**1. TÉMAKÖR: KINEMATIKA**

1. GYAKORLAT

**Információk a tárgyról**

A középiskolai fizika tananyag néhány olyan fejezetét nézzük át, amik hasznosak lesznek a későbbi szaktárgyakban. Néhány esetben a középiskolai szintet meghaladó szinten tárgyaljuk az adott témakört, felhasználva azt a matematikatudást, amit középiskolában az után sajátítottak el, miután fizikából az adott témát már lezárták. Egyetemi szintű matematikai ismereteket nem igényel ez a tantárgy.

6 témakör lesz dupla órákkal (vagyis 12 hétre van tananyag). A feladatmegoldások előtt ismertetjük az elméleti hátteret, és kísérleteket is mutatunk be az adott témakörben, részben demonstrációs céllal, de egy-egy kísérletet ki is értékelünk (megmérünk valamit és abból kiszámolunk valamit).

Minden témakörből lesz egy 15 perces kis zh a következő témakör első óráján. A zh-k anyaga a példatár kijelölt szakaszából egy számolási feladat, esetleg még egy tesztkérdés vagy egy rövid elméleti kérdés is. A 6 zh-ból a 4 legjobb zh-t vesszük figyelembe, pótzh nem lesz. Egy-egy zh max. 20 pontos.

A zh-kon kívül minden hallgatónak egyszer a félévben tartania kell egy kb. 5 perces szóbeli beszámolót a táblánál a csoport előtt az adott témakör második órájának az elején egy olyan feladatból, amit az előző héten megkap, és az előző héten elhangzó információk alapján megoldható. Enélkül a félév nem teljesíthető; pótlási lehetőséget biztosítunk az utolsó héten. Ez a beszámoló max. 20 pontot ér és kötelezően teljesítendő.

A 4 legjobb zh és a beszámoló pontszámának összege alapján alakul ki a félévközi jegy. Ha a szóbeli beszámoló el van fogadva, akkor az osztályzat

50 – 2

62 – 3

74 – 4

86 – 5

A pótlási héten pótpót zh írható a teljes anyagból különeljárási díj megfizetése mellett.

**Bevezetés**

A fizika egy kísérleti tudomány.

A tudományos megismerési folyamat lépései:

\*\*\*megfigyelés, kísérlet, mérések  tapasztalatok, mérési adatok rendszerezése  hipotézisek, modellalkotás  jóslat a további kísérletek kimenetelére  ellenőrzés kísérlettel, méréssel  \*\*\*

A fizikai mennyiségeket mérőszámmal és mértékegységgel adjuk meg.

A számolást nagyban megkönnyíti az SI alapmennyiségek használata.

Prefixumok

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| neve | jele | értéke |
| tera | T | 1012 |
| giga | G | 109 |
| mega | M | 106 |
| kilo | k | 103 |
| hekto | h | 102 |
| deka | da | 101 |
| deci | d | 10–1 |
| centi | c | 10–2 |
| milli | m | 10–3 |
| mikro | μ | 10–6 |
| nano | n | 10–9 |
| piko | p | 10–12 |

**Derivált, integrál jelentése**

COVID-19 görbék elemzése

Induljunk ki a kumulatív esetszámot bemutató diagramból. A kumulatív esetszámot bemutató diagram napi növekedése megadja a napi új fertőzöttek számát. A kumulatív esetszámnál a függőleges tengelyen ábrázolt mennyiség mértékegysége „fő”, a napi új fertőzöttek mértékegysége pedig „fő/nap”. Ez az egy napra vonatkoztatott átlagos változási sebesség, ami jellemzi a fertőzöttek számának növekedését, külön diagramon is ábrázolható. A napi új fertőzöttek számát bemutató diagram adott napi értéke a kumulatív esetszámot mutató diagram meredeksége. Ha ennél részletesebb adataink vannak, finomíthatjuk a felosztást. Ha folytonos a görbe, az egyre finomabb felosztás határértékeként megkapjuk a pillanatnyi változási sebességet. Ez a függvény deriváltja abban a pillanatban. Grafikusan tekintve ez a görbe érintőjének meredeksége. A deriválás mint matematikai művelet függvényhez függvényt rendel (ebben a tárgyban nem lesz szükség ezekre az ismeretekre). A fizikában vizsgált folyamatok szempontjából azt lényeges tudnunk, hogy a derivált függvény adott pillanathoz tartozó értéke azt jellemzi, hogy mennyi a vizsgált mennyiség változási sebessége abban a pillanatban.

