

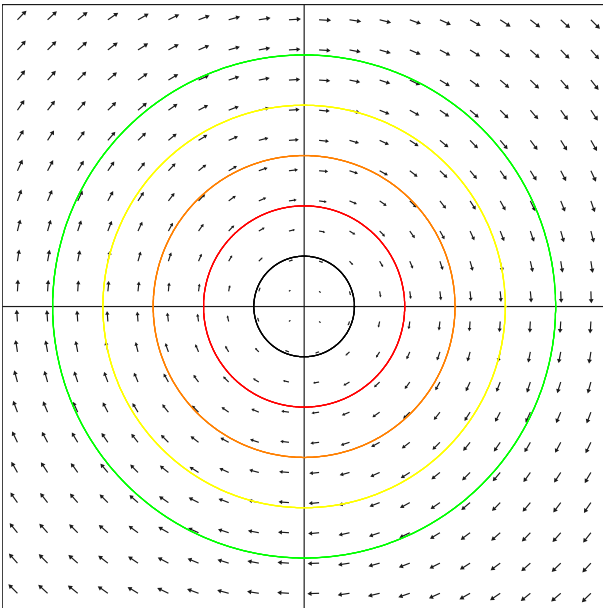
Fázisportrék

A Dinamikai rendszerek órákon bemutatott példarendszerek fázisportréi

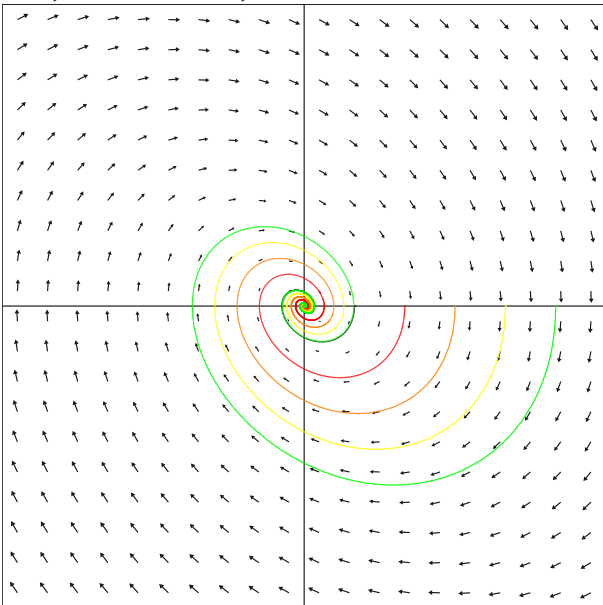
Lineáris oszcillátor

$$\dot{x} = v$$

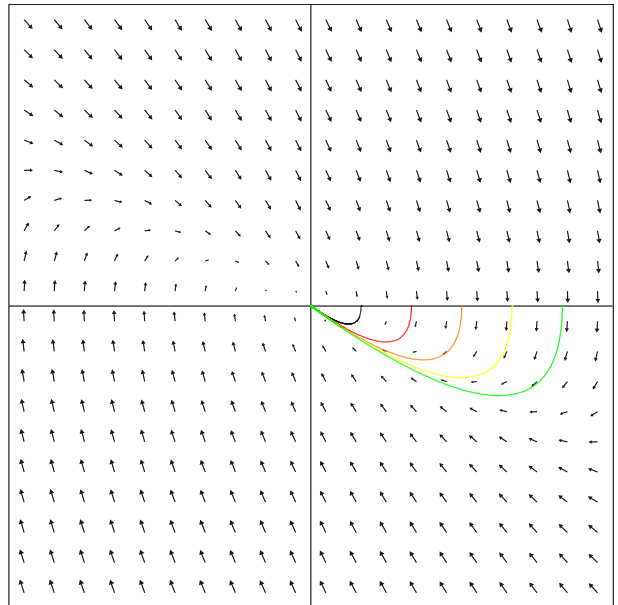
$$\dot{v} = -ax - bv$$



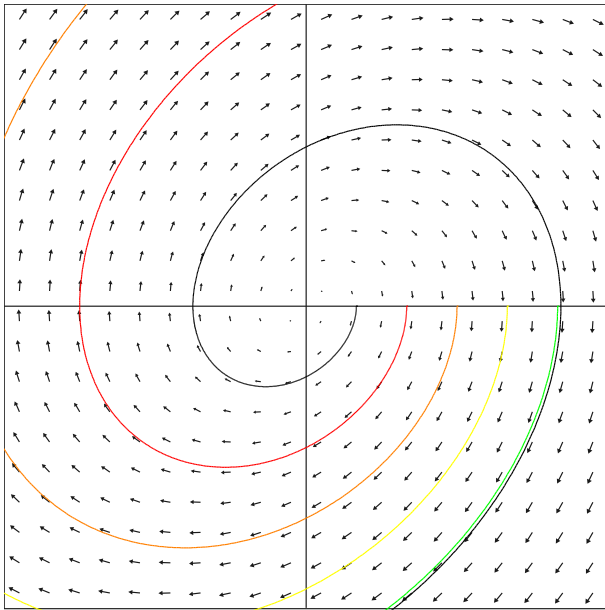
$a=0, b=0$: centrum, konzervatív rendszer



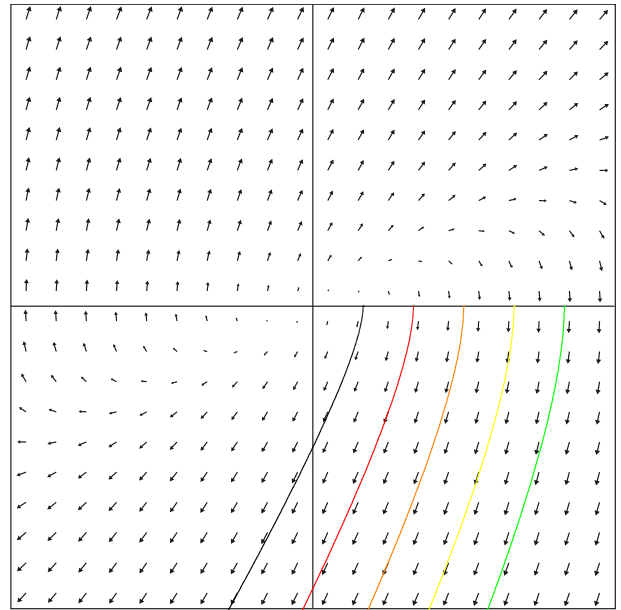
$a=0, b=0,5$: stabil fókusz, disszipatív rendszer



$a=0, b=2,1$: stabil csomó, disszipatív rendszer



$a=0, b=-0,5$: instabil fókusz, explozív rendszer



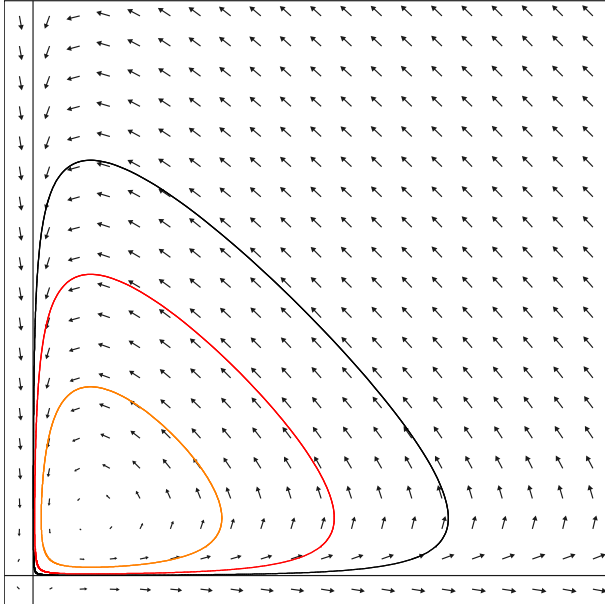
$a=0, b=-2,1$: instabil csomó, explozív rendszer

Lotka-Volterra rendszer (ragadozó-zsákmány modell)

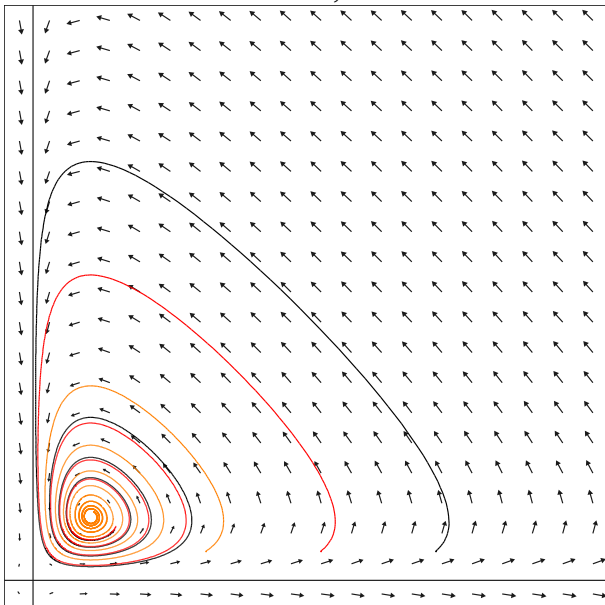
$$\dot{x} = ax - xy + b$$

$$\dot{y} = xy - y$$

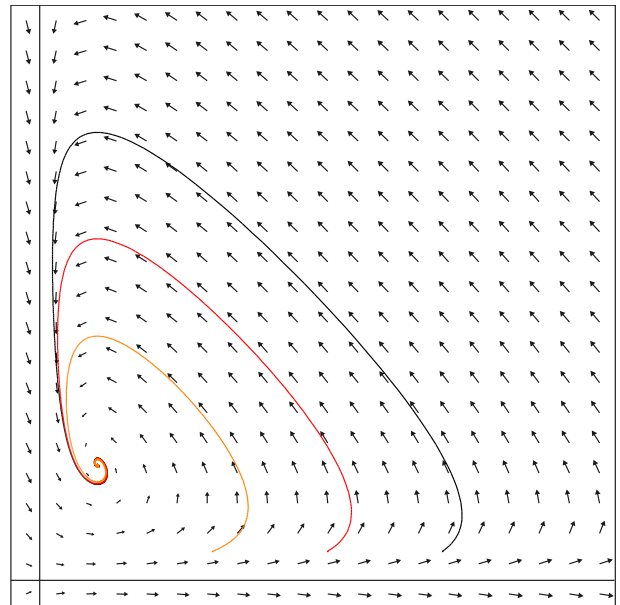
Valamennyi fázisportré esetén $a=1$.



