

Dinamikai rendszerek – mi ez és mire jó?

Mottó helyett:



Mielőtt a dinamikai rendszerekről beszélünk, mit is értünk rendszer alatt? A rendszer a minket körülvevő világ egy kisebb-nagyobb része, ami valamiért számunkra éppen érdekes. Lehet ez egy cseppnyi reakcióelegy, vagy akár egy galaxis-rendszer is. Amikor ezt modellezzük, akkor az állapotát valamilyen változókkal írjuk le, például a reakcióelegy esetén koncentrációkkal, a galaxis-rendszer esetén a galaxisok koordinátaival és sebességével. A modellben lesznek valamilyen szabályaink, amik leírják ezeknek a változóknak a viselkedését. Dinamikai rendszer esetén ezek a szabályok olyanok, hogy a változók időbeli megváltozására van egy törvényünk, és ez a törvény csak a változók adott időpontbeli értékétől függ (ez utóbbira mondjuk azt, hogy determinisztikus a rendszer). A legismertebb típusuk a differenciálegyenlet-rendszer: a változók időbeli deriváltja adott a változók pillanatnyi értékének függvényeként.

Fontos megfigyelés, hogy a valóságot jól leíró dinamikai rendszerek esetében elegendően hosszú idő múlva a rendszer egy állandósult viselkedést mutat. Legegyszerűbb esetben ilyenkor az összes változó egy állandó értéket vesz fel, ezt nevezzük stacionárius állapotnak vagy egyensúlynak. Kémiai reakciók esetén ez a tipikus viselkedés. Vannak viszont bonyolultabb rendszerek is, ahol az állandósult viselkedés egy periodikus változás, állandó periódusidővel és amplitúdóval. Gondoljunk például egy ingaórára: miután elindítottuk, azaz kellő erővel meglöktük, rövid idő alatt beáll egy állandó amplitúdójú ingamozgás. De néhány egzotikus kémiai rendszer esetén is egy oszcilláló reakció az állandósult állapot (ilyen pl. a Belouszov-Zsabotyinszkij vagy a Briggs-Rauscher reakció). A legbonyolultabb rendszerek esetén pedig az állandósult állapot egy össze-vissza, kaotikus mozgás, ilyen pl. a légkör, azaz az időjárás változása; de ilyen lehet egy kettős inga is.

Okos matematikusok rájöttek, hogy ezeknek az állandósult állapotoknak a vizsgálatához nem feltétlenül szükséges megoldani a differenciálegyenlet-rendszert (ami kicsit is összetett esetben a nagyon nehéz és a nincs analitikus megoldás közül valamelyik). A differenciálegyenlet-rendszer jobb oldalát (általánosan: a változást leíró szabályt) megvizsgálva egyszerű matematikai eszközökkel (például nullahelyek keresése, deriválás) az állandósult viselkedésről sok minden megmondható. Például a stacionárius állapot esetén az egyensúlyi értékek, vagy egy oszcilláció esetén annak közepe és a körülbelüli amplitúdó és periódusidő. A félév során szó lesz ezekről a módszerekről.

Vannak ezekben a differenciálegyenlet-rendszerekben paraméterek is. Ezek az időben állandóak, vagy lassan változnak. Ugyanakkor két különböző rendszer vagy kísérlet esetén ezeket módosíthatjuk. Gondoljunk például a külső hőmérsékletre, vagy az ingaóra hosszára. A fent már emlegetett okos matematikusok arra is rájöttek, hogy ahogy ezek a paraméterek változnak, a rendszer állandósult viselkedése is változik. Bizonyos értékeknél drasztikusan: megjelenik egy újabb stacionárius állapot (ún. bistabil rendszert kapunk), vagy a stacionárius állapot helyett megjelenik egy oszcilláló viselkedés. Ezeket el is nevezték bifurkációnak. A félév során részletesen végig fogjuk venni az 1 és 2 változós rendszerek tipikus bifurkációit.

Ez szép és jó, de a valódi rendszerekben általában kettőnél több változónk van. Viszont okos matematikusok arra is rájöttek, hogy a bifurkációk esetén egy néhány változós részrendszer az, ami ezeket a viselkedésbeli változásokat okozza, ezért különösen fontos az 1 és 2 változós rendszerek ismerete. Arról is lesz szó, hogyan kell ezeket az érdekes részrendszereket megtalálni. Ezen kívül szó lesz még arról is, hogy ha egy rendszerben sok paraméterünk van (pl. sok reakciókinetikai állandónk), akkor hogyan lehet megtalálni ezeknek azt a néhány kombinációját, ami ténylegesen meghatározza a bifurkációkat, azaz a rendszer viselkedését. Például egy oszcillációs reakció esetén ha két adott reakciókinetikai állandó hányadosa nagyobb egy kritikus értéknél, akkor a rendszer már nem tud oszcillálni.

És akkor kanyarodjunk vissza a mottóhoz. A dinamikai rendszer viselkedése nem függ attól, hogy a rendszer változói épp kémiai koncentrációk, populációk létszámai, helyek és sebességek, vagy termodinamikai változók. A viselkedés csak attól függ, hogy a változást leíró szabályrendszer (azaz pl. a differenciálegyenlet-rendszer jobb oldala) milyen alakú. Tehát aki otthon van a dinamikai rendszerek tudományában, az elé bármilyen tudományterületről odatesznek egy determinisztikus rendszert, azt képes lesz megvizsgálni. Például ugyanolyan alakú rendszer képes leírni egy oszcillációs reakciót, a cirkadián-kört (biokémiai reakciók) vagy egy tranzisztoros áramkör feszültségének változását. A második példa kicsit bonyolultabb, itt parciális differenciálegyenletekről van szó (ezekről csak érintőlegesen lesz szó a félév során). Itt például ugyanaz a modell használható a prérítűz terjedésére, a kémiai hullámokra, az idegsejtek kalcium hullámaira vagy a középkori pestisjárvány terjedésére.

Ezért olyan sokoldalúan használható a dinamikai rendszerek tudománya. Ha valaki egyszer kellő gyakorlatot szerzett benne, akkor tetszőleges tudományterületen képes a differenciálegyenlet-rendszer struktúrája alapján megmondani, hogy milyen viselkedés várható a rendszerben. Vagy visszafelé, a rendszer tulajdonságainak ismeretében javaslatot tenni arra, hogy milyen modell fogja tudni azt leírni.