Hogyan kapjuk meg a kumulatív esetszámot, ha a napi új fertőzötteket bemutató diagramból indulunk ki? Össze kell adogatni a napi esetszámot, amit úgy kapunk meg, hogy a változási sebességet szorozzuk a változás idejével. A mértékegységeket tekintve a „fő/nap” szorozva a „nap”-pal adja a „fő”-t. Ez grafikusan a napi esetszám diagramján egy téglalap területe, és ezeket a területeket összegezve kapjuk a kumulatív esetszámot. Finomabb beosztás esetén belátható, hogy az összegzéssel a görbe alatti területet kapjuk meg. Ez tehát azt jelenti, hogy ha ismerjük egy mennyiség változási sebességét, akkor abból összegzéssel megkapjuk a kérdéses mennyiség pillanatnyi értékét: ez az integrálás lényege. Vegyük észre, hogy az integrál csak a kérdéses mennyiség növekményét adja meg! Szükségünk van annak ismeretére is, hogy a mennyiség milyen értékről indult (kezdeti értékre).

Nézzük most az aktív esetek aktuális értékének diagramját: itt a meredekség lehet negatív is. A fertőzöttek összes számának szempontjából a gyógyultak számát negatív előjellel kell figyelembe venni. A napi fertőzöttek és a napi gyógyultak számát ábrázoló diagramokból kiindulva az aktív esetek száma integrálással kapható meg, úgy, hogy a két diagram görbe alatti területét összegezzük, úgy, hogy a napi gyógyultak számából származó terület negatív.

Mit jelent az átlagérték? Azt az értéket, ami az adott időintervallumot tekintve ugyanakkora változást hoz létre, mint amekkora a változó érték esetén létrejön. Grafikusan ez azt az értéket jelenti a függőleges tengelyen, amekkora értékkel az adott időintervallumhoz tartozó téglalap területe megegyezik az eredeti görbe alatti területtel.

**Hely – sebesség – gyorsulás**

Középiskolában az „út” kiszámítására voltak képletek, de célszerű ehelyett a test helyéről beszélni, amiből a test mozgása esetén meghatározható a megtett út. A test sebessége azt mutatja, hogy éppen mennyire változik a test helye. A test gyorsulása pedig azt mutatja, hogy éppen mennyire változik a test sebessége. (Általánosan és tömören fogalmazva tehát azt mondhatjuk, hogy a sebesség a hely deriváltja, a gyorsulás pedig a sebesség deriváltja, de ezzel majd csak a Fizika1 –Mechanika tárgyban foglalkozunk. Most maradunk egyszerű speciális mozgásoknál, de aki tud deriválni, felismerheti ezt az alkalmazott képletekben.)

Fontos megkülönböztetni a sebességet és a gyorsulást!

*KÍSÉRLET: Vízzel feltöltött lombikban alulról fonállal rögzített parafadugó vagy szivacsos műanyag darabka a lombik mozgatása közben a pillanatnyi gyorsulás irányát mutatja. Egyenletes mozgás közben a fonál függőleges, mivel akkor a gyorsulás zérus.*

A hely, a sebesség, és a gyorsulás vektorok (azaz nem csak nagyságuk, hanem irányuk is van). A helyvektor egy vonatkoztatási pontból mutat a test helyére. A sebességvektor iránya azt mutatja, hogy merre mozdul el a test. A gyorsulásvektor a sebességvektor változását mutatja: ha egy irányba mutat a sebességvektorral, akkor a sebesség nagysága nőni fog, ill. ha ellenkező irányba mutat vele, akkor a sebesség nagysága csökkenni fog. Előfordul azonban az is, hogy a sebességvektor egyenese és a gyorsulásvektor egyenese nem esik egybe, ilyenkor meg fog változni a sebességvektor iránya, ami azt jelenti, hogy a test „kanyarodni” is fog, görbe vonalú mozgást végez.

**Egyenletes mozgás, egyenletesen változó mozgás az x tengely mentén**

Felejtsük el az „s = vt” képletet, a test helyét az x koordinátájával adjuk meg, és általános képleteket írunk fel, amikben az egyes mennyiségek előjelesek (nem a képletekben lesznek előjelek).

**Egyenletes mozgás**: v = konst.

A v sebesség előjeles mennyiség (egydimenziós vektor). Először megválasztjuk az x tengely irányítottságát. Az x növekedésének irányába mutató sebesség pozitív előjelű, az x csökkenésének irányába mutató sebesség negatív előjelű.

A test helye az idő függvényében, ha t=0-ban az x0 pontból indul: x = x0 + vt.

A gyorsulás zérus (a=0).

**Egyenletesen változó mozgás**: a = konst.

Az a gyorsulás is előjeles mennyiség, az x növekedésének irányába mutató gyorsulás pozitív előjelű.