$b=0$: nemlineáris centrum, konzervatív rendszer



$b=0,1$: stabil fókusz és nyereg az origóban,
disszipatív rendszer

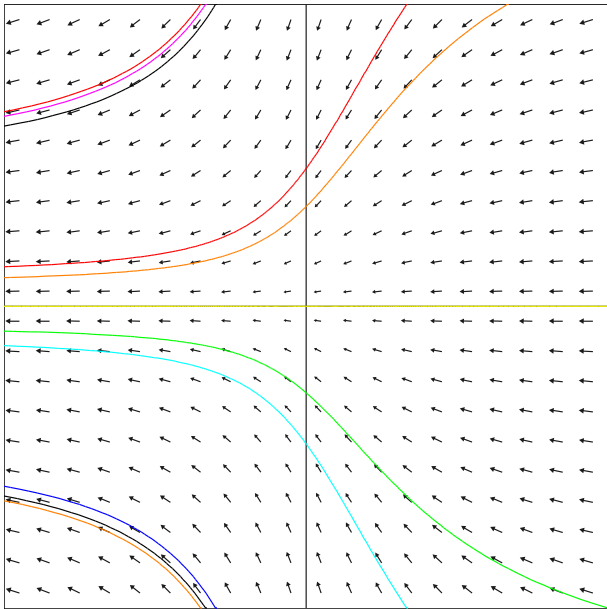


$b=1$: stabil fókusz és nyereg az origóban,
disszipatív rendszer

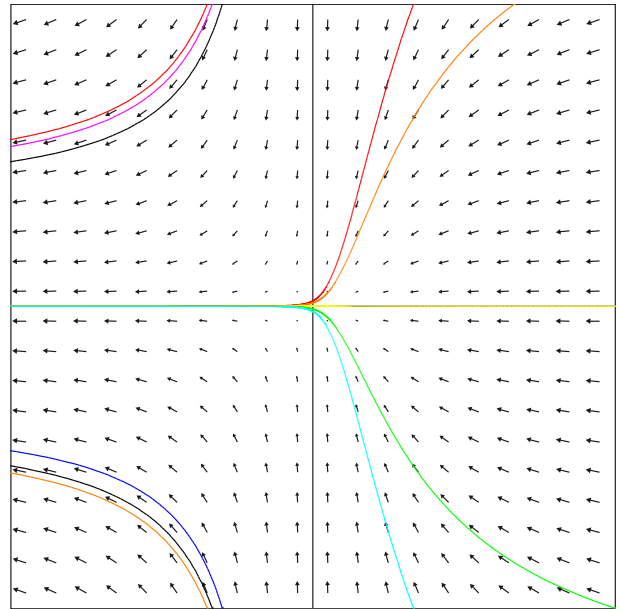
1D bifurkációk 2D szorzatrendszerekben

Nyereg-csomó (saddle-node) bifurkáció

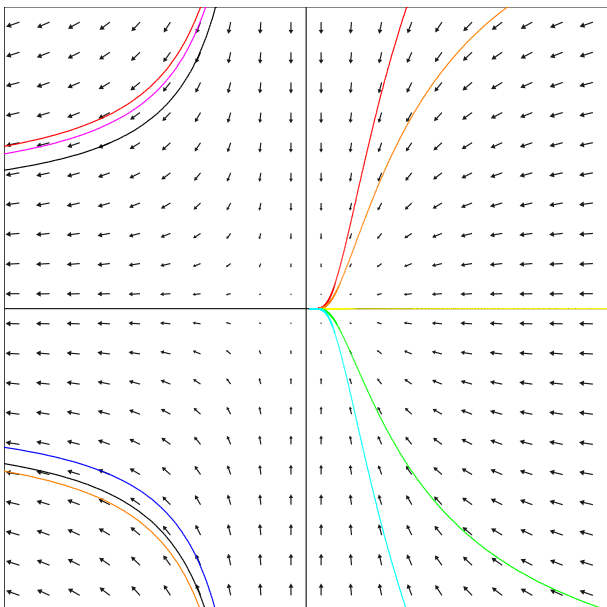
$$\begin{aligned}\dot{x} &= a - x^2 \\ \dot{y} &= -y\end{aligned}$$



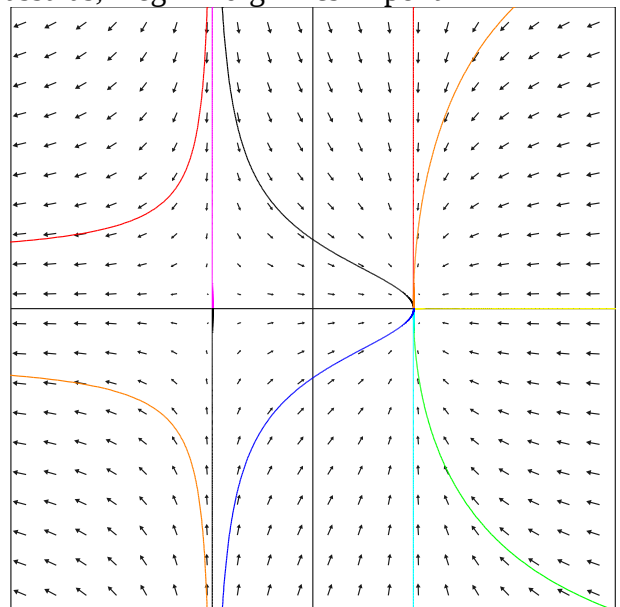
$a=-1$: bifurkáció előtt, nincs fixpont



$a=-0,1$: bifurkációhoz közeledve kritikus lelassulás, még mindig nincs fixpont



$a=0$: bifurkáció, degenerált fixpont (itt egy stabil nyereg-csomó)

