DINAMIKAI RENDSZEREK

Gyakorló feladatok

1.) Egy skaláris differenciálegyenlet az alábbi alakú:

$$\dot{x} = (\mu - x^2)\cdot x \cdot (x-1) \quad ,$$

ahol μ egy paraméter.
a) Adjuk meg a μ=0,25 paraméterértéknél a stacionárius pontok helyét és stabilitását! (Indokoljuk a választ!)
b) Milyen bifurkációk fordulnak elő a μ paraméterérték változása során? Szerkesszünk $x_s=x_s(\mu)$ (x_s: x stacionárius értéke) megoldásdiagramot a válasz indoklására! (Stabil stacionárius pont: folytonos vonal, instabil stacionárius pont: szaggatott vonal)

2.) Egy skaláris differenciálegyenlet két paramétertől függ:

$$\dot{x} = \mu_1 x - x^2 + \mu_2$$

a) Milyen bifurkáció fordul elő μ_1 függvényében, ha μ_2=0? Rajzoljuk fel az $x_s=x_s(\mu_1)$ megoldásdiagramot! Indokoljuk a rajzot!
b) Milyen bifurkáció fordul elő μ_2 függvényében, ha μ_1=0? Rajzoljuk fel az $x_s=x_s(\mu_2)$ megoldásdiagramot! Indokoljuk a rajzot!
c) Rajzoljuk fel a μ_1, μ_2 paramétersíkon a bifurkációk helyét megadó görbét! Indokoljuk a rajzot!
*d) Ha az előbbi paramétersíkon a $\mu_2 = \frac{\mu_1}{2} + \frac{1}{4}$ egyenes mentén haladunk, akkor milyen bifurkációt figyelhetünk meg? (Indoklással!)

3.) Tekintsük az alábbi kétváltozós elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel megadott, ún. Van der Pol-oszcillátort!

$$\dot{x} = \mu x - \frac{x^3}{3} + y$$
$$\dot{y} = -\omega_0^2 x$$

a) Lineáris rendben vizsgáljuk meg, hogy a μ paraméter értékét változtatva hogyan változik a stacionárius pont típusa?

b) Bebizonyítható, hogy negatív μ értékekre a stacionárius pont globális attraktor (medencéje az egész x - y sík). Erre támaszkodva indokoljuk, hogy milyen bifurkáció jön létre a μ=0 paraméterértéknél!

*c) Bizonyítsuk be, hogy negatív μ értékekre a stacionárius pont globális attraktor!

Próbálkozzunk a

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(\omega_0^2 x^2 + y^2)$$

elliptikus szintfelületeket adó Ljapunov-függvénnyel!

4.) A következő néhány feladat polárkoordinátás szorzatrendszerekkel foglalkozik:
a)

$$\dot{r} = \mu r - r^3$$
$$\dot{\phi} = 1$$

Rajzoljuk fel a fázisportrét (csak kvalitatívan) a μ=-1, μ=0 és μ=1 esetekben! Milyen bifurkáció történik a μ=0-nál? Rajzoljuk fel az $r_s = r_s(\mu)$ megoldásdiagramot is!
b)

$$\dot{r} = -4r + \mu r^3 - r^5$$
$$\dot{\phi} = 1$$

Rajzoljuk fel a kvalitatív fázisportrét a μ=0 és μ=5 esetekben! Milyen bifurkáció történik a két érték között? Rajzoljuk fel az $r_s = r_s(\mu)$ megoldásdiagramot is!

c)

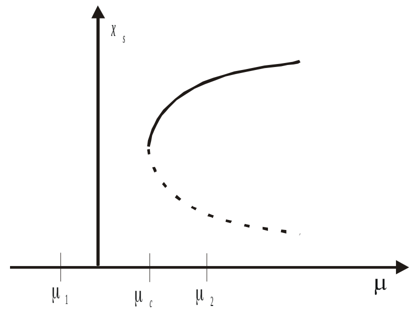
$$\dot{r} = 4r - r^3$$
$$\phi = 1 - \mu \sin \phi$$

Rajzoljuk fel a kvalitatív fázisportrét a μ=0,97; μ=1 és μ=1,03 esetekben! Milyen bifurkáció történik μ=1-nél?