A test sebessége egyenletesen változik: v = v0 + at, ha t=0-ban a test sebessége v0.

A test helye: x = x0 + v0t + ½at2.

A sebesség és a gyorsulás előjelétől függően 4 eset állhat elő:

v>0 és a>0: az x növekedésének irányába halad egyre gyorsabban;

v>0 és a<0: az x növekedésének irányába halad egyre lassabban;

v<0 és a<0: az x csökkenésének irányába halad egyre gyorsabban;

v<0 és a>0: az x csökkenésének irányába halad egyre lassabban.

Megjegyzések:

1. Vegyük észre, hogy az egyenletes mozgást leíró képleteket megkapjuk úgy, hogy az egyenletesen változó mozgás képletébe a = 0-t helyettesítünk.

2. Jelölés: v = v0 + at és x = x0 + v0t + ½at2 a sebesség ill. a helykoordináta időfüggését írja le, jelölhetjük v(t)-vel ill. x(t)-vel is, de a rövidség kedvéért ezt sokszor elhagyjuk.

**FELADATOK**

**1A/1. (MÁ 4.)** Egy vízmelegítő percenként 9,6 dm3 vizet enged át. Hány m/s sebességgel folyik a víz a 2 cm2 keresztmetszetű csapból?

Megoldás

A víz m/s-ban kifejezett v kifolyási sebessége azt jelenti, hogy t (s-ban kifejezett) idő alatt a víz x (m-ben kifejezett) távolságot mozdul előre a csőben. A cső A keresztmetszetével való szorzással kapjuk az adott idő alatt átment V térfogatot. Tehát v = x/t és xA = V, amiből

v = (V/t)/A, tehát a V/t térfogatáramot osztani kell a cső keresztmetszetével.

Behelyettesítés:

t = 1 perc = 60 s; V = 9,6 dm3 = 9,610–3 m3; A = 2 cm2 = 210–4 m2;

v = (V/t)/A = (9,610–3 m3 / 60 s) / 210–4 m2 = 0,8 m/s.

**1A/2. (MÁ 8.)** Két autó egyszerre indul egymással szemben 20 km távolságból. Mekkora köztük a távolság negyed óra múlva, ha az egyik sebessége 25 km/h, a másiké 11 m/s?

Megoldás

Mindkét test egyenletes mozgást végez: x = x0 + vt,

vagyis x1 = x01 + v1 t és x2 = x02 + v2 t .

Az egyik autó indulási x01 koordinátáját vegyük zérusnak, így a másiké x02 = 20 km = 20000 m;

a sebességek nagysága: │v1│ = 25 km/h, ill. │v2│ = 11 m/s.

Hogyan váltunk át mértékegységet? $1\frac{km}{h}=\frac{1000 m}{3600 s}=\frac{1}{3,6} \frac{m}{s}$,

tehát a v1 sebesség nagysága SI alapmennyiségekkel: │v1│ = 25/3,6 = 6,944 m/s,

ill. a v2 sebesség nagysága km/h-ban: │v2│ = 11∙3,6 = 39,6 km/h.

A két autó egymással szembe megy, ezért az egyik sebesség előjele negatív kell legyen. Ha az x tengelyt úgy vesszük fel, hogy az arra mutat, amerre az 1-es autó megy, akkor a 2-es autó sebessége negatív: v2 = –11 m/s = –39,6 km/h.

A helykoordináták így

SI alapegységekkel felírva: x1 = 6,944 t és x2 = 20000 – 11 t : itt t s-ban értendő; ill.

km/h-ban felírva: x1 = 25 t és x2 = 20 – 39,6 t : itt t h-ban értendő.

Helyettesítsük be a megadott időt:

SI alapegységekkel t\* = 0,25 h = 0,25 h ∙ 3600 (s/h) = 900 s:

x1 = 6,944∙900 = 6250 m és x2 = 20000 – 11∙900 = 10100 m;

km/h-ban felírva: x1 = 25∙0,25 = 6,25 km és x2 = 20 – 39,6∙0,25 = 10,1 km.

A két autó közötti távolság d = │x1 – x2│ = 3850 m = 3,85 km.

**1A/3. (MÁ 75.)** Az ábra egy felvonó emelkedésének sebesség–idő diagramja.



**a)** Hány métert emelkedett a felvonó a 15 s alatt?

**b)** Mennyi volt az átlagsebessége?

**c)** Rajzoljuk fel a felvonó gyorsulását és a kiindulási szinttől mért magasságát is az idő függvényében!

Megoldás

A mozgás szakaszonként egyenletesen változó mozgás:

v(t) = v0 + at és x(t) = x0 + v0t + ½at2.