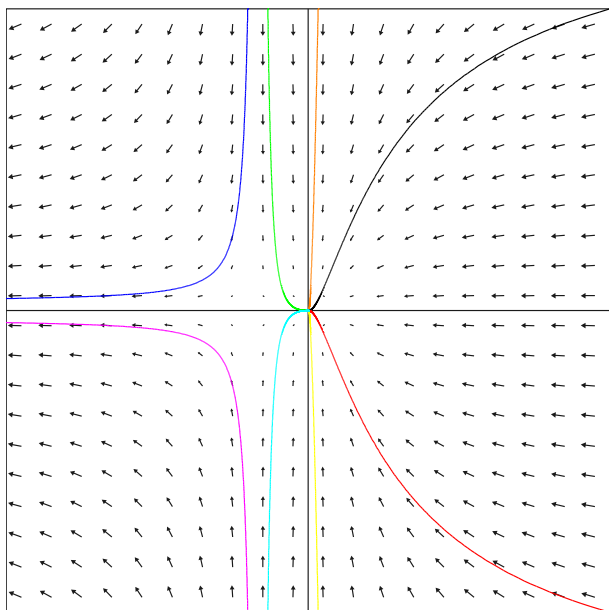


$a=1$: bifurkáció után, két fixpont, egy nyereg és egy stabil csomó

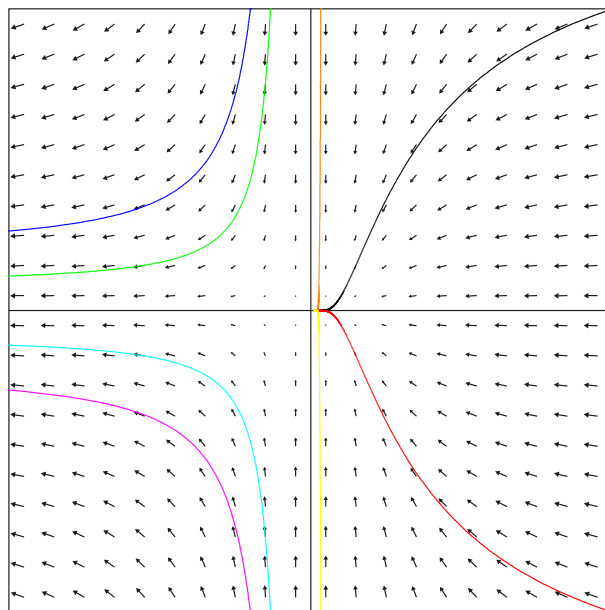
Transzkritikus bifurkáció

$$\dot{x} = ax - x^2$$

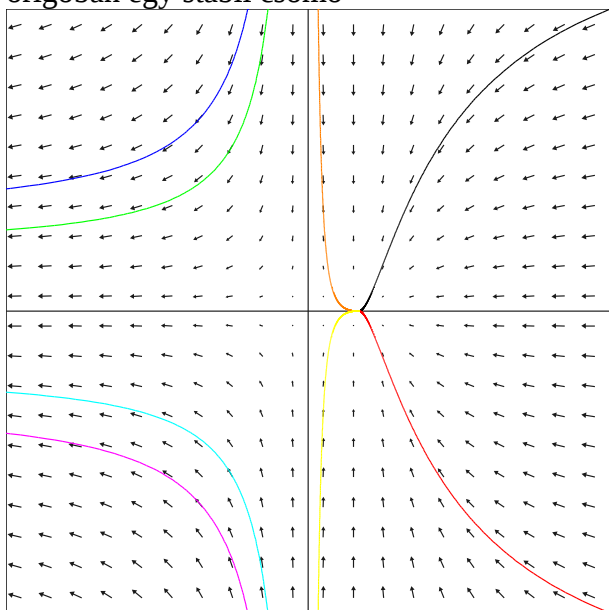
$$\dot{y} = -y$$



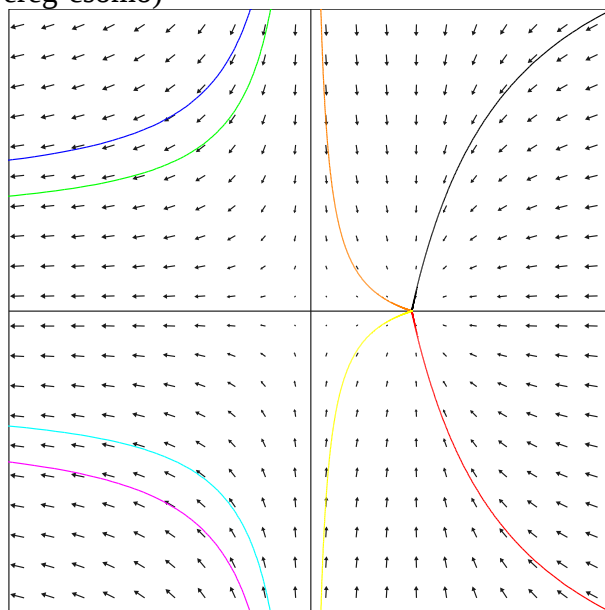
$a = -0,5$: bifurkáció előtt, balra egy nyereg, az origóban egy stabil csomó



$a = 0$: bifurkáció, degenerált fixpont (itt egy stabil nyereg-csomó)



$a = 0,5$: bifurkáció után, az origóban egy nyereg, jobbra egy stabil csomó

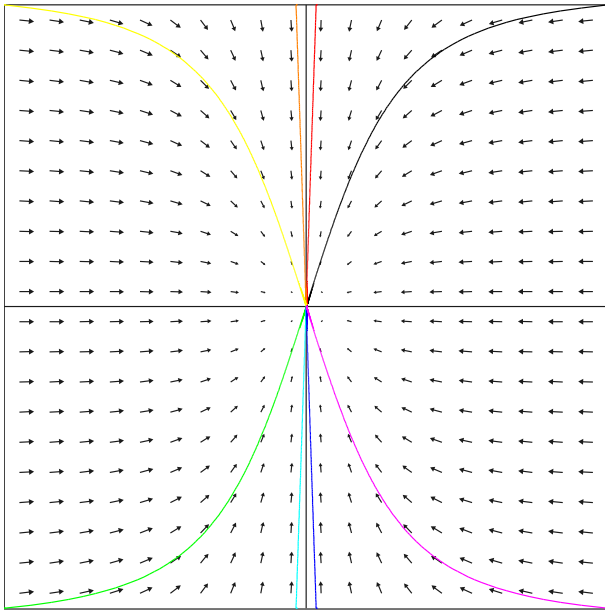


$a = 1$: bifurkáció után, az origóban egy nyereg, jobbra egy stabil csomó

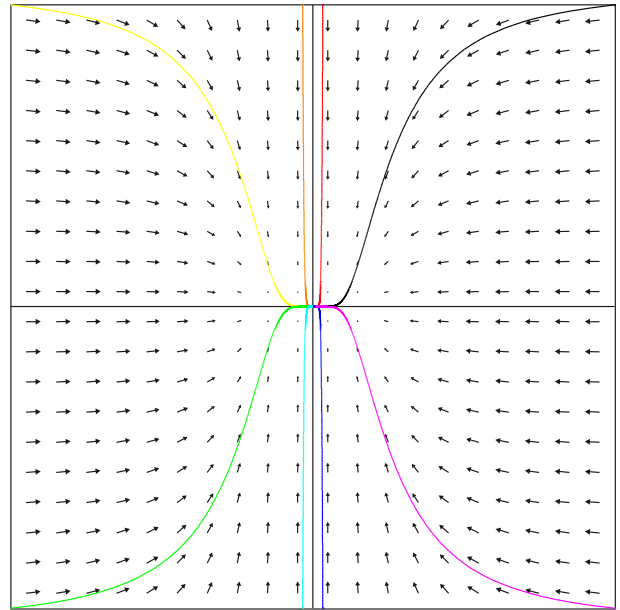
Vasvilla (pitchfork) bifurkáció

$$\dot{x} = ax - x^3$$

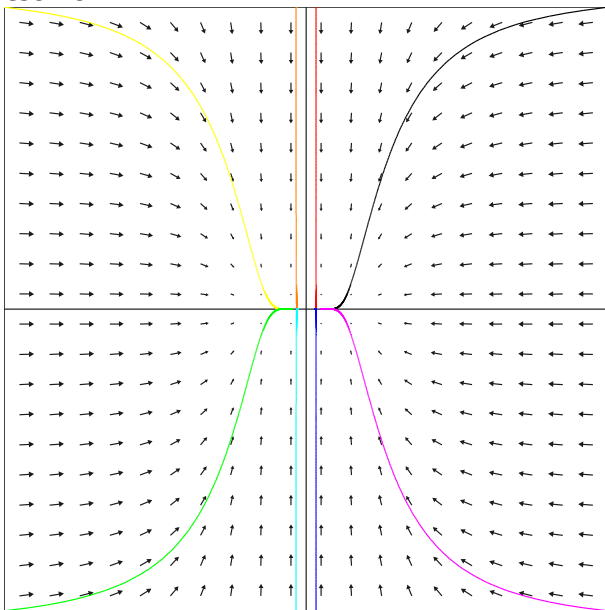
$$\dot{y} = -y$$



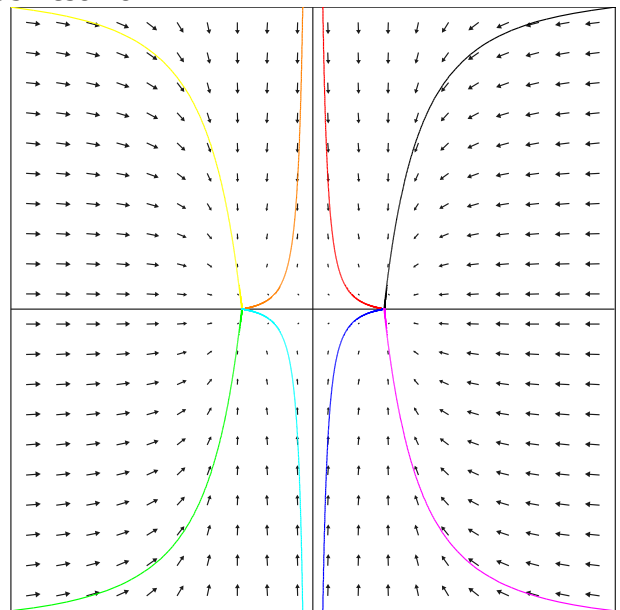
$a=-1$: bifurkáció előtt, az origóban egy stabil csomó



$a=-0,1$: bifurkációhoz közelítve, az origóban egy stabil csomó



$a=0$: bifurkáció, degenerált fixpont (itt egy stabil csomó kritikus lelassulással)

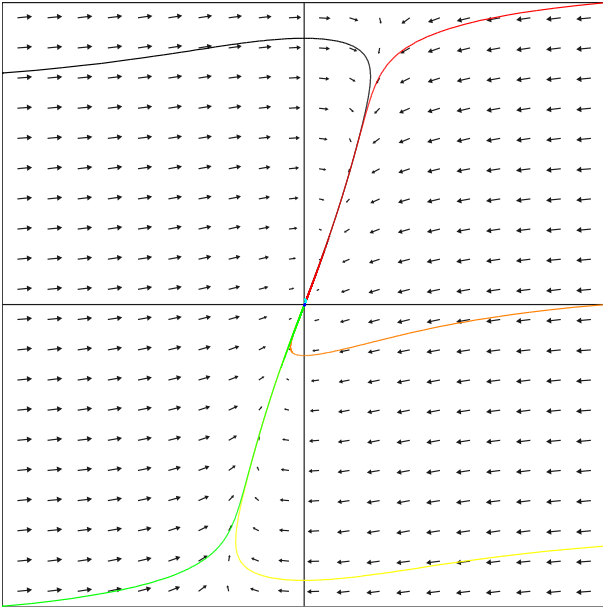


$a=0,5$: bifurkáció után, az origóban egy nyereg, két oldalt két stabil csomó

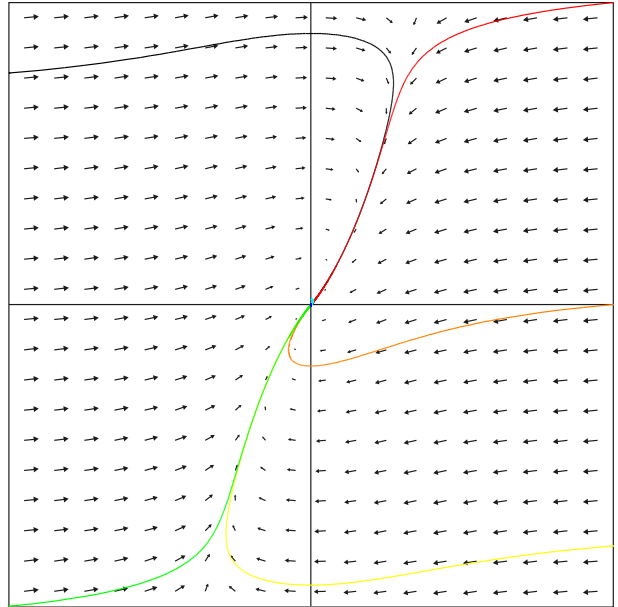
Hopf-bifurkációt mutató rendszerek

Rayleigh-oszcillátor

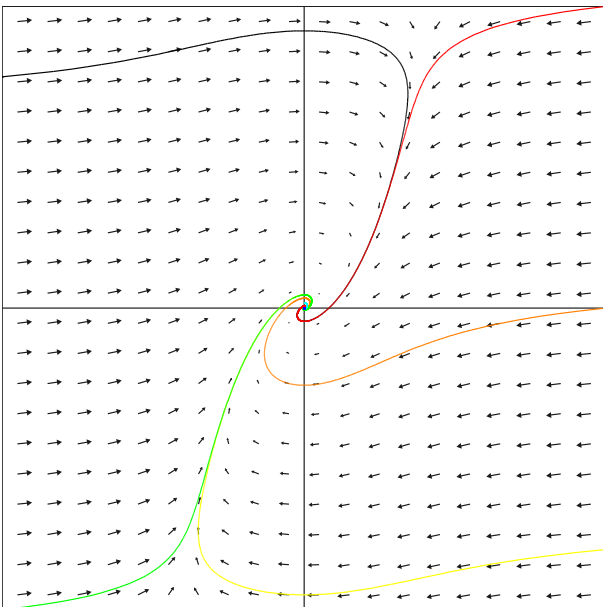
$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x^3 + ax \\ \dot{y} &= -x\end{aligned}$$



