Dinamikai Rendszerek

Noszticzius Zoltán

2004. október 12.

I.

I.1. Dinamikai rendszerek definíciója és osztályozási szempontjai

I.1.1. Determinisztikus dinamikai rendszer

A rendszer kezdeti állapotából valamiféle "szabállyal" vagy utasítással, precízebben megfogalmazva: egy függvénnyel a rendszer egy később állapotát ki tudjuk számítani. Ha pontosan: determinisztikus dinamikai rendszer. (Ha csak bizonyos valószínűséggel: sztochasztikus dinamikai rendszer. A továbbiakban azonban csak a determinisztikus rendszerekkel óhajtunk foglalkozni.) Tehát ha ismerjük az $\underline{\boldsymbol{x}}_0$ kezdeti állapotot, akkor ebből a t idő eltelte után előálló x állapotot egy $\phi(\underline{\boldsymbol{x}}_0, t)$ függvénnyel számíthatjuk:

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \phi(\underline{\boldsymbol{x}}_0, t) \text{ azaz } \phi : (\underline{\boldsymbol{x}}_0) \to \underline{\boldsymbol{x}},$$

vagy más jelöléssel:

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \phi_t(\underline{\boldsymbol{x}}_0),$$

ahol

$$t \in \mathbb{R} \text{ és } x \in M$$

t az idő és az x vektor adja meg a rendszer állapotát, vagy fázisát. Ha ezt véges sok állapothatározóval meg tudjuk tenni, akkor az állapot-vektornak véges f számú komponese van és az M állapottérre, vagy fázistérre áll, hogy

$$M \subset \mathbb{R}^f.$$

I.1.2. Dinamikai rendszerek osztályozása a modell tárgya szerint

Fizikai, kémiai, biológiai, populációdinamikai, szociológiai, közgazdasági stb. dinamikai rendszerek.

I.1.3. Osztályozás a dimamikai rendszer leírására használt matematikai eszköz szerint

Matematikai eszközök: közönséges és parciális differenciálegyenlet-rendszerek (ODE, PDE), leképezések (maps), sejtautomaták (cellular automata CA), csatolt leképezés rácsok (coupled map lattices CML) stb.

Lineáris és nemlineáris

Bár a dinamikai rendszerek elmélete mind a lineáris, mind a nemlineáris rendszerekre vonatkozik az elméletre igazán a nem-lineáris esetben van szükség, ekkor jönnek elő igazán érdekes esetek. Ezért – különösen a kezedeti időkben (a múlt század hatvanas-nyolcvanas éveiben) "Nem-lineáris dinamika" néven is emlegették ezt a tudományágat.

Osztályozás a fázistér dimenziója szerint

Egy, kettő, három, véges és végtelen dimenziós dinamikai rendszerek.

Disszipatív, konzervatív és explozív rendszerek.

Mi itt elsősorban a dissipatív rendszereket fogjuk vizsgálni. Tranziens és aszimptotikus viselkedés a disszipatív rendszereknél. Konzervatív rendszereknél nincsen tranziens állapot. (Pl. majd látni fogjuk, hogy ilyen a klasszikus Loka-Volterra rendszer, vagy a csillapítatlan harmonikus oszcillátor.)

I.1.4. Az általunk vizsgált dinamikai rendszerek

Jelen stúdiumunk fő tárgya: közönséges differenciálegyenletekkel és leképezésekkel leírható determinisztikus és autonóm disszipatív dinamikai rendszerek :

$$\begin{array}{ll} \text{ODE:} & \underline{\dot{\boldsymbol{x}}} = f(\underline{\boldsymbol{x}}, \mu) \\ \text{Map:} & \underline{\boldsymbol{x}}_{n+1} = f(\underline{\boldsymbol{x}}_n, \mu) \end{array}$$

μ: paraméterek vektora (erről még később lesz szó)

Főként egy és kétváltozós rendszereket fogunk tekinteni. Megvizsgálunk ezen kívül és egy-két konzervatív, valamint néhány nem-autonóm rendszert is .

I.1.5. ODE mint dinamikai rendszer

Autonóm és nem autonóm ODE

I.1.6. Példák

a. CSTR:

Nyílt v. meghajtott rendszer.A Lotka-Volterra rendszer.

Ragadozó zsákmány modell (X: nyulak, Y: rókák, A: fű, B: hamu):

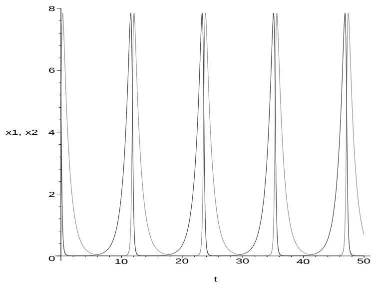
$$\begin{aligned} X + [A] &\overset{k_1}{\to} 2X \\ X + Y &\overset{k_2}{\to} 2Y \\ Y &\overset{k_3}{\to} [B] \end{aligned}$$

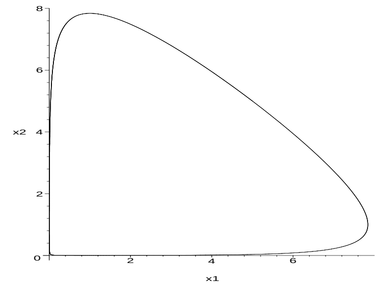
Pool of chemicals approximation: a fűből tetszőleges mennyiség van, soha nem fogy el. Tömeghatás törvény.