Minden mennyiséget SI alapmennyiségekkel írunk fel.

A 0 – 5 s között

a kiinduló koordináta x01 = 0;

a kezdősebesség v01 = 0;

 a gyorsulás: a1 = v/t = (6–0)/(5–0) = 1,2 m/s2 (pozitív, a lift sebessége nő);

 v1(t) = a1t = 1,2t és x1(t) = ½a1t2 = 0,6t2;

5 s-ban x1(5) = 0,652 = 15 m (és ellenőrizhetjük, hogy v1(5) = 1,25 = 6 m/s).

Az 5 – 10 s között

mivel ez a szakasz az 5 s-nál kezdődik, ezért ezen a szakaszon t2 = t – 5 s;

a kiinduló koordináta x02 = x1(5) = 15 m;

a (kezdő)sebesség v02 = v1(5) = 6 m/s;

a gyorsulás zérus;

 v2(t) = 6 m/s és x2(t) = 15 + 6(t–5);

10 s-ban x2(10) = 15 + 65 = 45 m.

A 10 – 15 s között

mivel ez a szakasz a 10 s-nál kezdődik, ezért ezen a szakaszon t3 = t – 10 s;

a kiinduló koordináta x03 = x2(10) = 45 m;

a kezdősebesség v03 = v2(10) = 6 m/s;

a gyorsulás a3 = v/t = (0–6)/(15–10) = –1,2 m/s2 (negatív, a lift sebessége csökken);

 v3(t) = 6 – 1,2(t–10) és x3(t) = 45 + 6(t–10) – 1,2(t–10)2;

15 s-ban x3(15) = 45 + 65 – 0,6∙52 = 60 m
 (és ellenőrizhetjük, hogy v3(15) = 6 – 1,25 = 0 m/s).

**a)** A felvonó emelkedése x3(15) = 60 m volt.

**b)** A felvonó átlagsebessége vátl = x/t = (60–0)/(15–0) = 4 m/s volt.





**1A/4. (MÁ 61.)** Elkerülhető-e az összeütközés, ha az 54 km/h sebességgel haladó jármű előtt 95 m távolságban forgalmi akadály bukkan fel, és a jármű 1,25 m/s2 lassulással fékezhető? Vegyük figyelembe, hogy az akadály észlelése és a fékezés kezdete között a reakcióidő 1 s. (A féktávolság a reakcióidő és a fékezés alatt megtett út.)

Megoldás

A jármű az első másodpercben egyenletes mozgás végez:

v1 = 54 km/h = 15 m/s és x1(t) = v1t = 15t; t = 1 s-nál x1(1) = 15∙1 = 15 m.

Ezután kezd lassulni. Ezen a szakaszon

t2 = t – 1 s (mivel ez a szakasz t = 1 s-nál kezdődik);

x02 = x1(1) = 15 m;

v02 = v1 = 15 m/s;

a2 = –1,25 m/s2 (negatív a gyorsulás, mert a test lassul).

Többféleképpen számolhatunk:

**1.)** A lassuló szakaszra t2-vel írjuk fel a sebességet és a helyet (t2 a lassulás ideje, 1 s-nál kezdődik):

v2(t2) = 15 – 1,25t2 és x2(t2) = 15 + 15t2 – 0,625t22.

Kiszámoljuk azt a t2\* időt, amennyi ahhoz szükséges, hogy a jármű megálljon, azaz v2 = 0 legyen:

15 – 1,25t2\* = 0  t2\* = 12 s

(ezt számolhatjuk úgy is, hogy a = v/t  t = v/a = (0–15)/(–1,25) = 12 s),

és ezt az időt behelyettesítjük az x2(t2) függvénybe: x2(12) = 15 + 15∙12 – 0,625∙122 = 105 m.

Az ütközés tehát nem kerülhető el.

**2.)** Hasonló, de kissé bonyolultabb, ha t-vel írjuk fel a képleteket (t a teljes idő, 0 s-nál kezdődik):

v2(t) = 15 – 1,25(t–1) és x2(t) = 15 + 15(t–1) – 0,625(t–1)2.

Az a t\* időpont, amikor a jármű megáll, azaz v2 = 0:

15 – 1,25(t\*–1) = 0  t\* = 13 s,

ezt behelyettesítve az x2(t) függvénybe: x2(13) = 15 + 15∙12 –0,625∙122 = 105 m.