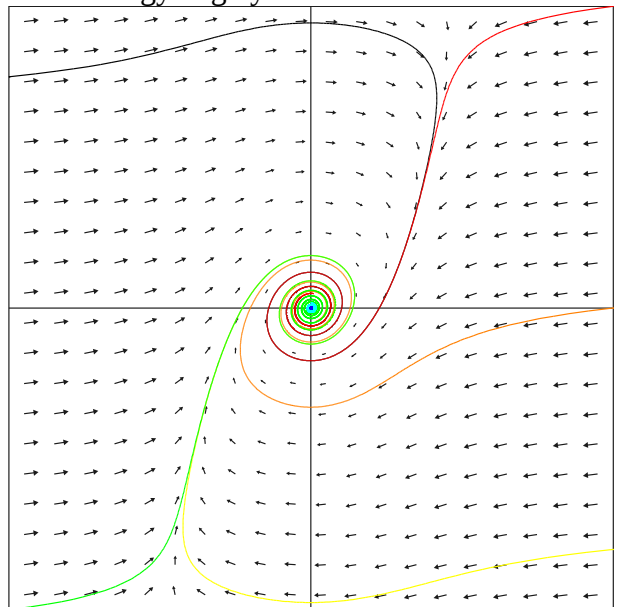
$a = -3$: stabil csomó



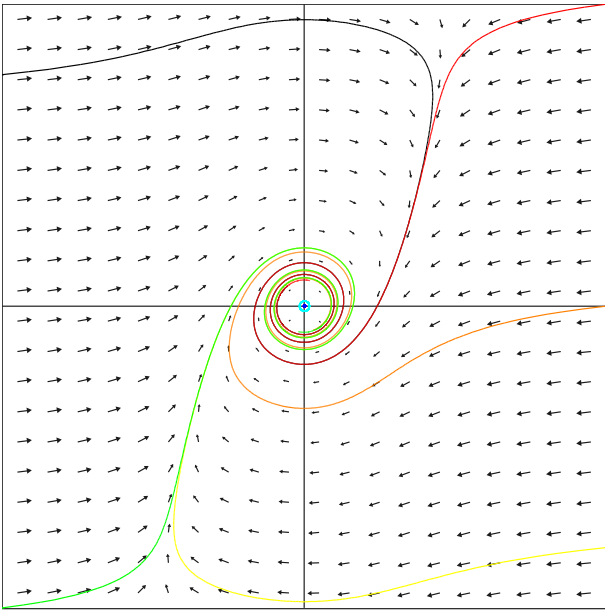
$a = -2$: stabil egytengelyű csomó



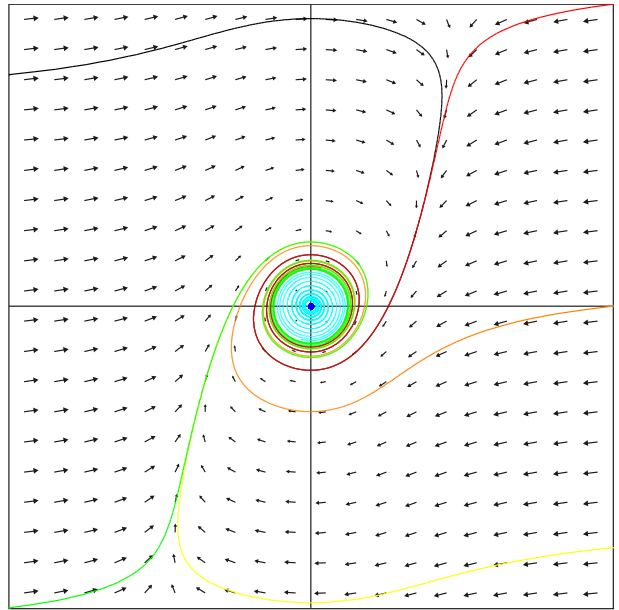
$a = -1$: stabil fókusz



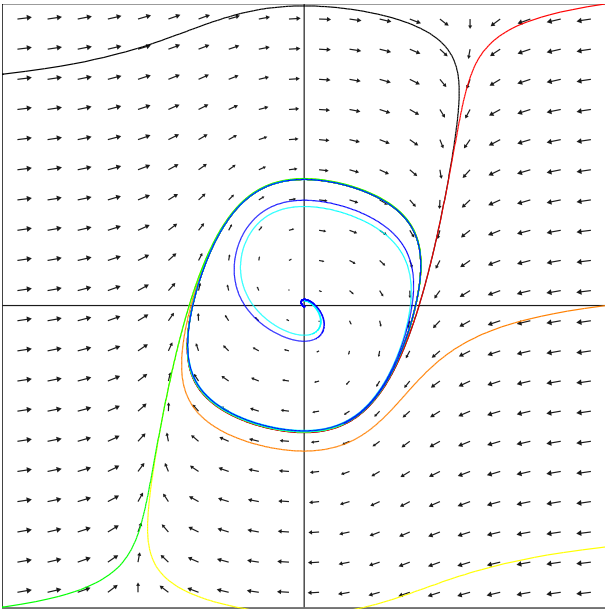
$a = -0,1$: stabil fókusz, lelassulás



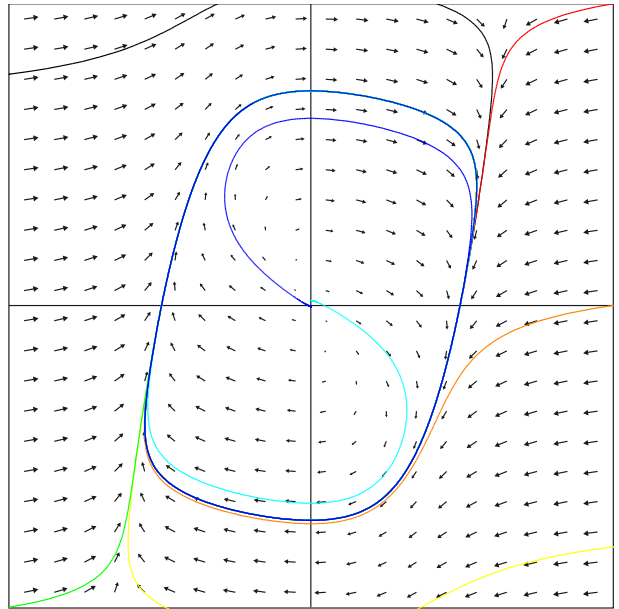
$\alpha=0$: Hopf-bifurkáció, stabil fókusz, kritikus lelassulás



$\alpha=0,1$: instabil fókusz + kis határciklus, itt még lineáris az oszcilláció



$\alpha=1$: instabil fókusz + határciklus, itt már nemlineáris oszcilláció látható

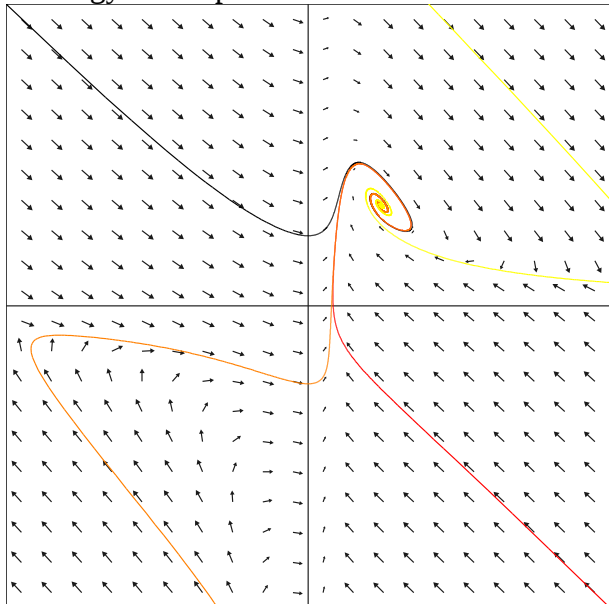


$\alpha=2$: instabil fókusz + határciklus

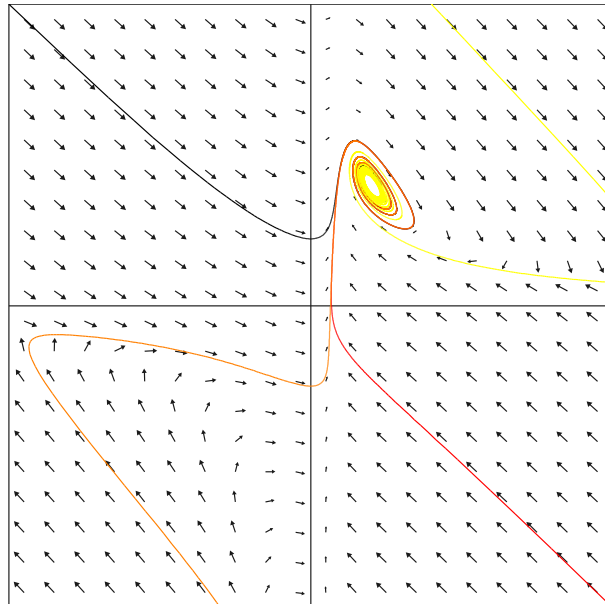
Brüsszelátor modell

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a + x^2 y - bx - x \\ \dot{y} &= bx - x^2 y\end{aligned}$$

