leolvasható legkisebb egységnek (egy skálarésznek) megfelelő mérendő mennyiség reciproka (a fenti példában a mutató egy skálarésznyi kitérése 5 mA áramnak felel meg, azaz 5 mA/skr reciproka az érzékenység). Ha a skála nem lineáris, akkor az érzékenység függ attól, hogy milyen érték közelében mérünk.

Pontosság (accuracy): A mért és valódi érték maximális lehetséges eltérése, a hiba abszolút értékének maximuma.

Reprodukálhatóság (precision): A műszerrel történő ismételt mérésekkel kapható mérési eredmények lehetséges maximális eltérése egymástól.

mit jelent a „lehetséges”?!?

**Hibatípusok**

Véletlen hiba: A mérési eredmények a valóságos értéktől mindkét irányban azonos valószínűséggel, véletlenszerűen térnek el. Nagy számú mérés átlagát véve a véletlen hiba tetszőlegesen csökkenthető.

Rendszeres hiba: A mérési eredmények a valóságos értéktől eltérő érték körül ingadoznak. Oka a hibás vagy rosszul beállított műszer, de rendszeres hibát okoz az is, ha elhanyagolunk vagy rosszul veszünk figyelembe valamilyen, a mérést befolyásoló külső tényezőt (pl. hőmérsékletet vagy nyomást).

**2.2. A hibaszámítás alapjai**

A hibaszámítás a valószínűségszámítás és matematikai statisztika felhasználásával a mérés során fellépő véletlen hibák becslésére ad módot.

Valószínűségszámítási alapfogalmak; a valószínűségi sűrűség- és eloszlásfüggvény

Méréssel nemcsak egyetlen objektum valamilyen állandó értékű sajátosságára kaphatunk számszerű értéket, hanem jellemezhetjük egy objektum olyan sajátosságát is, mely időben vagy helyileg változik. Vagy jellemezhetünk egy olyan egyedekből álló sokaságot, melyekre nézve a mérendő tulajdonság különböző mértékű. Beszélhetünk a terem hőmérsékletéről, akkor is, ha a hőmérséklet a radiátor mellett más mint az ajtó mellett, éjszaka más mint nappal. Vagy megadhatjuk az évfolyamon a hallgató lányok átlagos magasságát. Egy sokaság esetén az egyedi mérések valamilyen átlaga lesz az egész sokaság jellemzője, de tisztáznunk kell, hogy értjük ezt az átlagot.

A sokaságot jellemző számnak az egyedekre is jellemzőnek kell lenni valamilyen módon, a sokaságra vonatkozó adatból bizonyos mértékig meg kell tudnunk jósolni az egyedi mérések eredményét, azaz a sokaság jellemzésénél azt is meg kell adnunk, hogy a megadott átlagérték körül adott valószínűséggel milyen intervallumban lesznek az egyes mérések eredményei.

Hasonló a probléma a terem hőmérsékletének megadásánál is. Ha a terem hőmérséklete időben változik, a termet különböző időpontokban elképzelve tekinthetjük sokaságnak, melynek elemei az egyes időpontokban a terem pillanatnyi állapotai, és ezekben az állapotokban mérhetjük az egyedi hőmérséklet értékeket. De ha egy jól meghatározott, időben állandó mennyiséget ismételten mérünk, a műszer időben különböző állapotai, a műszer és a mért objektum, valamint a környezet időben változó kölcsönhatása miatt az ismételt mérés eredményei változni fognak. Ezek az elképzelt ismételt mérések megint egy sokaság elemeinek tekinthetők.

Tételezzünk fel egy **sokaságot**, és egy, **a sokaságon értelmezett  mennyiséget**.  különböző értékeket vehet fel, de egyeseket nagyobb, másokat kisebb valószínűséggel. (Egy diáklány magasságát gyakran mérjük 160 és 170 cm közötti értéknek, és a terem hőmérséklete kevéssé valószínű, hogy -10 °C alatt van.) Azt mondjuk, hogy ** valószínűségi változó**. Egy valószínűségi változó lehet **folytonos** (mint a magasság vagy hőmérséklet), és lehet **diszkrét** (mint a kockadobálás eredménye). A **sokaság** lehet **véges elemű** (mint a másodikos vegyészlányok sokasága), vagy **végtelen elemű** (mint a terem állapota tetszőleges időpontokban).

Amikor mérünk, kiválasztjuk egy egyedét a sokaságnak, és ezen végezzük el a mérést. Azt is mondhatjuk, hogy **mintát veszünk** a sokaságból és azon egy **kísérletet végzünk**. A kísérlet eredményes vagy sikeres, ha azt kaptuk, amit vártunk, pl. 6-ost a kockadobálásnál. A **sikeres kísérletet** nevezzük **esemény**nek. Az esemény **valószínűsége P**: az összes lehetséges kedvező kimenetelű mintavétel, kísérlet száma (nk) osztva az összes lehetséges kísérlet számával (NÖ):

P = nk / NÖ 2.3

A valószínűséget pontos értékét meghatározhatjuk, ha van információnk az egész sokaságról, különben a sokaság több-kevesebb elemén végzett kísérlet alapján becsüljük P értékét.

Legyen például a sokaság 100 skatulya gyufa, és a  *diszkrét* valószínűségi változó a gyufaszálak száma egy dobozban. Ha a 100-ból 10 dobozban van 40 szál gyufa, akkor annak az eseménynek a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott skatulyában pont 40 szál gyufát találjunk,

P (=40) = P (40) = 10 / 100 = 0,1.

Ha a valószínűségi változó *folytonos*, akkor csak azt kérdezhetjük, hogy egy bizonyos intervallumba eső értéket milyen valószínűséggel vehet fel. Pl. ha a valószínűségi változó a lányok magassága, és az évfolyam 50 hallgatólányából 10-nek a magassága 160 és 170 cm közé esik, akkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott lány h magasságát 160 és 170 cm közöttinek találjuk:

P (160<h<170) = 10 / 50 = 0,2.

Ismételjük meg a kísérletet N-szer, és tegyük fel, hogy n esetben kaptunk kedvező eredményt (pl. 40 szál gyufát a gyufaszámlálási kísérletben). Az esemény **relatív gyakorisága**:

q = n / N 2.4

Ha N nő, a relatív gyakoriság a valószínűséghez tart:

 2.5

Jelöljük a folytonos valószínűségi változó aktuális mért értékét x-szel.