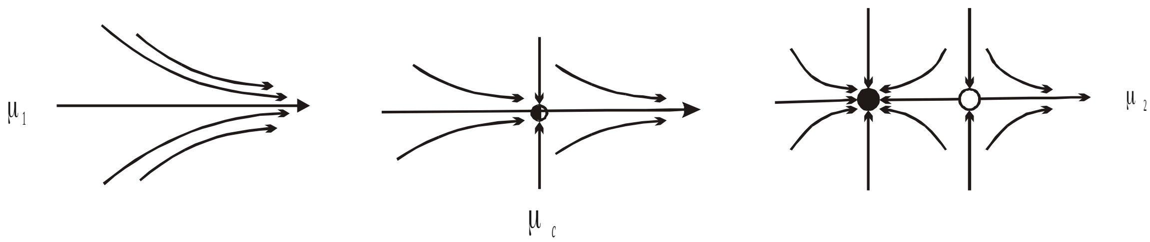
5.) Bifurkációs diagram – fázisportré sorozat gyakorlat. Itt a bifurkációs diagram magyarázatára fázisportré-sorozatot szerkesztünk. μ_1: paraméterérték a kritikus μ_c alatt; μ_c: kritikus érték; μ_2: paraméterérték a kritikus μ_c felett.

Példák:

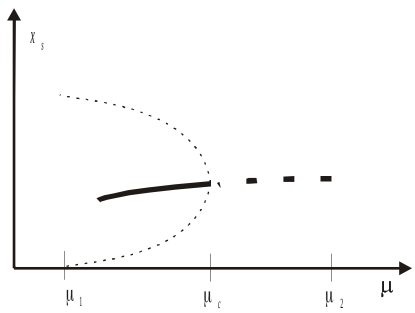
I. Nyereg-csomó bifurkáció



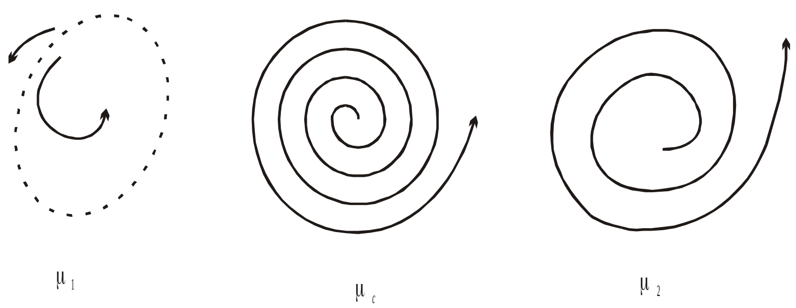
Fázisportré-sorozat:



II. Szubkritikus Hopf-bifurkáció



Fázisportré sorozat:



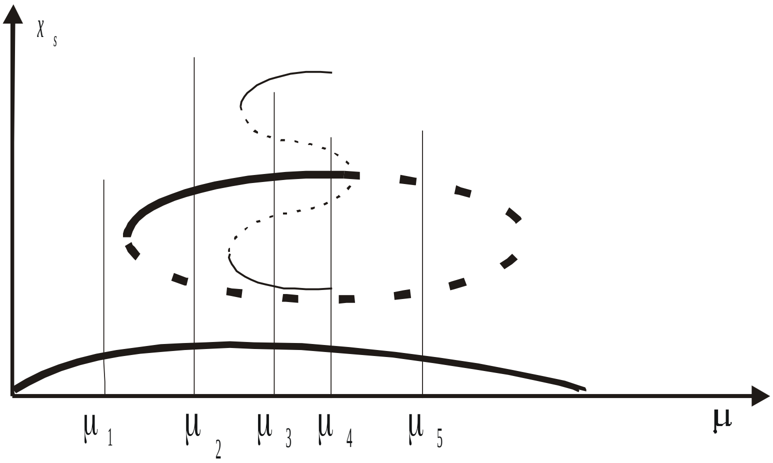
Feladatok:

i) Mondjuk meg, hogy az alábbi megoldásdiagramon milyen bifurkációk fordulnak elő!

ii) Minden, az ábrán jelölt μ értékhez adjuk meg a fázisportrét! (A fázissíkon vagyunk.)

A megoldásdiagramokon vastag vonallal a stacionárius pontokat, vékony vonallal a periodikus pályákat jelöljük.

Folytonos vonal a stabil, szaggatott vonal az instabil stacionárius pont, ill. periodikus pálya.