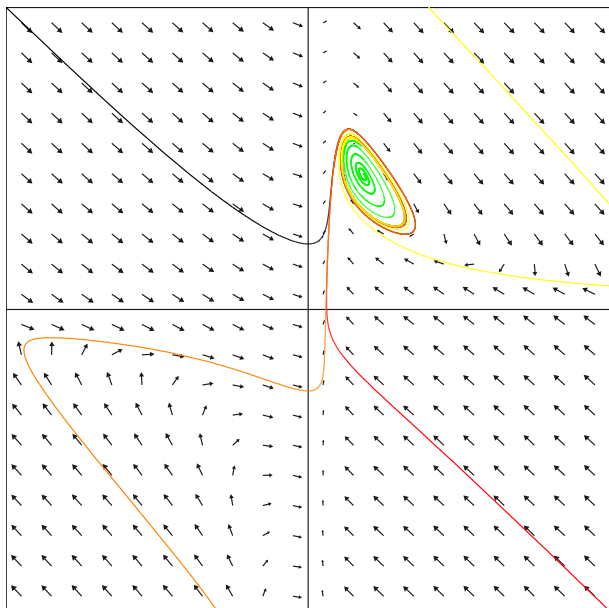
Mindegyik fázisportrénál $b=2$.



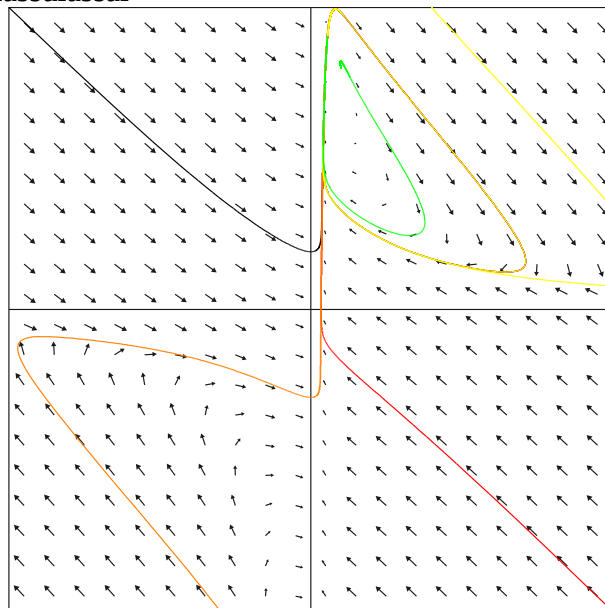
$a=1,2$: stabil fókusz



$a=1$: Hopf-bifurkáció, stabil fókusz kritikus lelassulással



$a=0,9$: instabil fókusz és határciklus

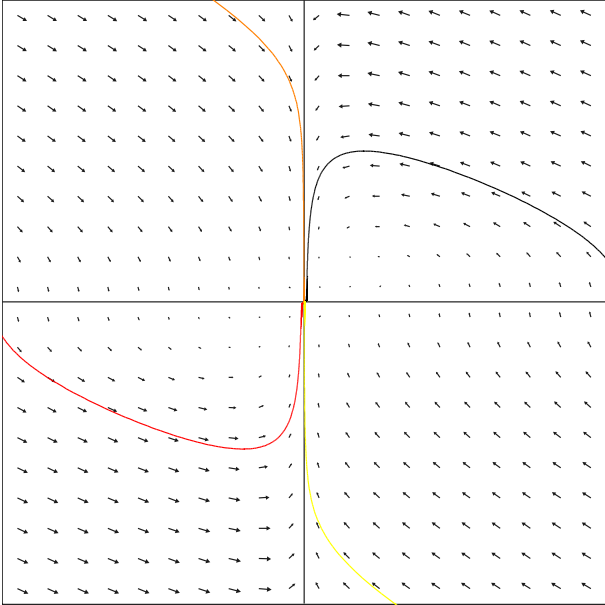


$a=0,5$: instabil fókusz és határciklus

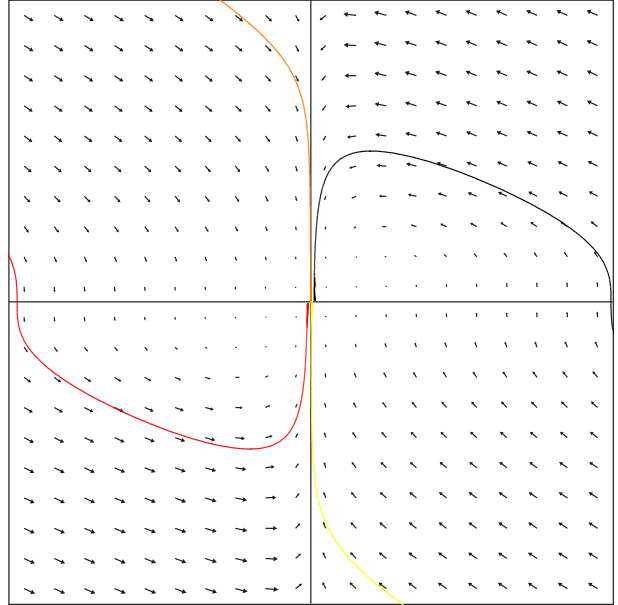
3B modell

$$\dot{x} = ax - x - xy^2$$

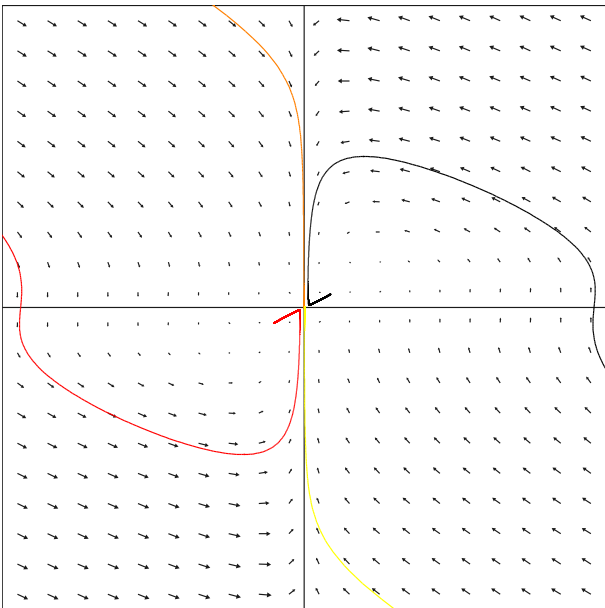
$$\dot{y} = x + xy^2 - y$$



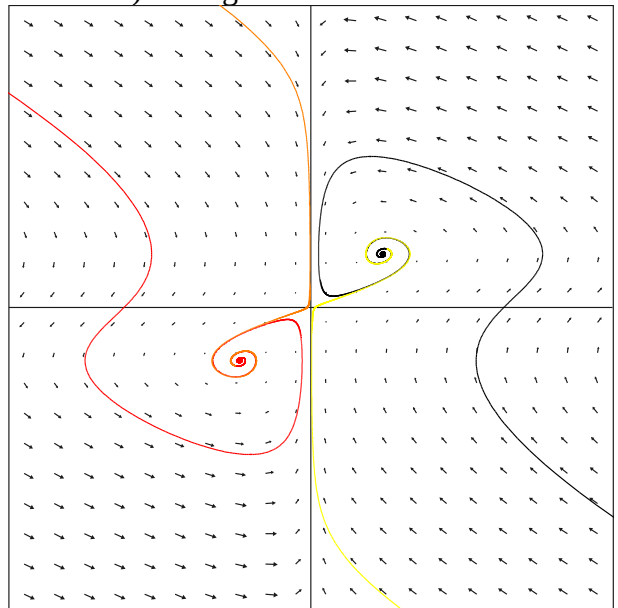
$a=0,9$: egy stabil csomó az origóban



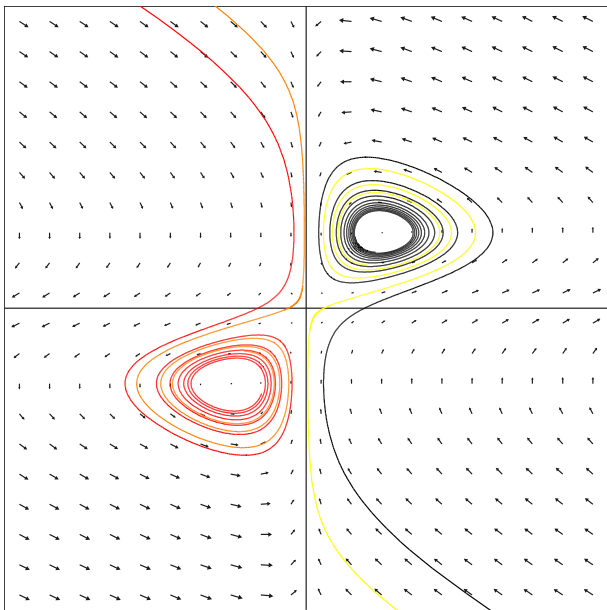
$a=1$: vasvilla bifurkáció, degenerált fixpont (most stabil csomó) az origóban