P (xi < x < xi + x) annak valószínűsége, hogy x értéke xi és xi + xi közé essen. A

 = f (xi) 2.6

határérték a  változó valószínűségi sűrűsége xi -nél, és f(x)  eloszlásának **valószínűségi** **sűrűségfüggvénye** vagy **frekvencia függvénye**. Annak valószínűsége, hogy  xi és xi + xi közötti értéket vegyen fel, közelítőleg

P (xi ≤ x ≤ xi + xi) = f(xi) x, 2.7

ha x elég kicsi. Általában annak valószínűsége, hogy  x1 és x2 közé essen:

P (x1 ≤ x ≤ x2) =  2.8

A valószínűségi sűrűségfüggvény integrálja a valószínűségi változó teljes értelmezési tartományára

 .

A valószínűségi sűrűségfüggvény integrálfüggvényét **valószínűségi eloszlásfüggvénynek** nevezzük és F(x)-szel jelöljük:

F(x) =  F(∞) = 1 2.9

**F(xi) annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó értéke nem nagyobb, mint egy adott xi érték:**

P (x ≤ xi ) = F(xi) 2.10

Az eloszlásfüggvénnyel megadhatjuk annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó értéke x1 és x2 közé esik:

P(x1 ≤ x ≤ x2)= 

Összetett kísérlet eredményének valószínűsége

Ha két mennyiséget, -t és -t mérünk egymás után, mi a valószínűsége annak, hogy -re x-et, -ra y-t kapjunk eredményül?

Ha N(y/x) azoknak az eseteknek a száma, amikor -ra y értéket kapunk, feltéve, hogy -re már x értéket kaptunk, akkor a valószínűség értelmezéséből

P(x,y) =  = P(y/x) P(x). 2.11

P(y/x)-t **feltételes valószínűségnek** nevezzük. **Ha az  változóra vonatkozó kísérlet eredménye nem függ a  változótól, akkor**

P(y/x) = P(y) és P(x,y) = P(x) P(y) 2.12

Ebben az esetben **a két** esemény vagy kísérlet vagy **valószínűségi változó egymástól független**. **Független események valószínűségei szorzódnak, és ugyanez áll a valószínűségi sűrűségfüggvényekre is.**

A mérést általában megismételjük, hogy biztosabb eredményt kapjunk. Ilyenkor feltesszük, hogy az egyes méréseket egymástól függetlenül végeztük, hogy egy későbbi mérés eredményét nem befolyásolja egy előző eredmény. Vigyázzunk, hogy ez tényleg teljesüljön! Nagyon gyakori a megismételt mérés eredményének önkéntelen szubjektív torzítása!

Az eloszlás paraméterei, a minta jellemzői

A valószínűségi sűrűségfüggvényben szereplő konstansok és az azokból leszármaztatott mennyiségek az **eloszlás paraméterei**. Amikor mintát veszünk a sokaságból és ezen a mintán mérést végzünk, a célunk az, hogy az eloszlásról kapjunk információt. Az eloszlásfüggvény alakja ismert, vagy egy meghatározott függvénnyel közelítjük, a függvényben szereplő konstansokat viszont a mérésből akarjuk meghatározni, vagy megbecsülni.

A mérési eredményekből az eloszlásparaméterekre kapott becsléseket nevezzük a **minta** **jellemzőinek**.

A mérés lehetséges kimenetele, a jövőbeli mérési eredmény is valószínűségi változó és így valamilyen valószínűségi sűrűségfüggvény rendelhető hozzá. A mérésnél ténylegesen kapott mérési eredmények viszont konkrét számok, melyekkel kapcsolatban már nincs értelme valószínűségről beszélni.

A mintavételnél is beszélhetünk a majdani mintáról mint sokaságról, melynek elemei -az elképzelt mérési eredmények- valószínűségi változók. Ennek az elképzelt mintának mint sokaságnak a jellemzői szintén valószínűségi változók lesznek.

A következőkben az eloszlás paramétereit -melyek a sokaságra jellemzők- görög, a minta jellemzőit pedig latin betűkkel fogjuk jelölni.

A legfontosabb eloszlásparaméterek

Legyen a sokaságon egy  valószínűségi változó (egy tulajdonsága a sokaság elemeinek) értelmezve, melynek értékét x-szel jelöljük.

a./ **A várható érték**

Tételezzünk fel egy véges, N elemű sokaságot, melyen értelmezett valószínűségi változó diszkrét értékeket vehet fel. Pl. legyen a sokaság 100 doboz gyufa és a valószínűségi változó a gyufaszálak száma egy dobozban. Legyen  értéke a sokaság ni számú elemén xi. Akkor x átlagértéke

 , 2.13a

mivel P (xi ) = ni / N. 2.13a-t általánosítva, tetszőleges eloszlásra definiálhatunk egy, az eloszlásra jellemző paramétert, az eloszlás **várható értékét**:

Legyen az eloszlás **diszkrét**, de a sokaság nem feltétlenül véges; a  valószínűségi változó az xi értéket Pi valószínűséggel vegye fel. Akkor **a  valószínűségi változó várható értékén**, E [x]-en a következő összeget értjük:

E [x] =  , 2.13

ahol az összegzés a sokaság összes elemére történik.

Ha az eloszlás **folytonos**, és az eloszlás valószínűségi sűrűségfüggvénye f(x), akkor a **várható érték**, 2.13 analógiájára

E [x] = x f(x) dx = x 2.14

A valószínűségi változó **konstansszorosának** várható értéke a várható érték konstansszorosa:

E [cx] = cx f(x) dx = c x f(x) dx = c E [x] 2.15

Két valószínűségi változó,  és  összegének és szorzatának várható értékénél az összetett kísérlet valószínűségével kell számolnunk.

Ha a valószínűségi változók diszkrétek, annak valószínűsége, hogy a  tulajdonságra x-et, az  tulajdonságra y-t kapjunk mérési eredményül, 2.11 szerint P(x,y). Folytonos eloszlásnál a valószínűségeket a sűrűségfüggvénnyel határozzuk meg. Annak valószínűsége, hogy a  tulajdonság mért értéke x és x + dx közé essen, és az  tulajdonságé y és y + dy közé:

P (x ≤ ≤ x+dx, y ≤ ≤ y+dy) = h(x,y) dx dy 2.16

és 2.12-nek megfelelően, ha a két valószínűségi változó független, h(x,y) = f(x) g(y), vagyis két, csak x-től, illetve csak y-tól függő sűrűségfüggvény szorzata.