**3.)** Bonyolultabb, ha először azt a t2’ időt számoljuk ki, amikor a jármű 95 m-hez ér:

x2(t2) = 15 + 15t2’ – 0,625t2’2 = 95  0,625t2’2 – 15t2’ + 80 = 0

 t2’ = 8 s (16 s is megoldás, de annak nincs fizikai értelme),

és ezt behelyettesítve a v2(t2) függvénybe kiszámolhatjuk, hogy oda érkezve mekkora a jármű sebessége: v2(8) = 15–1,25∙8 = 5 m/s, tehát 95 m-nél a jármű még mozgásban van.

**4.)** Rendezhetjük a v2(t2\*) = v02 + at2\* = 0 és x2(t2\*) = x02 + v02t2\* + ½at2\*2 képleteket, hogy ne kelljen a t2\* időt kiszámolni: a sebességből: t2\* = –v02/a , és ezt beírjuk a hely függvényébe:

x2 = x02 + v02∙(–v02/a) + ½a(–v02/a)2 = x02 – v022/a + ½ ∙ v022/a = x02 – ½ ∙ v022/a.

Ebbe behelyettesítve: x2 = x02 – ½ ∙ v022/a = 15 – ½ ∙ 152/(–1,25) = 105 m.

**Függőleges hajítás, szabadesés**

A földfelszín közelében a nehézségi erő miatt minden testnek állandó nagyságú gyorsulása van függőlegesen lefelé, ezért a függőleges hajítás és a szabadesés egyenletesen változó mozgás.

Az összes számolási feladatban g = 10 m/s2 értékkel számolunk.

A függőleges koordinátára a szokásos jelölés nem x, hanem z (ill. lehet y is, de a Fizika1 – Mechanika tárgy számolási feladataiban is z fogja jelölni).

A z tengely felfelé mutat, ezért a = –g. A kezdősebesség és a pillanatnyi sebesség előjele attól függ, hogy a test felfelé vagy lefelé mozog: felfelé pozitív, lefelé negatív.

Ezzel tehát v(t) = v0 – gt és z = z0 + v0t – ½gt2

Szabadesésnél v0 = 0, ezért v(t) = – gt és z = z0 – ½gt2.

**FELADATOK**

**1A/5. (MÁ 94.)** Legalább milyen hosszú ejtőzsinórt kell készítenünk, ha 5 koppanást szeretnénk hallani egyenletes időközönként, és az első golyót a fémlemeztől 7 cm távolságra rögzítettük?

Megoldás

Az összes golyó szabadesést végez adott magasságból, tehát zi = z0i – ½gti2 , i = 1 … 5.

z0i a kiindulási magasság a fémlemezhez képest, vagyis a golyók akkor koppannak,
amikor zi = 0, tehát a kiindulási magasságok az esés idejével kifejezve: z0i = ½gti2.

A koppanásoknak egyenletesen kell követniük egymást:

t2 = t1 + t1 = 2 t1, t3 = t2 + t1 = 3 t1, … , általánosan ti = i∙t1 (t1 a legalsó golyó leesésének ideje).

Ebből kifejezhetjük a z0i kiindulási magasságok arányát:

z0i = ½g∙(i∙t1)2 = i2 ∙½gt12 = i2 ∙ z01.

A golyóknak tehát négyzetesen növekvő magasságból kell indulniuk.

A legalsó golyó 7 cm magasról indul: z01 = 0,07 m  a második golyó z02 = 22∙0,07 = 0,28 m magasról, a harmadik golyó z03 = 32∙0,07 = 0,63 m magasról, a negyedik golyó z04 = 42∙0,07 = 1,12 m magasról, és az ötödik golyó z05 = 52∙0,07 = 1,75 m magasról.

[Nem kérdés, de kiszámolhatjuk a koppanások között eltelt időt:
z01 = ½gt12 = 0,07 m  t1 = 0,12 s.]

*KÍSÉRLET: Kötélre egyenletes távolságban, ill. négyzetesen növekvő távolságban fűzünk fel anyacsavarokat, és leejtve megfigyeljük az anyacsavarok koppanása között eltelt időt. Füllel is érzékelhető a különbség, de a hangot rögzíthetjük is (pl. Audacity), és onnan leolvasható a koppanások között eltelt idő.*

**1A/6. (MÁ 108.)** Egy lift 14,7 m/s sebességgel süllyed. A lift mellett leejtünk egy követ.

**a)** Mikor és hol találkozik a lift a kővel, ha elég hosszú még lefelé a liftakna?

**b)** Mikor egyenlő a kő és a lift sebessége?

Megoldás

A lift és a kő helyét kell az idő függvényében felírni arra ügyelve, hogy azonos koordinátarendszerben adjuk meg a helyüket. A z = 0 helyet mi választhatjuk meg úgy, hogy a legegyszerűbb legyen a számolás: legyen pl. az a hely, ahonnan indul a lift és a kő. Így

az egyenletesen süllyedő liftre zlift(t) = –vliftt és

a szabadesést végző kőre zkő(t) = – ½gt2 .