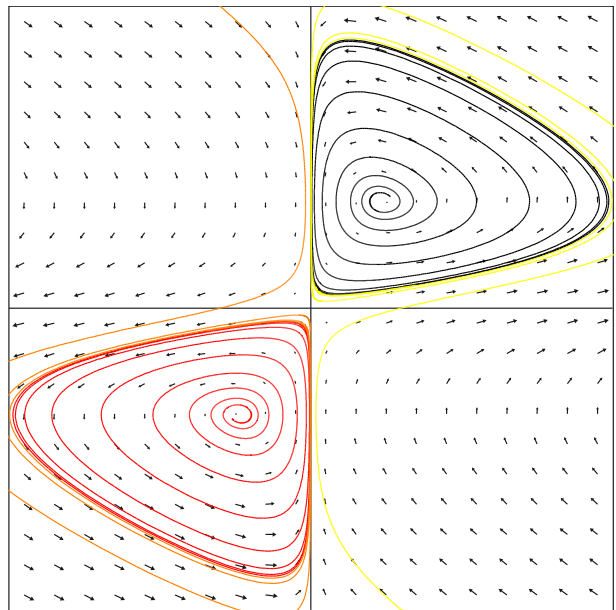
$a=1,05$: nyereg az origóban, két stabil csomó az I. és III. negyedekben



$a=1,5$: nyereg az origóban, két stabil fókusz az I. és III. negyedekben



$\alpha=2$: Hopf-bifurkáció a két stabil fókusznál, egy nyereg az origóban



$\alpha=3$: két határciklus, belsejükben egy-egy instabil fókusszal, egy nyereg az origóban

Globális bifurkációk

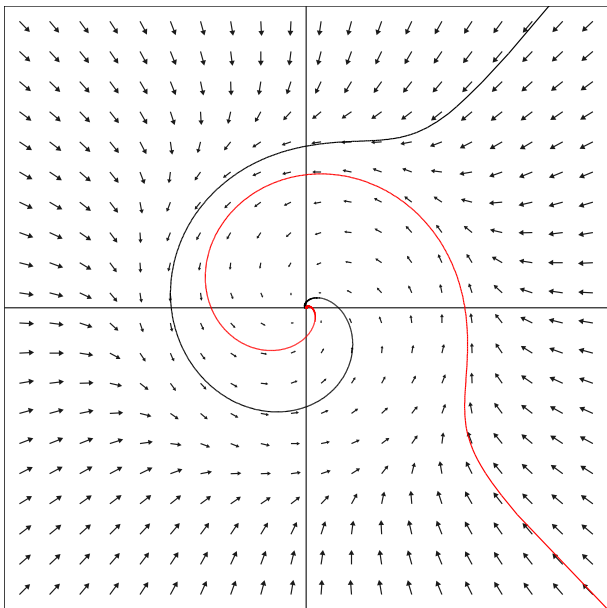
Kettőshurok / kancsófül / jug handle / periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációja

$$\dot{r} = ar + r^3 - 0,25r, \text{ Descartes koordinátákban:}$$

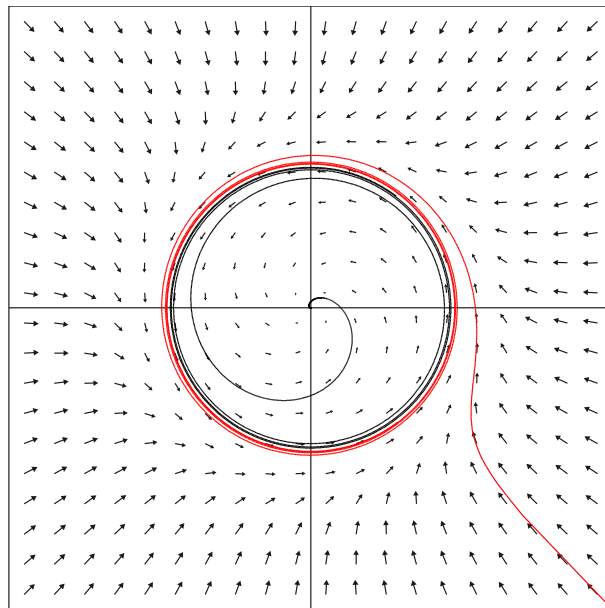
$$\dot{\phi} = 1$$

$$\dot{x} = ax - y + x(x^2 + y^2) - 0,25x(x^2 + y^2)^2$$

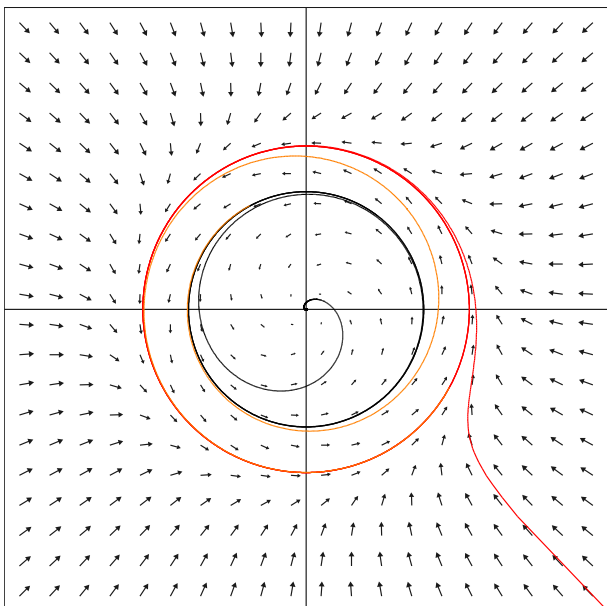
$$\dot{y} = ay + x + y(x^2 + y^2) - 0,25y(x^2 + y^2)^2$$



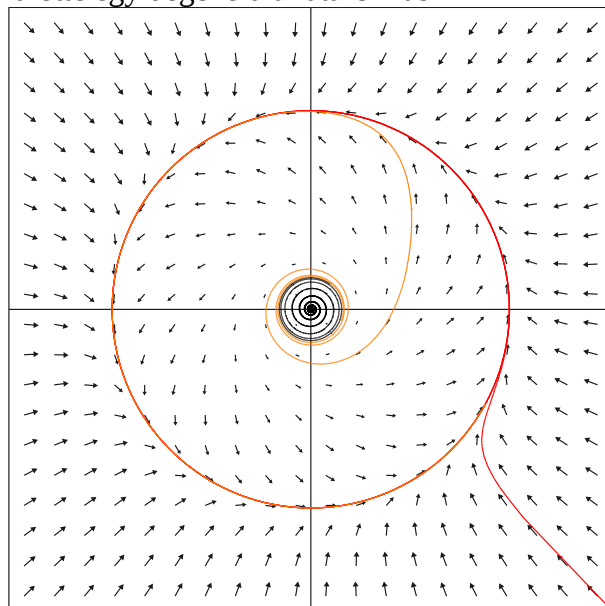
$a = -1, 1$: stabil fókusz



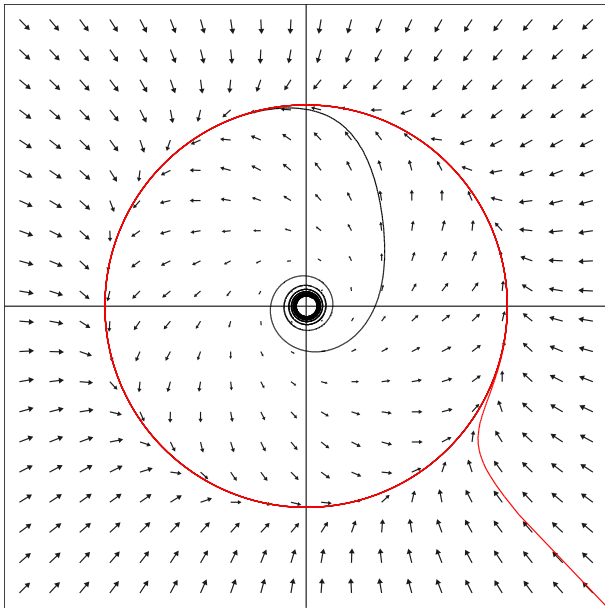
$a = -1$: kettőshurok bifurkáció: stabil fókusz, és körülötte egy degenerált határciklus



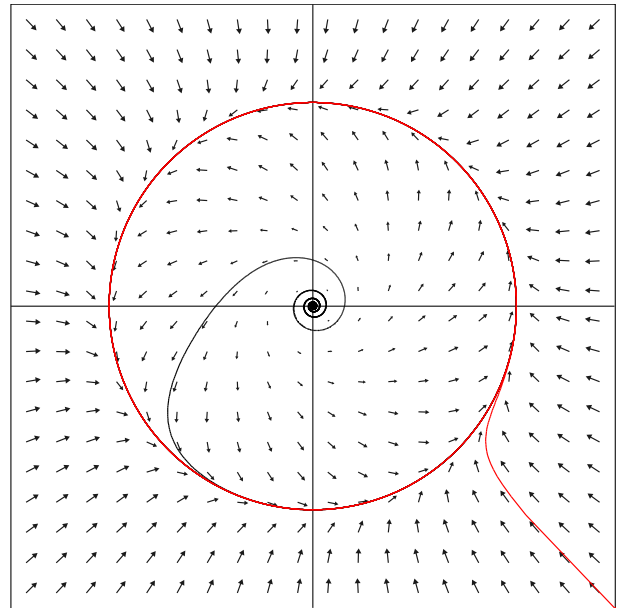
$a = -0, 9$: stabil fókusz, körülötte instabil határciklus, körülötte stabil határciklus