Két folytonos valószínűségi változó **összegének** várható értéke a két várható érték összege:

E [x+y] =   (x+y) h(x,y) dx dy = x (h(x,y) dy) dx + y (h(x,y) dx) dy =

=x f(x) dx +y g(y) dy = E [x] + E [y] . 2.17

Két **független** valószínűségi változó **szorzatának** várható értéke az egyes várható értékek szorzata:

E [xy] = xy h(x,y) dx dy = xy f(x) g(y) dx dy =

=x f(x) dx ⋅y f(y) dy = E [x] ⋅ E [y] 2.18

Ha a valószínűségi sűrűségfüggvény **szimmetrikus** egy x0 értékre, akkor y = x-x0 várható értéke E [y] = 0, azaz az eredeti várható érték éppen x0 -lal egyenlő.

(Bizonyítás:

E [y] = y f(y) dy = y f(y) dy + y f(y) dy , és mivel a szimmetria miatt

f(y) = f(-y), így y f(y) dy + y f(y) dy = - y f(-y) dy + y f(y) dy = 0. )

b./ **A medián és a módusz**

A eloszlás **mediánja** (e) a valószínűségi változónak az az értéke, melynél kisebb és nagyobb érték is ugyanolyan valószínűségű, azaz ahol az eloszlásfüggvény értéke

F(e) = 0,5.

Az eloszlás **módusza** a sűrűségfüggvény maximum helye.

**Szimmetrikus eloszlás** várható értéke, mediánja és módusza azonos.

c./ **A variancia**

A valószínűségi változó értéke kisebb vagy nagyobb mértékben eltérhet a várható értéktől a sokaság elemein. A **variancia** ennek az eltérésnek a mértéke:

Var [x] = (x-x)2 f(x) dx = E [(x-x)2] 2.19

Változó **konstansszorosának** varianciája a variancia szorozva a konstans négyzetével:

Var [cx] = E [cx-cx]2 = c2 E [x-x] = c2 Var [x] 2.20

Két **független** valószínűségi változó **összegének** varianciája az egyes varianciák összege:

Var [x+y] = E [(x+y-x-y)2] =

= E [(x-x)2] + E [(y-y)2] + 2 E [(x-x)(y-y)] = Var [x] + Var [y] 2.21

Itt felhasználtuk az összeg várható értékére vonatkozó 2.17 összefüggést, és mivel  és  függetlenek, 2.21 harmadik tagjánál fel tudtuk használni 2.18-at, miszerint

E [(x-x)(y-y)] = E [x-x] ⋅ E [y-y] = 0.

Két **független** valószínűségi változó **szorzatának** varianciája nem egyezik meg viszont a varianciák szorzatával!

**A normális (Gauss) eloszlás**

Normális eloszlást mutatnak azok a valószínűségi változók, melyek értékét sok kismértékű véletlenszerű hatás befolyásolja. A normális eloszlásnál a valószínűségi sűrűségfüggvény az ún. **Gauss-függvény**:

, 2.22

ahol  az eloszlás **várható értéke**,  pedig az úgynevezett **szórás**, a variancia négyzetgyöke.

Az ún. **normalizált Gauss-függvényt** 2.22-ből az

u = (x-) /  2.23

transzformációval kapjuk, és a következő alakú:

f(u) =  2.24

A normalizált Gauss-eloszlás várható értéke 0, varianciája 1.

*Bizonyítás*: A várható érték 2.14 és a variancia 2.19 definíciójából:

E [u] = u f(u) du = u  du = 0,

mert az integrandus páratlan függvény.

Var [u] = u2 f(u) du = u2 du = u (u ) du

Felhasználva, hogy

u  du = - 

és parciálisan integrálva, kapjuk:

.

Az első tag kiesik, a második pedig -vel egyenlő, így Var [u] = 1.

A normalizált Gauss-eloszláshoz tartozó **valószínűségi eloszlásfüggvény**:

F(u) =  (**hibaintegrál**), F(∞)=1. 2.25

A normalizált Gauss-függvény, a (u) hibaintegrál vagy az

erf (u) =  **hibafüggvény** 2.26

értékeit matematikai kézikönyvekben táblázatosan megtaláljuk1. A két függvény összefüggése

Φ(u) = 0,5 (1 + erf (u/)). 2.27

**A Gauss-eloszlás alkalmazása**

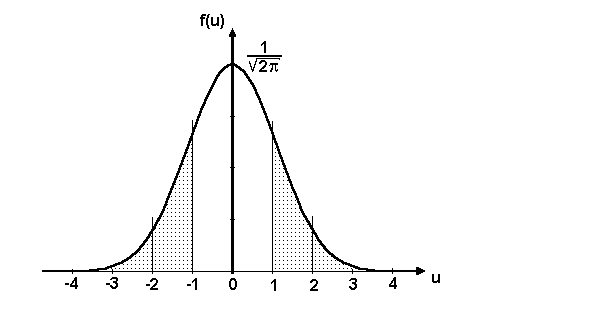
Tételezzük fel, hogy ismerjük egy adott sokaságban egy bizonyos valószínűségi változó eloszlását, és ez normális eloszlás, adott  várható értékkel és  szórással. Milyen valószínűséggel esik a valószínűségi változó értéke a várható érték körüli, adott sugarú intervallumba, tehát   
x1 = -x és x2 = +x közé?

Ilyen feladatoknál az aktuális változót 2.23 alapján úgy transzformáljuk, hogy normalizált Gauss-eloszlást kapjunk. Az intervallum végpontjai:

u1 = - x/ és u2 = x/ = v. 2.28

2.11-et alkalmazva P(u1 ≤ u ≤ u2) = F(u2) - F(u1) = (v) - (-v). A táblázatokban viszont csak pozitív argumentumra találjuk meg a  hibaintegrált. Az ábrán a két pöttyözött terület a függvény szimmetriája miatt egyenlő, azaz

(-u) = 1 - (u) P(-v≤u≤v) = 2 (v) - 1 2.29



Annak a valószínűsége pedig, hogy a változó értéke kiessen az adott szimmetrikus intervallumból, tehát egy adott tűrésnél jobban eltérjen a várható értéktől:

P(u ≤ -v  u ≥ v) = 1- (2(v)-1) = 2(1-(v)). 2.30

**Példa**

Legyen a másodéves lányok magasságeloszlásának valószínűségi sűrűségfüggvénye

(a magasságot h-val jelölve és cm-ben mérve):



a/ Mi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott lány magassága 160 és 170 cm között legyen?

b/ Ha az évfolyamon 80 lány van, várhatóan hány magasabb 160 cm-nél, hánynak a magassága 160 cm és 170 cm közötti, illetve 170 és 175 cm közötti érték?

c/ Van-e 175 cm-nél magasabb lány? És 150 cm-nél alacsonyabb?