**a)** Akkor találkoznak, ha zlift(t\*) = zkő(t\*), vagyis –vliftt\* = – ½gt\*2.

A t\*1 = 0 megoldás a közös kiindulási állapotra vonatkozik. A másik megoldás

t\*2 = 2vlift/g = 2∙14,7/10 = 2,94 s , ekkor éri utol a kő a liftet.

A találkozás helye kiszámolható bármelyik z(t) függvénybe való behelyettesítéssel:

z\* = –vlift t\*2 = –14,7∙2,94 = –43,22 m, ill. z\* = – ½gt\*22 = –0,5∙10∙2,942 = –43,22 m;

tehát 43,22 m-rel lejjebb találkoznak.

**b)** A lift sebessége konstans: vlift = –14,7 m/s, a kőé pedig egyenletesen nő: vkő(t) = –gt.

vkő(t’) = vlift , ha –gt’ = vlift  t’ = –vlift/g = –(–14,7)/10 = 1,47 s.

[Egyébként ekkor nincsenek egymás mellett, a lift zlift(t’) = –14,7∙1,47 = –21,61 m-nél, a kő pedig zkő(t’) = –0,5∙10∙1,472 = –10,80 m-nél van (még nem érte utol a liftet).]

**Ferde hajítás**

Ha távolabbról nézzük, ahogy egy egyenletesen haladó teherautó platóján valaki leejt egy testet, vagy függőlegesen felfelé ill. lefelé elhajít, akkor azt látjuk, hogy a függőleges mozgás közben vízszintes irányban is elmozdul a test egyenletes sebességgel. Hasonló mozgás jön létre akkor is, ha a testet úgy hajítjuk el, hogy mi adunk a testnek vízszintes irányú sebességet. Ez a vízszintes irányú sebesség nem fog változni, mert a test g gyorsulása függőleges, és mivel a g gyorsulásnak nincs vízszintes komponense, ezért a sebesség vízszintes komponense állandó marad.

*KÍSÉRLET: Két test egy időben indul azonos magasságból: az egyik vízszintes kezdősebességgel, a másik kezdősebesség nélkül szabadon esik. Egyszerre érnek földet, ami azt mutatja, hogy a vízszintesen meglökött test vízszintes irányú elmozdulása nem befolyásolja a függőleges irányú mozgását, a vízszintes és a függőleges irányú mozgások egymástól függetlenek.*

A ferde hajítás tehát egy vízszintes irányú egyenletes mozgás és egy függőleges irányú egyenletesen változó mozgás eredője.

Képletek:

A mozgás az x – z síkban történik, a z tengely felfelé mutat.

A test gyorsulásának komponensei:

vízszintes: ax = 0;

függőleges: az = –g.

A kezdősebesség nagysága v0, a vízszintessel  szöget zár be.  pozitív, ha ferdén felfelé hajítunk, ill.  negatív, ha ferdén lefelé hajítunk. Ebből a kezdősebesség komponensei:
v0x = v0 cos, v0z = v0 sin.

A test sebességének komponensei:

vízszintes: vx = v0x = konst.;

függőleges: vz = v0z – gt .

Ha vz>0, akkor a test emelkedik, ill. ha vz<0, akkor a test esik lefelé. Mivel gt előjele negatív, egy idő után vz előjele akkor is negatív lesz (azaz esik lefelé), ha v0z pozitív volt (felfelé dobtuk el a testet). Az előjelek alkalmazásával a hajítás felfelé ill. lefelé mutató szakasza egyben kezelhető.

A test helyvektorának komponensei:

vízszintes: x = x0 + v0xt ;

függőleges: z = z0 + v0zt – ½gt2 .

Speciális esetek:

Függőleges hajítás:

sebessége: vízszintes: vx = 0; függőleges: vz = v0 – gt ;

helyének komponensei: vízszintes: x = x0 ; függőleges: z = z0 + v0t – ½gt2 .

Vízszintes hajítás:

sebessége: vízszintes: vx = v0 = konst.; függőleges: vz = – gt ;

helyének komponensei: vízszintes: x = x0 + v0t ; függőleges: z = z0 – ½gt2 .

**FELADATOK**

**1A/7. (MÁ 132.)** Egy testet 25 m/s kezdősebességgel, 60°-os szögben ferdén elhajítunk. Hol van 2 s múlva, és mekkora a sebessége?