$a = -0, 1$: stabil fókusz, körülötte instabil határciklus, körülötte stabil határciklus



$\alpha=0$: szubkritikus Hopf-bifurkáció (degenerált instabil fókusz), körülötte stabil határciklus

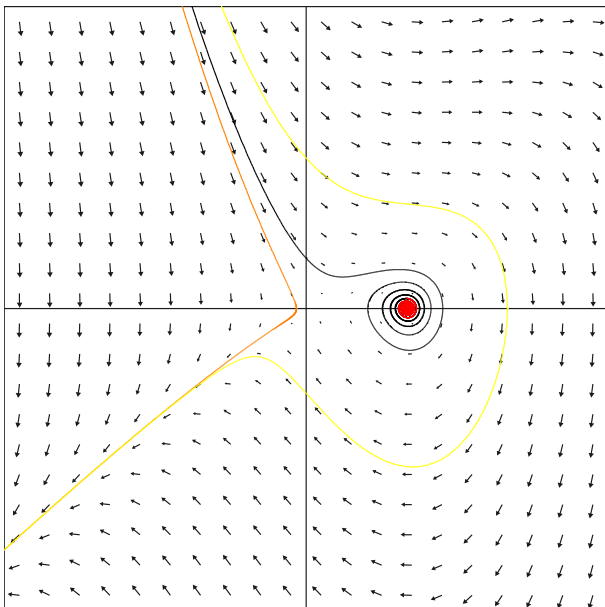


$\alpha=0,1$: instabil fókusz, körülötte stabil határciklus

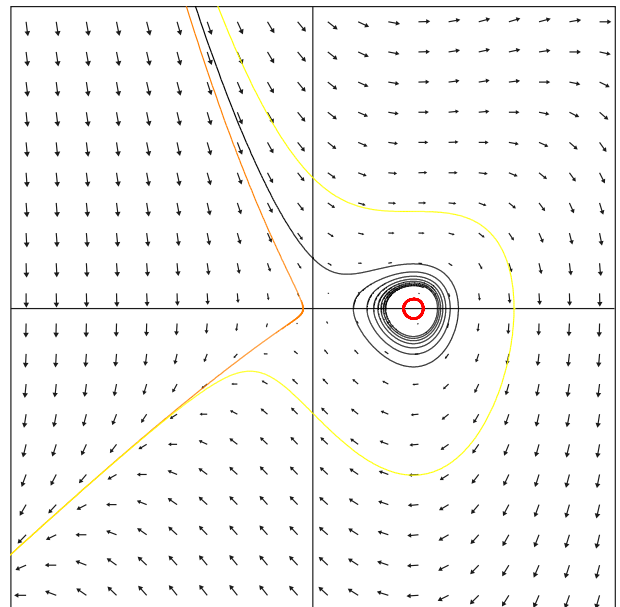
Nyereg-hurok (saddle-loop) bifurkáció

$$\dot{x} = y$$

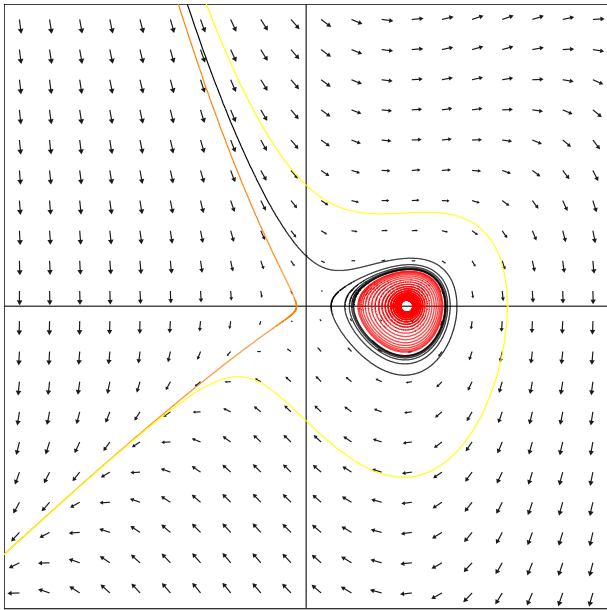
$$\dot{y} = ay + x - x^2 + xy$$



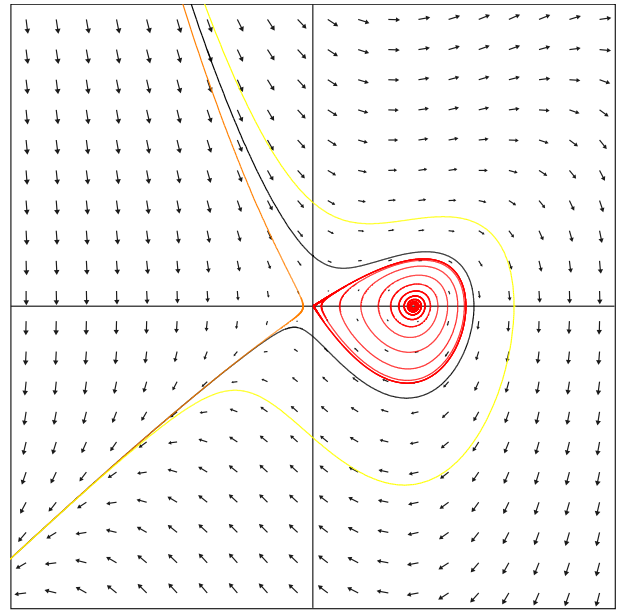
$\alpha=-1,1$: nyereg és stabil fókusz



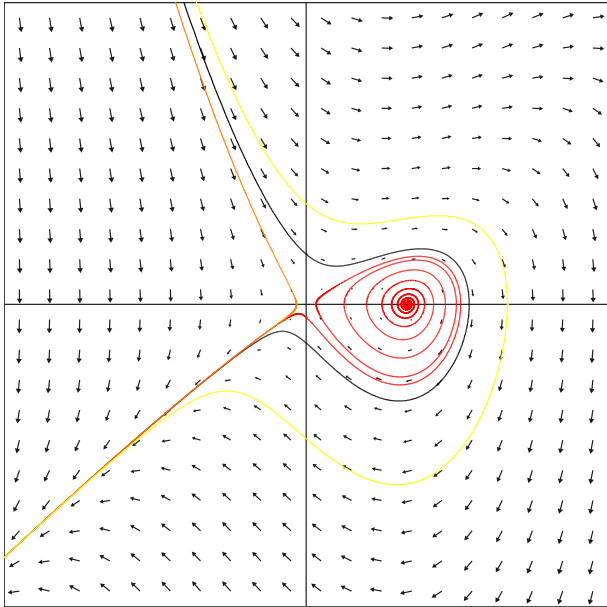
$\alpha=-1$: nyereg és szuperkritikus Hopf-bifurkáció a stabil fókuszban



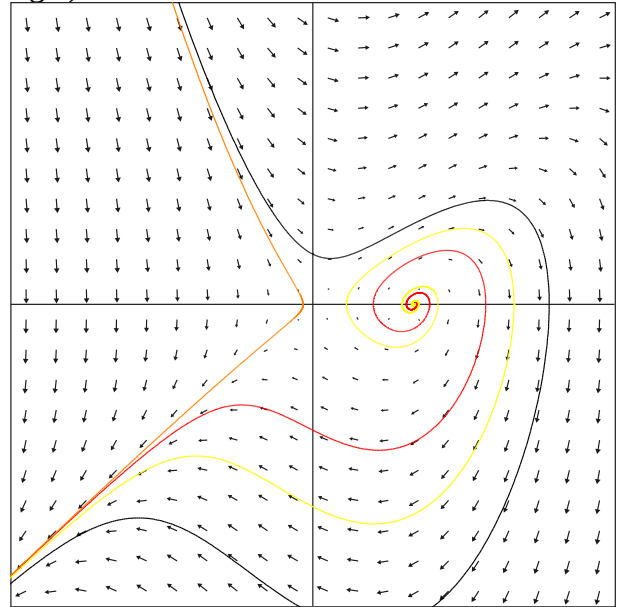
$a=-0,95$: nyereg és stabil határciklus a belsejében egy instabil fókusszal



$a=-0,8646$: nyereg-hurok bifurkáció, nyereg, homoklinikus pálya (a határciklus megérinti a nyeret) és instabil fókusz



$a=-0,85$: nyereg és instabil fókusz

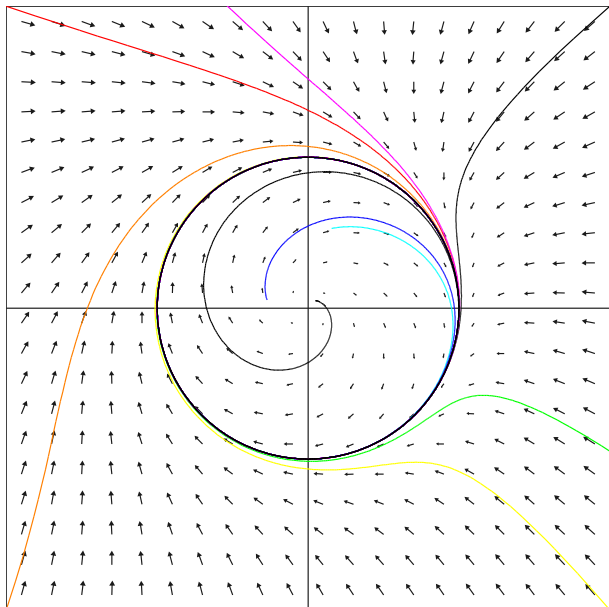


$a=-0,5$: nyereg és instabil fókusz

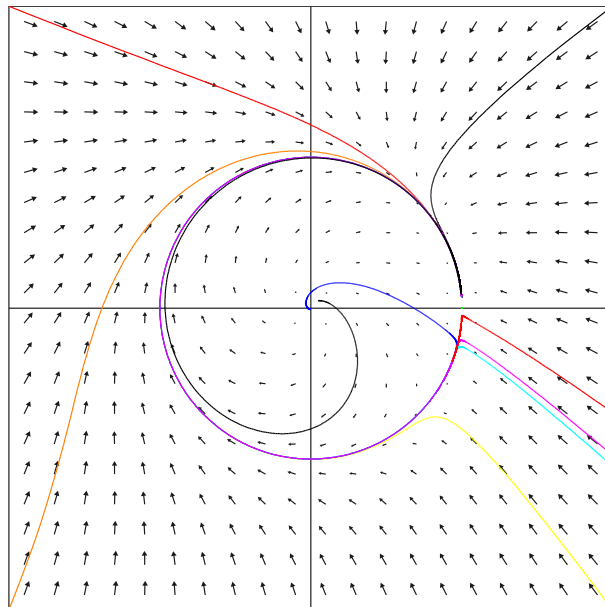
Nyereg-csomó-hurok (SNIPER=saddle-node infinite period) bifurkáció

$$\dot{r} = r - r^3, \text{ Descartes koordinátákban: } \dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - (a+x)y$$