*Megoldás:*

Térjünk át a normalizált eloszlásra (*A*) és keressük ki az 1. Táblázatból a (u) függvény értékeit (*B*). Az eloszlás várható értéke  = 165 cm, szórása  = 5 cm.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *A* | |  | *B* | | |
|  | h (cm) | u |  | v | (v) | 2(v)-1 |
|  | 150 | -3 |  | 0 | 0,5000 | 0 |
|  | 160 | -1 |  | 1 | 0,8413 | 0,6826 |
|  | 170 | 1 |  | 2 | 0,9772 | 0,9544 |
|  | 175 | 2 |  | 3 | 0,9986 | 0,9972 |

a/ A 160 - 170 cm intervallum a várható érték körüli  sugarú intervallumnak felel meg (v=1), a táblázat szerint ebbe az intervallumba 68,26% valószínűséggel esnek a magasságok.

b/ A 160 cm a normalizált változóban u = -1-nek felel meg, annak valószínűsége, hogy u ≤ -1 legyen,   
P(u≤-1) = (-1) = 1-(1) = 15,27 %, 1-P = 84,13%. Ennyi annak a valószínűsége, hogy valakinek a magassága nagyobb legyen, mint 160 cm. Mivel P = nkedvező/Nösszes, az évfolyamon 80 lány közül n = 80⋅0,8413 = 67 lánynak a magassága 160 cm-nél nagyobb. Hasonlóan, a 160 és 170 cm közötti magasságú lányok száma n = 80⋅0,6826 = 54,6, azaz 54-55 lány magassága esik 160 és 170 cm közé. A [170 cm, 175 cm] intervallum a normalizált változóban az [1,2] intervallumnak felel meg. P(1≤u≤2)=(2)-(1)=0,1359. Ez 11 személyt jelent.

c/ A 175 cm-es magasság u = 2-nek felel meg. P(u>2)=1-P(u≤2)=1-(2)=0,0228. Ez azt jelenti, hogy várhatóan két 175 cm-nél magasabb lány van.

A 150 cm u = -3-nak felel meg, P(u<-3)=(-3)=1-(3)=0,0014. Ez 0,1 személynek felel meg, tehát az évfolyamon valószínűleg nincs 150 cm-nél alacsonyabb lány.

Célszerű megjegyezni, hogy a normális eloszlásnál a várható érték körüli  sugarú intervallumba (v=1) a valószínűségi változó értéke 68,3 % valószínűséggel esik, a 2 sugarú intervallumba pedig (v=2) kb. 95,4 % valószínűséggel.

**A középérték eloszlásának tulajdonságai**

Mérjük egy sokaságon a  sajátosságot n-szer. Képzeljünk el egy n mérésből álló mintát, ahol az egyes mérések (egyelőre elképzelt) eredményei x1,...,xn . Ezek valószínűségi változók, még nem tudjuk, milyen értéket kapnak a mérésnél. Az x1,...,xn valószínűségi változó számtani közepe



szintén valószínűségi változó, tehát tartozik hozzá egy f(x1,...,xn) valószínűségi sűrűségfüggvény, és kérdezhetjük, mi ennek a várható értéke és varianciája. Az egyes mérési eredmények függetlenek egymástól, tehát

f(x1,...,xn) = f(x1)...f(xn).

Mivel ugyanazt a mérést ismételjük, az egyes mérési eredmények várható értéke E[xi] =  és varianciája Var[xi] = 2 azonos minden egyes mérésre. Az összeg és konstansszoros várható értékére és varianciájára kapott 2.15, 2.17, 2.20, 2.21 formulákat alkalmazva kapjuk, hogy

E [] = 1/n E [xi] =  és

Var [] = 1/n2 Var [xi] =  Var[x] =  2 2.31

Azaz a középérték várható értéke megegyezik az egyes mérések várható értékével, varianciája viszont n-ed része az egyes mérésének.

***A centrális határeloszlás tétele*** szerint bármilyen eloszlású sokaság esetén az n elemű minta számtani középértékének eloszlása a minta elemszámának növekedésével egy olyan normális eloszláshoz tart, melynek várható értéke megegyezik az eredeti eloszlás várható értékével.

Ez azt jelenti, hogy ha már egyetlen mérési eredmény is átlagnak, pl. időátlagnak tekinthető, akkor várható, hogy az Gauss-eloszlású lesz. A mérési eredmények viszont nagyon gyakran ilyen átlagértékek. A mutató tehetetlensége miatt egy átlagértéknek megfelelő helyzetbe áll be. Ha elektronikusan gyűjtünk adatot, azt is egy bizonyos ideig tesszük, és az átlagjelet dolgozzuk tovább fel. Így a gyakorlatban legtöbbször normális eloszlású mérési eredményekkel találkozunk.

**Az eloszlásparaméterek becslése**

A mintavétel és mérés célja, hogy információt kapjunk a sokaságon az adott tulajdonság eloszlásáról, azaz meg tudjuk becsülni az eloszlásparamétereket a sokaság elemszámánál sokkal kisebb minta alapján. A becsült paramétereket hullámvonallal fogjuk jelölni. Egy becslés **torzítatlan** a  paraméterre nézve, ha a becsült és valóságos várható értékek megegyeznek, azaz

E [] =  vagy E [ - ] = 0, a hiba várható értéke 0.

**A várható érték és a variancia becslése**

A várható értéket úgy vezettük be véges elemű, diszkrét sokaságra, mint a sokaságra vett átlagát az adott tulajdonságnak (2.13). Ha most nem az egész sokaságot vesszük, csak egy mintát belőle, becsülhetjük úgy az egész sokaságra vonatkozó átlagot, hogy csak a mintára átlagolunk, azaz a várható értéket,-t a következőképp becsüljük:

 = 1/n  2.32

Amíg a mérésről csak beszélünk,  valószínűségi változó, az xi valószínűségi változók számtani közepe, melynek várható értéke megegyezik az egyes mérés várható értékével. Tehát  = , a becslés torzítatlan.