Megoldás

A test helyének vízszintes koordinátája x = x0 + v0xt, függőleges koordinátája z = z0 + v0zt – ½gt2.

x0 és z0 választható zérusnak.

v0x = v0 cos = 25∙cos60 = 12,5 m/s; v0z = v0 sin = 25∙sin60 = 21,65 m/s, tehát

x(t) = 12,5t és z(t) = 21,65t – 5t2.

Behelyettesítve t = 2 s-ot x(2) = 12,5∙2 = 25 m; z(2) = 21,65∙2 – 5∙22 = 23,30 m.

A test tehát vízszintesen mérve 25 m-t távolodott az elhajítás helyétől, és 23,30 m-rel van magasabban annál a magasságnál, ahonnan elhajították.

A test sebességének komponensei vx = v0x = 25∙cos60 = 12,5 m/s (állandó), és
vz(t) = v0z – gt = 25∙sin60 – 10t = 21,65 – 10t,
ami t = 2 s-nál v(2) = 21,65 – 10∙2 = 1,651 m/s (pozitív, tehát a test még emelkedik).

[Hogy miért nem 1,65 m/s-ot írunk? Mert kerekítésnél a számokat 4 értékes jeggyel írjuk le, a számolásokban viszont mindig a pontos értéket visszük tovább. A v0z = v0 sin = 25∙sin60 értéke pontosabban megadva 21,65063509 m/s, ami 4 értékes jegyre kerekítve 21,65 m/s, viszont a v(2) = 25∙sin60 – 10∙2 értéke pontosabban 1,650635095 m/s, ami 4 értékes jegyre kerekítve 1,651 m/s.]

A test sebességének nagysága Püthagorasz-tétellel: v(2) = (12,52 + 1,6512) = 12,61 m/s.

*KÍSÉRLET: A locsolókannából kifolyó víz által leírt pálya parabola.*

**1A/8. (MÁ 127.)** Egy testet 60-os szögben ferdén elhajítunk 25 m/s kezdősebességgel.

**a)** Mikor ér a pálya tetőpontjára?

**b)** Milyen magasan van a tetőpont?

**c)** Mikor ér újra az elindítás magasságába?

**d)** Milyen távol ér újra az elindítás magasságába?

Megoldás

**a)** A test az elhajítás után egy ideig emelkedik, vagyis a sebességének a függőleges komponense pozitív, majd a pálya tetőpontját elérve esni kezd, vagyis a sebességének a függőleges komponense negatív lesz. A pálya tetőpontján akkor van a test, amikor a sebességének a függőleges komponense zérus. (A test nem áll meg a pálya legfelső pontján, mert a vízszintes sebessége állandó; csak a függőleges sebessége lesz egy pillanatra zérus.)

vz(t) = v0z – gt = v0 sin – gt = 25∙sin60 – 10t = 21,65 – 10t;

vz(th) = 0  th = v0z/g = 2,165 s.

**b)** A test helyének függőleges koordinátája z = z0 + v0zt – ½gt2.

z0 választható zérusnak; z(t) = v0zt – ½gt2 = v0 sin – ½gt2 = 21,65t – 5t2.

A pálya csúcspontjának a magasságát úgy kapjuk meg, hogy ebbe behelyettesítjük th értékét:

h = z(th) = 21,65t – 5th2 = 21,652,165 – 52,1652 = 23,44 m.

[Vagy megtehetjük, hogy először a képleteket rendezzük, és h-t kifejezzük a kezdősebességgel:

h = v0zth – ½gth2 = v0z  v0z/g – ½g (v0z/g)2 = ½v0z2/g = 0,5(25∙sin60)2/10 = 23,44 m.]

**c)** Amikor a test az elhajítás magasságába ér, akkor ugyanakkora a z koordinátája, mint az elhajításkor (z0 = 0 volt a választásunk), tehát

z(td) = v0ztd – ½gtd2 = 21,65td – 5td2 = 0 

 ennek egyik megoldása td = 0, ami az indulás időpontja,

 másik megoldása td = 2v0z/g = 4,330 s.

Vegyük észre, hogy ez az idő kétszerese annak az időnek, amennyi alatt a test a pálya csúcspontjára ért, mivel a pálya szimmetrikus.

**d)** Amikor a test azonos magasságba ér az elhajítás magasságával, akkor az elhajítás helyétől mért távolsága megegyezik az x koordinátájának változásával. (A pálya minden más pontján a távolságot Püthagorasz-tétellel kellene számolni, mivel mindkét koordináta változik.)

d = x(td) – x0 = v0xtd = v0costd .