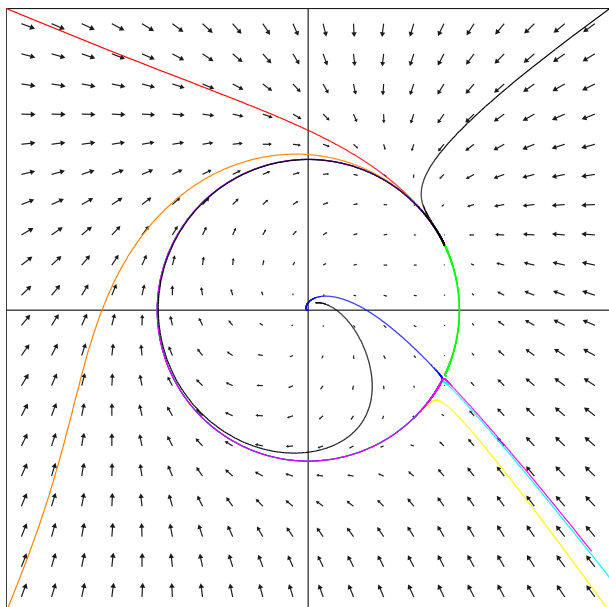
$$\dot{\phi} = a + \cos \phi \quad \dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) + (a+x)x$$



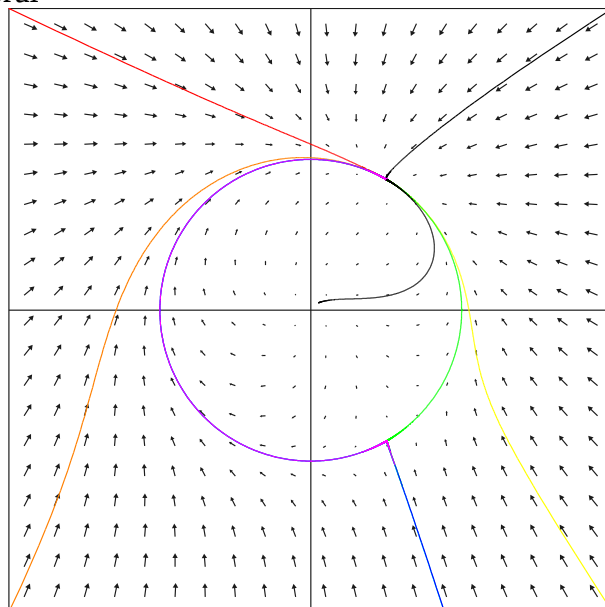
$a = -1,5$: stabil határciklus egy instabil fókusz körül, negatív forgásirány



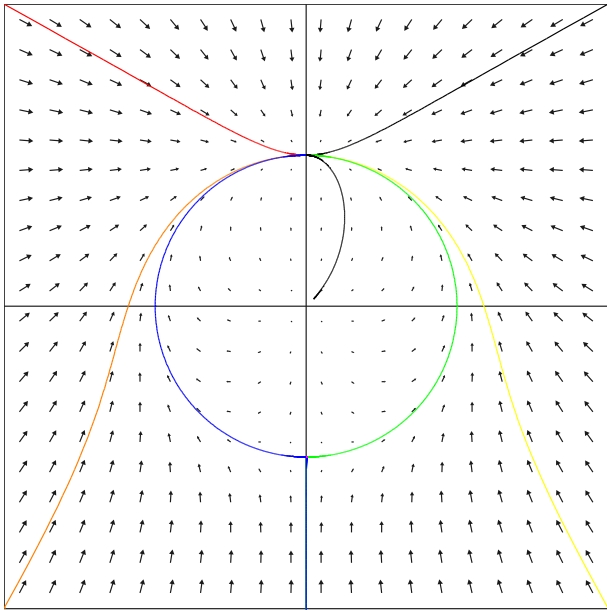
$a = -1$: SNIPER bifurkáció, azaz 0° -nál megjelenik egy nyereg-csomó, a határciklus helyett egy kör alakú homoklinikus pálya van az instabil fókusz körül



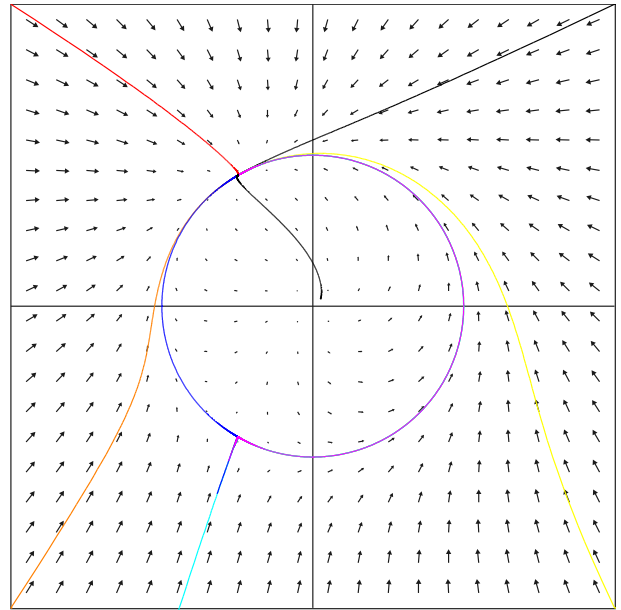
$a = -0,9$: középen egy instabil fókusz, felül egy stabil csomó, alul egy nyeregpont. A körvonalat két heteroklinikus pálya rajzolja ki.



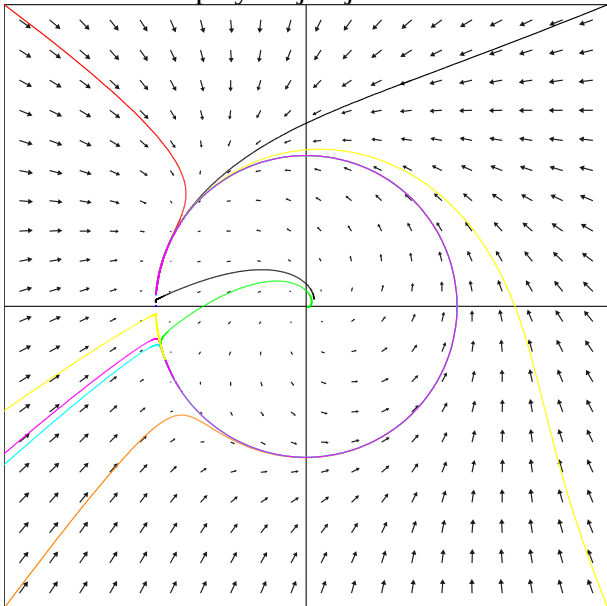
$a = -0,5$: középen egy instabil fókusz, felül egy stabil csomó, alul egy nyeregpont. A körvonalat két heteroklinikus pálya rajzolja ki.



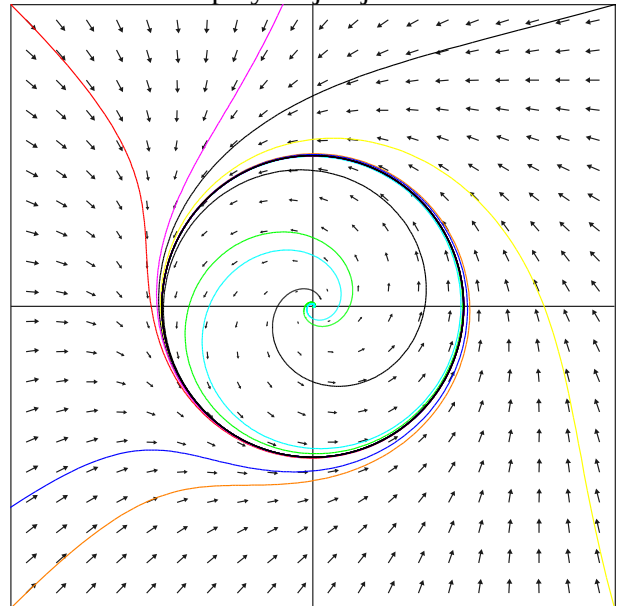
$\alpha=0$: középen egy instabil fókusz, felül egy stabil csomó, alul egy nyeregpont. A körvonalat két heteroklinikus pálya rajzolja ki.



$\alpha=0,5$: középen egy instabil fókusz, felül egy stabil csomó, alul egy nyeregpont. A körvonalat két heteroklinikus pálya rajzolja ki.



$\alpha=1$: SNIPER bifurkáció, azaz 180° -nál megjelenik egy nyereg-csomó, a határciklus helyett egy kör alakú homoklinikus pálya van az instabil fókusz körül



$\alpha=2$: stabil határciklus egy instabil fókusz körül, pozitív forgásirány