Hasonlóan okoskodva, a varianciát becsülhetjük az egyes mérések hibanégyzetének átlagával:

2 = 1/n (xi - )2

Meg akarjuk határozni ennek a becslésnek a várható értékét; de egyszerűbb, ha n2 várható értékét számítjuk ki.

E [n2] = 

=



Az első tag éppen az egyes mérések varianciájának (1-1/n) -szerese. A második tagban a j=i tag kimarad, így tehát az összeg egyes tagjaiban a tényezők függetlenek, szorzatuk várható értéke a tényezők várható értékének szorzata, ami viszont 0. A harmadik tagot kifejtve (xj-)2-es tagok fognak szerepelni és vegyes szorzatok. Az utóbbiak várható értéke, az előző okfejtés értelmében 0. Így végül a fenti összeg a következőképp alakítható:

E [n2] = 

**(n-1) σ2** ,

azaz a variancia n-szeresének becsült értéke a valóságos variancia (n-1)-szerese,

2 = (n-1) / n  . 2.33

Ez a becslés torzított, így célszerűbb a varianciát a mérési eredményekből a következőképp becsülni:

2 = sx2 =  2.34

sx -et az egyes mérési eredmények **korrigált tapasztalati szórásának** nevezzük.

Mivel 2.31 szerint a középérték varianciája az egyes mérések varianciájának n-ed része,

 , 2.35

a **középérték korrigált tapasztalati szórása (standard deviációja):**

 2.36

I. táblázat

A normális eloszlás F(u) eloszlásfüggvénye

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| u | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0 | ,50000 | ,50399 | ,50798 | ,51197 | ,51595 | ,51994 | ,52392 | ,52790 | ,53188 | ,53586 |
| 0,1 | ,53983 | ,54380 | ,54776 | ,55172 | ,55567 | ,55962 | ,56356 | ,56749 | ,57142 | ,57535 |
| 0,2 | ,57926 | ,58317 | ,58706 | ,59095 | ,59483 | ,59871 | ,60257 | ,60642 | ,61026 | ,61409 |
| 0,3 | ,61791 | ,62172 | ,62552 | ,62930 | ,63307 | ,63683 | ,64058 | ,64431 | ,64803 | ,65173 |
| 0,4 | ,65542 | ,65910 | ,66276 | ,66640 | ,67003 | ,67364 | ,67724 | ,68082 | ,68439 | ,68793 |
| 0,5 | ,69146 | ,69497 | ,69847 | ,70194 | ,70540 | ,70884 | ,71226 | ,71566 | ,71904 | ,72240 |
| 0,6 | ,72575 | ,72907 | ,73237 | ,73565 | ,73891 | ,74215 | ,74537 | ,74857 | ,75175 | ,75490 |
| 0,7 | ,75804 | ,76115 | ,76424 | ,76730 | ,77035 | ,77337 | ,77637 | ,77935 | ,78230 | ,78524 |
| 0,8 | ,78814 | ,79103 | ,79389 | ,79673 | ,79955 | ,80234 | ,80511 | ,80785 | ,81057 | ,81327 |
| 0,9 | ,81594 | ,81589 | ,82121 | ,82381 | ,82639 | ,82894 | ,83147 | ,83398 | ,83646 | ,83891 |
| 1,0 | ,84134 | ,84375 | ,84614 | ,84850 | ,85083 | ,85314 | ,85543 | ,85769 | ,85993 | ,86214 |
| 1,1 | ,86433 | ,86650 | ,86864 | ,87076 | ,87286 | ,87493 | ,87698 | ,87900 | ,88100 | ,88298 |
| 1,2 | ,88493 | ,88686 | ,88877 | ,89065 | ,89251 | ,89435 | ,89617 | ,89796 | ,89973 | ,90147 |
| 1,3 | ,90320 | ,90490 | ,90658 | ,90824 | ,90988 | ,91149 | ,91309 | ,91466 | ,91621 | ,91774 |
| 1,4 | ,91924 | ,92073 | ,92220 | ,92364 | ,92507 | ,92647 | ,92786 | ,92922 | ,93056 | ,93180 |
| 1,5 | ,93319 | ,93448 | ,93574 | ,93699 | ,93822 | ,93943 | ,94062 | ,94179 | ,94295 | ,94408 |
| 1,6 | ,94520 | ,94630 | ,94738 | ,94845 | ,94950 | ,95053 | ,95154 | ,95254 | ,95352 | ,95449 |
| 1,7 | ,95543 | ,95637 | ,95728 | ,95818 | ,95907 | ,95994 | ,96080 | ,96164 | ,96246 | ,96327 |
| 1,8 | ,96407 | ,96485 | ,96562 | ,96638 | ,96712 | ,96784 | ,96856 | ,96926 | ,96995 | ,97062 |
| 1,9 | ,97128 | ,97193 | ,97257 | ,97320 | ,97381 | ,97441 | ,97500 | ,97558 | ,97615 | ,97670 |
| 2,0 | ,97725 | ,97778 | ,97831 | ,97882 | ,97932 | ,97982 | ,98030 | ,98077 | ,98124 | ,98169 |
| 2,1 | ,98214 | ,98257 | ,98300 | ,98341 | ,98382 | ,98422 | ,98461 | ,98500 | ,98537 | ,98574 |
| 2,2 | ,98610 | ,98645 | ,98679 | ,98713 | ,98745 | ,98778 | ,98809 | ,98840 | ,98870 | ,98899 |
| 2,3 | ,98928 | ,98956 | ,98983 | ,99001 | ,99036 | ,99061 | ,99086 | ,99111 | ,99134 | ,99158 |
| 2,4 | ,99180 | ,99202 | ,99224 | ,99245 | ,99266 | ,99286 | ,99305 | ,99324 | ,99343 | ,99361 |
| 2,5 | ,99379 | ,99369 | ,99413 | ,99430 | ,99446 | ,99461 | ,99477 | 99492, | ,99506 | ,99520 |
| 2,6 | ,99534 | ,99547 | ,99560 | ,99573 | ,99586 | ,99598 | ,99609 | ,99621 | ,99632 | ,99643 |
| 2,7 | ,99653 | ,99664 | ,99674 | ,99683 | ,99693 | ,99702 | ,99711 | ,99720 | ,99728 | ,99736 |
| 2,8 | ,99744 | ,99752 | ,99760 | ,99767 | ,99774 | ,99781 | ,99788 | ,99795 | ,99801 | ,99807 |
| 2,9 | ,99813 | ,99819 | ,99825 | ,99830 | ,99836 | ,99841 | ,99846 | ,99851 | ,99856 | ,99860 |
| 3,0 | ,99865 | ,99869 | ,99874 | ,99878 | ,99882 | ,99886 | ,99889 | ,99893 | ,99896 | ,99900 |