Behelyettesítve td értékét: d = 25cos60°4,330 = 54,13 m.

[Vagy megtehetjük, hogy először a képleteket rendezzük, és d-t kifejezzük a kezdősebességgel:

d = v0xtd = v0x(2v0z/g) = v0cos2v0 sin/g = v02sin(2)/g = 252sin120°/10 = 54,13 m.]

**SZIMULÁCIÓK, AMIKKEL ÉRDEMES JÁTSZANI:**

Viszonylag szabadon rajzolható függvények deriváltja ill. integrálja: <https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/calculus-grapher>

Próbáljuk meg a katicát gyorsulással irányítani:

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/maze-game>

„Katicaidomítás”: szabadon mozgatható a bogár, és közben megrajzolja a pillanatnyi sebességvektorát és gyorsulásvektorát:

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/legacy/ladybug-motion-2d>

Hajítás:

<https://phet.colorado.edu/en/simulation/projectile-motion>

A legtöbb mobiltelefonban van gyorsulásérzékelő, aminek az adatai kiolvashatók pl. a VIEYRA szoftverrel, így megtudhatjuk, mekkora volt pl. a villamos vagy a lift gyorsulása, illetve hogy milyen gyorsulással tudunk futni.

**KIDOLGOZOTT GYAKORLÓ FELADATOK**

**(MÁ 14.)** Egyenes úton személyautó, az úttal párhuzamosan futó vasúti sínen pedig vonat halad. Az autó sebessége 68,4 km/h, a vonaté 54 km/h. A vonat 2,4 km-rel jár az autó előtt.

Mennyi idő alatt és mekkora úton éri utol az autó a vonatot?

Ábrázoljuk mindkét test elmozdulását az idő függvényében!

Megoldás

Mindkét test egyenletes mozgást végez: x = x0 + vt,

vagyis xautó = x0, autó + vautó t és xvonat = x0,vonat + vvonat t .

Az autó indulási x0, autó koordinátáját vegyük zérusnak, így a vonaté x0,vonat = 2,4 km = 2400 m;

a sebességek: vautó = 68,4 km/h, ill. vvonat = 54 km/h.

Mértékegység átváltása: $1\frac{km}{h}=\frac{1000 m}{3600 s}=\frac{1}{3,6} \frac{m}{s}$,

tehát a sebességek SI alapmennyiségekkel: vautó = 19 m/s, ill. vvonat = 15 m/s.

A helykoordináták

km és h mértékegységekkel felírva: xautó = 68,4 t és xvonat = 2,4 + 54 t (t h-ban értendő);

SI alapegységekkel felírva: xautó = 19 t és xvonat = 2400 + 15 t (t s-ban értendő).

Akkor találkoznak, amikor xautó = xvonat , azaz x0, autó + vautó t = x0,vonat + vvonat t 

t = (x0,vonat – x0, autó) / (vautó – vvonat).

Behelyettesítve

km és h mértékegységekkel: t = (2,4–0)/(68,4–54) = 1/6 h = 0,1667 h;

SI alapegységekkel: t = (2400–0)/(19–15) = 600 s.

Tehát 1/6 h = 600 s = 10 perc múlva találkoznak.

A találkozás helyét megkaphatjuk bármelyik x(t) függvénybe való behelyettesítéssel,

pl. SI alapegységekkel számolva:

xautó = vautó t = 19600 = 11400 m, ill. xvonat = x0,vonat + vvonat t = 2400 + 15600 = 11400 m.

Ábrázoljuk:

**(MÁ 57.)** Egy gépkocsi sebessége 54 km/h-ról 90 km/h-ra növekedett, miközben a gyorsulása 1,6 m/s2 volt. Mennyi ideig tartott és mekkora utat tett meg a gépkocsi ezalatt?

Megoldás

v0 = 54 km/h = 15 m/s; v1 = 90 km/h = 25 m/s, a = 1,6 m/s2.

A gyorsulás állandó,

tehát v(t) = v0 + at = 15 + 1,6t ;

és tudjuk, hogy a keresett t1 időben v1 = v(t1) = v0 + at1 = 25 m/s, amiből t1 = 6,25 s.

Vagy számolhatunk az a = Δv / Δt képlettel is:

Δt = Δv / a = (v1 – v0 ) / a = (25 – 15) / 1,6 = 6,25 s.

A gépkocsi x koordinátája, ha induláskor az origóból indul, azaz x0 = 0:

x(t) = v0t + ½at2 ,

ebbe behelyettesítve a t1 időt

x(t) = v0t1 + ½at12 = 15∙6,25 + (1,6/2)∙6,252 = 125 m.