Legyen x_1 a nyulak száma, x_2 a rókák száma:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = (a - bx_2(t) - mx_1(t))x_1(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = (cx_1(t) - d - nx_2(t))x_2(t)$$





I.1. ábra. Nyulak és rókák az idő függvényében.

I.2. ábra. Nyulak és rókák a fázissíkon.

Paraméterek: $a = 1, b = 1, c = 1, d = 1, m = 0, n = 0$.

A változók (nyulak és rókák) időbeli változása: I.1 ábra.

Fázissík (nyulak a rókák függvényében) I.2 ábra.

Indítsuk különböző kezdeti feltételekről a rendszert:

$$\begin{array}{ll} x_1(0) = 1 & x_2(0) = 1 \\ x_1(0) = 2 & x_2(0) = 2 \\ x_1(0) = 3 & x_2(0) = 3 \\ x_1(0) = 4 & x_2(0) = 4 \\ x_1(0) = 5 & x_2(0) = 5 \end{array}$$

Konzervatív L-V oszcillációk (I.3 ábra).

Nyúlfarm hatása (I.4 ábra):

$$\begin{aligned} X + [A] &\xrightarrow{k_1} 2X \\ X + Y &\xrightarrow{k_2} 2Y \\ Y &\xrightarrow{k_3} [B] \\ [C] &\xrightarrow{k_4} X \end{aligned}$$

$$\frac{dx_1(t)}{t} = x_1(t) - x_1(t)x_2(t) + c$$
$$\frac{dx_2(t)}{t} = x_1(t)x_2(t) - x_2(t)$$

Paraméter: $c = 0.4$.

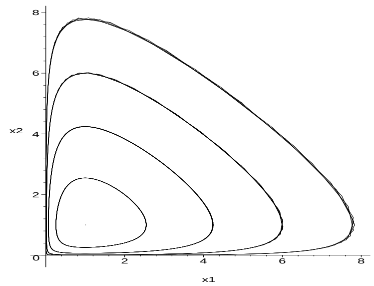
b. Mechanikai példa:

Harmonikus rezgőmozgás:

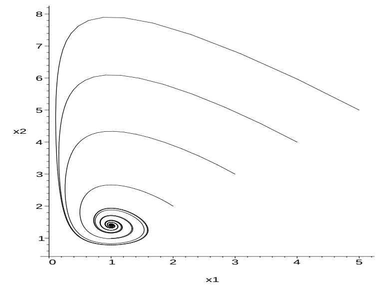
$$m\ddot{x} = -kx - d\dot{x}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

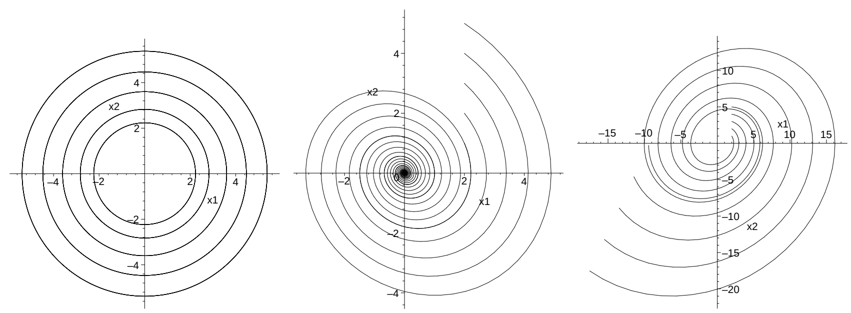
$$\frac{dx_1(t)}{t} = ax_1(t) + bx_2(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{t} = cx_1(t) + dx_2(t)$$



I.3. ábra. Nyulak és rókák a fázissíkon különböző kezdeti feltételekkel.



I.4. ábra. Nyúlfarm hatása



I.5. ábra. Harmonikus oszcillátor. a) súrlódás nincs, b) sebességgel ellentétes irányú, c) sebesség nagyságával arányos

Harmonikus konzervatív rezgőmozgás (I.5 a)): Paraméter: $a = 0, b = 1, c = -1, d =$.

Csillapított (disszipatív) rezgőmozgás (I.5 b)): Paraméter: $a = 0, b = 1, c = -1, d = -.25$.

Negatív csillapítás: explozív oszcillációk I.5 c)). Paraméter: $a = 0, b = 1, c = -1, d = 0.3$.

c. Meghajtott rendszerek: ingaóra.

d. Elektromos példa: csillapítatlan LC oszcillátor, csillapított oszcillátor.

e. Meghajtott nemlineáris rendszer: Van der Pol oszcillátor.

f. Kémiai példa: oszcilláló reakció (kísérlet).

g. Disszipatív rendszer: pontattraktor. Vannak-e más fajta attraktorok is?