**A mérés eredményének megadása**

**A mérési eredmények szórása; a tűrés**

Ha ismerjük egy valószínűségi változó eloszlását (azaz értékeinek valószínűségi sűrűségfüggvényét), akkor meg tudjuk mondani, hogy egy bizonyos intervallumhoz mekkora valószínűség tartozik. Ez azt jelenti, hogy ha az adott eloszlást követő mennyiség értékeire méréseket hajtunk végre, akkor meghatározható, hogy mekkora valószínűséggel esik a mért érték egy bizonyos intervallumba (vagyis hogy az eredményeket adott valószínűséggel milyen intervallumban kapjuk meg – pl. az eloszlás várható értéke körül). Normális / Gauss-eloszlásnál az egyes mérési eredmények a várható érték körüli  sugarú intervallumba 68,3 % valószínűséggel, a 2 sugarú intervallumba 95,4 % valószínűséggel esnek. Ha más P valószínűséggel –P **konfidencia szinten**– akarjuk megjósolni a mérési eredményeket, az intervallum szélessége (k∙) meghatározható a valószínűség ismeretében, azaz

[ – k∙ ,  + k∙ ]

lesz az a **konfidencia intervallum**, melybe a mérési eredmények az adott P valószínűséggel beleesnek.

Ha vásárolunk valamilyen árut vagy alkatrészt, melyeknek valamilyen mennyiségi jellemzője van (pl. tömeg, ellenállás), akkor az áru tömegén, vagy az ellenállás **névleges értékén** kívül sokszor feltüntetik a **tűrést** is, mely a névleges értéktől való megengedett eltérést jelenti. Ez tulajdonképpen egy konfidencia intervallum, és általában 95 % konfidencia szintre van megállapítva. Ha egy 100 darabos szállítmányból 3 darab kiesik a tűrésből, még nem illik reklamálni a szállítónál, de ha 10 kiesik, akkor már lehet.

**A Student-féle t-eloszlás és t paraméter**

Mérésnél arra a kérdésre szeretnénk választ kapni, hogy a mérési eredményeknek mi közük van a mérendő mennyiség valóságos értékéhez. Hogyan értékeljük ki a méréssorozatot, hogy a legmegbízhatóbb információt kapjuk a valóságos értékről, azaz a valószínűségi változó várható értékéről? Ha legalább a mérés szórását ismernénk, mondhatnánk, hogy a mérési eredmény ugyanolyan távol van a valóságos várható értéktől, mint fordítva; azaz ha a valóságos érték k∙ sugarú környezetébe esnek P valószínűséggel a mérési eredmények, akkor P valószínűséggel a mérési eredmény k∙ sugarú környezetébe esik a mérendő mennyiség várható értéke; ha pedig egy mérési sorozatunk van, akkor a sorozat számtani közepének (az átlagnak) a k∙/ sugarú környezetébe esik a valóságos érték. A baj ott van, hogy általában a szórást sem ismerjük, azt is csak becsülni tudjuk az egyes mérés ill. a középérték korrigált tapasztalati szórásával. Mivel a szórás sem pontos, ugyanahhoz a valószínűséghez nagyobb számmal kell megszorozni a becsült szórást a konfidencia intervallum meghatározásánál, mint ezt egy ismert szórású Gauss-eloszlásnál tennénk. A jellemezni kívánt valószínűségi változó várható értéke, x, valamint a méréssorozatból számított középérték,  és a középérték korrigált tapasztalati szórása,  között álljon fenn a következő egyenlőség:

 = x +  ∙ .

Mivel  és  a konkrét méréssorozattól függ, tehát véletlenszerűen változik, a  =  paraméter mint az  és  valószínűségi változók függvénye, szintén valószínűségi változó, melynek eloszlása meghatározható  és  eloszlásából. Az eredeti x változóra Gauss-eloszlást feltételezve W.S. Gosset határozta meg a  paraméter valószínűségi sűrűség- és eloszlásfüggvényét, de mivel munkáit Student (diák) névvel szignálta, a  paraméter eloszlását "Student-féle t-eloszlásnak" hívják. Az eloszlás- és sűrűségfüggvény függ a mérések számától, ezek számának csökkenésével az f() sűrűségfüggvény félértékszélessége nő.  várható értéke 0, és f() szimmetrikus, tehát az F() eloszlásfüggvényre –a normalizált Gauss-eloszláshoz hasonlóan– fennáll, hogy

F (–) = 1 – F () ,

és annak a valószínűsége, hogy  értéke egy [–t, t] intervallumba essen:

P (–t ≤  ≤ t) = 2 F(t) – 1.

Visszatérve a  paraméter értelmezésére kimondhatjuk, hogy

*annak valószínűsége, hogy  és μx eltérése a [–t∙, t∙] intervallumba essen, P = 2F(t)–1 -gyel egyenlő;* vagy:

***P = 2F(t)–1 valószínűséggel a meghatározandó μx várható érték az  körüli t∙ sugarú intervallumba esik.***

Az adott P valószínűséghez (konfidenciaszinthez) és a mérések számához tartozó t paraméterérték (a fejezet végén is megtalálható) táblázatból határozható meg.

**Méréssorozat kiértékelése**

A fentiek alapján egy n mérésből álló sorozat kiértékelése a következőképp történik.

a./ Meghatározzuk a mérési eredmények számtani közepét:



b./ Meghatározzuk a xi devianciákat, az egyes mérési eredmények eltérését a középértéktől:

xi = xi – 

c./ A devianciákból meghatározzuk a középérték korrigált tapasztalati szórását:



d./ A mérések számához (n) és a kívánt konfidenciaszinthez (P) tartozó t paraméterértéket kikeressük a táblázatból.

e./ Megadjuk a következő formában a mérési eredményt:

|  |  |
| --- | --- |
|  (mért mennyiség) = ( ± t ∙) [mértékegység] |  |

Ez azt jelenti, hogy a mérendő mennyiség valóságos értéke *a konfidenciaszintnek megfelelő valószínűséggel* az [ – t ∙,  + t ∙] intervallumba esik.

A x = t∙ mennyiséget *hibaintervallum*nak hívjuk.

Megadhatjuk a relatív hibaintervallumot is:  =  [mértékegység] ± 

**A Student-féle t paraméter értékei P konfidenciaszintnél és n mérésszámnál**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **St** | **0,8** | **0,9** | **0,95** | **0,975** | **0,99** | **0,995** |
| 2 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 25,452 | 63,657 | 127,32 |
| 3 | 1,886 | 2,920 | 4,303 | 6,205 | 9,925 | 14,089 |
| 4 | 1,638 | 2,353 | 3,182 | 4,176 | 5,841 | 7,453 |
| 5 | 1,533 | 2,132 | 2,776 | 3,495 | 4,604 | 5,598 |
| 6 | 1,476 | 2,015 | 2,571 | 3,163 | 4,032 | 4,773 |
| 7 | 1,440 | 1,943 | 2,447 | 2,969 | 3,707 | 4,317 |
| 8 | 1,415 | 1,895 | 2,365 | 2,841 | 3,499 | 4,029 |
| 9 | 1,397 | 1,860 | 2,306 | 2,752 | 3,355 | 3,832 |
| 10 | 1,383 | 1,833 | 2,262 | 2,685 | 3,250 | 3,690 |
| 20 | 1,328 | 1,729 | 2,093 | 2,433 | 2,861 | 3,174 |
| ∞ | 1,282 | 1,645 | 1,960 | 2,241 | 2,576 | 2,807 |

**Közvetett mérés hibája (hibaterjedés)**

Láttuk, hogy a mérés hibáját a középérték varianciájának becsült értékéből (2) határoztuk meg. Tegyük fel, hogy meg akarunk határozni egy  mennyiséget, melyet nem tudunk közvetlenül mérni, de  függ az x,y,z,... mennyiségektől és az utóbbiak viszont megmérhetők, ismerjük várható értéküket és varianciájukat (illetve megbecsültük ezeket a paramétereket). Hogyan függ össze  várható értéke és varianciája az x,y,z... várható értékével és varianciájával?

Fejtsük sorba -t változóinak várható értéke körül, és álljunk meg a lineáris tagoknál:

(x,y,..) = (x,y,...) +  ∙ (x–x) +  ∙ (y–y) + ...

A parciális differenciálhányadosok az x = μx, y = y,... helyen értendők. A lineáris sorfejtés a várható értékektől való kis eltérések esetén jó közelítés.

Először határozzuk meg  várható értékét. Alkalmazva az összeg és konstansszoros várható értékére vonatkozó összefüggéseket (azaz hogy E[a+b] = E[a]+E[b] és E[c∙a] = c∙E[a] ) :

E[(x,y,..)] = E[(x,y,...)] +  ∙ E[x–x] +  ∙ E[y–y] + ... = (x,y,...) ,

mivel E[x–x] = E[y–y] = 0 és E[(x,y,...)] =(x,y,...).

Most határozzuk meg  varianciáját a fenti közelítés alapján. Alkalmazva az összeg és konstansszoros varianciájára vonatkozó összefüggéseket (azaz hogy Var[a+b] = Var[a]+Var[b] és Var[c∙a] = c2∙Var[a] ) :

Var[] = Var[(x,y,...)] + ∙Var[x] + ∙Var[y] +... = ∙Var[x] + ∙Var[y] + ... ,

mivel Var[(x,y,...)] = 0.

A mérési eredmények alapján az x,y,... mért mennyiségek varianciáját a korrigált tapasztalati szórásuk négyzetével közelítjük, várható értéküket pedig a méréssorozatok középértékével.

Így a  mennyiség várható értékének becslése

E[(x,y,..)] = ,

és a becslés  középértékének korrigált tapasztalati szórására:

 .

Az egyenlőség érvényes marad akkor is, ha a középértékek korrigált tapasztalati szórását beszorozzuk az adott konfidenciaszinthez tartozó t paraméterrel, azaz igaz lesz a hibaintervallumokra is. Ha x-szel jelöljük x hibaintervallumának sugarát, és y-nal y-ét, akkor a  mennyiségre a  hibaintervallum sugara:



**Gyakorló feladatok**

**A bevezető előadáson megoldott feladat:**

**1.** Van egy nagy kupac ismeretlen névleges értékű ellenállásunk. Kiveszünk belőle 6 db-ot és megmérjük azok ellenállását. A következő értékeket kapjuk:

98  100  101  99  101  101 

Számoljuk ki ennek alapján az ellenállásaink névleges értékét és a hibaintervallumot 99 %-os konfidenciaszinten!

*Megoldás:*

A mért értékek átlaga .

A középérték korrigált tapasztalati szórása





A táblázatból a Student-paraméter értéke n = 6 és P = 0,99 esetén t = 4,032.

A hibaintervallum 

Tehát az ellenállások értéke 99 %-os konfidenciaszinten

R = ( 100,0 ± 2,1 ) 

Kerekítsünk!

A hibaintervallumot értelmetlen pontosabban megadni, mint az átlagértéket.

Általában a hibaintervallumot két értékes jeggyel adjuk meg, és ehhez igazítjuk a valódi érték pontosságát is.

**2.A.** A fenti ellenállásainkból egyet-egyet kiválasztva sorosan kapcsoljuk egy másik ellenállással, amit viszont egy R2 = (400,0 ± 4,3 ) -os ellenálláskupacból veszünk. Mi lesz a soros eredő értéke és hibaintervalluma?

*Megoldás:*

A soros eredő számítása: Rsoros(R1,R2) = R1 + R2 .



A soros eredő várható értéke 

Az Rsoros(R1,R2) = R1 + R2 függvény parciális deriváltja R1 ill. R2 szerint

.

A soros eredő ellenállás hibaintervalluma



Tehát a soros eredő értéke az adott konfidenciaszinten az

Rsoros = ( 500,0 ± 4,8 ) 

intervallumba esik.

**2.B.** A fenti két kupac ellenállásból ( R1 = (100,0 ± 2,1)  és R2 = (400,0 ± 4,3) ) egyet-egyet kivéve most párhuzamos kapcsolást készítünk. Mi lesz a párhuzamos eredő értéke és hibaintervalluma?

*Megoldás:*

A párhuzamos eredő számítása: Rpárh(R1,R2) =  .



A párhuzamos eredő várható értéke 

Az Rpárh(R1,R2) =  függvény parciális deriváltja R1 ill. R2 szerint

 és .

Ezek értéke  és  behelyettesítésével

 és .

A párhuzamos eredő ellenállás hibaintervalluma



Tehát a párhuzamos eredő értéke az adott konfidenciaszinten az

Rpárh = ( 80,0 ± 1,4 ) 

intervallumba esik.

**További megoldott gyakorló feladatok:**

**1.** Egy folyadék sűrűségét szeretnénk meghatározni. Kitöltünk belőle valamennyit egy főzőpohárba és megmérjük ötször a folyadék magasságát a pohárban; a mért értékek:

3,8 cm 3,6 cm 3,8 cm 3,8 cm 4,0 cm

**a.** Adjuk meg a folyadékoszlop magasságát és annak hibáját 80%-os konfidenciaszinten!

**b.** Számoljuk ki a folyadék sűrűségét és becsüljük meg a hibáját, ha a főzőpohár belső átmérője   
d = 5,2 cm, hibája 0,1 cm; a főzőpohár tömege üresen mfp = 82,3 g, a folyadékkal együtt   
M = 151,7 g, és a tömegmérés hibája mindkét esetben 0,1 g. (A hibák mind 80%-os konfidenciaszintre vannak megadva.)

*Megoldás:*

**1.a**. 



táblázatból t(N=5, P=0,8) = 1,553,  = t⋅ = 1,553⋅0,063 = 0,098 cm,

h = (3,80 ± 0,10) cm

**b.**  = m/V = (M-mfp) / (¼d2h) ,  = (151,7-82,3) / (¼⋅5,22⋅⋅3,8) ≈ 0,85996 g/cm3 , M = 0,1

, mfp = 0,1

, h = 0,1

, d = 0,1



 = ( 0,860 ± 0,040 ) g/cm3

**2.** Hatszor megmérjük egy telep elektromotoros erejét, a kapott eredmények:

12,1; 12,2; 11,9; 12,2; 11,7; 11,9 V.

**a.** Adjuk meg azt az intervallumot, melybe a telep elektromotoros ereje 95% valószínűséggel esik!

**b.** A telepet terheljük egy R ellenállással, és mérjük a terhelésen folyó I áramerősséget.

(Az ampermérő belső ellenállása elhanyagolható.) Szintén 95%-os konfidenciaszintnél

R = (40,0 ± 0,5) Ω, I = (0,250± 0,005) A.

Határozzuk meg a fentiekből a telep Rb belső ellenállását és Rb hibáját!

*Megoldás:*

**2.a**. 



táblázatból t(N=6, P=0,95) = 2,571,  = t⋅ = 2,571⋅0,08165 ≈ 0,21 V,

E = (12,00 ± 0,21) V

**b.** Rb = E/I – R , = 12/0,25 – 40 = 8 

,  = 0,2

,  = 0,005

, R = 0,5

Rb = (8,0 ± 1,3) 

**3.** Két ponttöltés, Q1 és Q2 között ható Coulomb-erő nagyságát megmértük ötször:

1,81 N 1,78 N 1,79 N 1,82 N 1,80 N

**a.** Adjuk meg az erő nagyságát és hibáját 95 %-os konfidenciaszinten!

A Q1 töltés az origóban van, nagysága Q1 = (22,0±0,2) C. A Q2 töltés koordinátái:

x = 1,20 m, y = 1,80 m, z = 0,40 m, a koordináták meghatározásának hibája 0,01 m

(csak Q2 esetén, Q1 pontosan az origóban van).

A hibák mind 95 %-os konfidenciaszintre vannak megadva.

**b.** Határozzuk meg a Q2 töltés nagyságát és hibáját! ( k = 9⋅109 Nm2/C2 )

*Megoldás:*

**3.a**. 



táblázatból t(N=5, P=0,95) = 2,776,  = t⋅ = 2,776⋅0,00707 = 0,0196 N,

F = (1,800 ± 0,020) N

**b.** Q2 = F(x2+y2+z2)/(k⋅Q1) , = 1,8(1,22+1,82+0,42)/(9⋅109⋅22⋅10-6) = 44 C

, F = 0,02

, x = 0,01

, y = 0,01

, z = 0,01

, Q1 = 2⋅10-7



Q2 = (44,00 ± 0,75) C

**Hild Erzsébet – Wittmann Marian:**

**Fizika laboratóriumi gyakorlatok**

**05054**

**Műegyetemi Kiadó, 1999**

**Errata**

9. oldal (Metrológia, normális eloszlás)

Var [u] = u2 f(u) du = u2 du = u (u ) du

helyett

Var [u] = u2 f(u) du = u2 du = u (u ) du

10. oldal (Metrológia, normális eloszlás, példa)

f(u) =

helyett

f(h) =

11. oldal (Metrológia, normális eloszlás, a középérték eloszlásának tulajdonságai)

Var [] = 1/n2 Var [xi] =  2 2.31

helyett

Var [] = 1/n2 Var [xi] =  Var[x] 2.31

16. oldal (Metrológia, regressziószámítás)

f(x) = a0 + a1 x + a2 x + ... =  .

helyett

f(x) = a0 + a1 x + a2 x2 + ... =  .

, minden 0 ≤ j ≤ n -re.

16. oldal (Metrológia, lineáris regresszió)

 = 2 (a+bxi-yi) xi = 0 ⇒ a xi + b xi2 = xi yi 2.46

 = 2 (a+bxi-yi) = 0 ⇒ N a + b xi = yi

helyett

 = 2 (b+axi-yi) xi = 0 ⇒ b xi + a xi2 = xi yi 2.46

 = 2 (b+axi-yi) = 0 ⇒ N b + a xi = yi

18. oldal

F( ) =

19. oldal

t(N=5,P=0,8) = 1,533

**Lineáris regresszió**

Az **y = a x + b** alakú egyenes paramétereire

a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával a következő összefüggéseket kapjuk:

A meredekség

 ,

a tengelymetszet

 ;

avagy az átlagok

 ,  ,  , 

bevezetésével:



A fenti a, b paraméterek **varianciáját** a következőképp becsülhetjük:



Felhasználva, hogy





.

y2 az úgynevezett reziduális szórásnégyzettel, sr2 -tel közelíthető:

 .

A **szórás** a variancia négyzetgyöke.