6.) Tekintsük az alábbi „sátortető” leképezést a [0; 1] intervallumban:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2{,}5 \cdot \mu \cdot x_n & ha\, 0 \le x_n \le 0{,}4 \\ \mu & ha\, 0{,}4 < x_n < 0{,}6 \\ 2{,}5 \cdot \mu \cdot (1 - x_n) & ha\, 0{,}6 \le x_n \le 1 \end{cases}$$

ahol μ egy paraméter.

a) Rajzoljuk le a leképezést a μ=0,2 ; 0,4 ; 0,8 és 0,9 értékeknél!

b) Adjuk meg a dinamikai rendszer stacionárius állapotait ugyanezekben az esetekben (indoklással)! Néhány szóval jellemezzük is a rendszer dinamikai viselkedését mind a négy esetben!

7.) Tekintsük az alábbi leképezést a valós számok halmazán:

$$x_{n+1} = x_n + \mu - x_n^2$$

ahol μ egy paraméter.

a) Adjuk meg a rendszer fixpontjait a μ paraméter függvényében!

b) Vizsgáljuk meg ezek stabilitását μ függvényében!

c) Milyen bifurkáció történik μ=0 esetén?

d) Milyen bifurkáció történik μ=1 esetén? Igazoljuk is, hogy tényleg ez a bifurkáció történik.

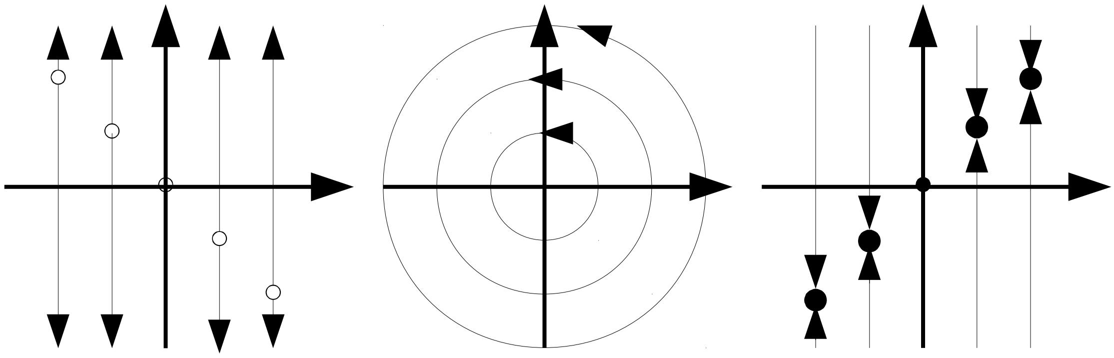
e) Mi lesz a leképezés stacionárius állapota μ=1,1 esetén, ha tudjuk, hogy μ=1 és 1,1 között nem történik újabb bifurkáció?

8.) Egy kétváltozós lineáris differenciálegyenlet-rendszer A együtthatómátrixa az alábbi alakú:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\mu \\ 1 & \cos\mu \end{bmatrix}$$

ahol μ egy paraméter.

a) Határozzuk meg, hogy milyen μ értéknél láthatók az alábbi fázisportrék:



a1) a2) a3)

b) Határozzuk meg a sajátértékeket és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat a $\mu = -\pi/2$ paraméterértéknél, és ennek alapján rajzoljuk fel a kvalitatív fázisportrét!

Rajzos elméleti kérdések:

Az ábrákon a tengelyek és a görbék mellé írjuk oda, hogy mit jelölnek, és hogy melyik feladat megoldásának szántuk!

9.) Transzkritikus bifurkáció

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2$$

9.1 ábra: Három x vs. $f(x)$ diagram a) $\mu<0$, b) $\mu=0$ és c) $\mu>0$ értékekre.
9.2 ábra μ-x_s diagram (megoldásdiagram).

10.) Vasvilla bifurkáció perturbációja

$$\frac{dx}{dt} = \mu_1 x - x^3 + \mu_2$$

10.1 ábra Megoldásdiagram $\mu_2>0$ és $\mu_2<0$ esetén
10.2 ábra μ_1-μ_2 bifurkációs diagram. (A bifurkáció helye a μ_1-μ_2 koordinátarendszerben.)

11.) a) Rajzoljuk fel a Tr-Det diagramot és írjuk be az egyes tartományokba, illetve határvonalakra, hogy a stacionáris pont milyen jellegű (pl. Stabil csomó, instabil fókusz, stb.)!
b) Milyen fázisportré felel meg a Tr-Det diagram origójának?

12.) a) A $\begin{bmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{bmatrix}$ lineáris rendszer fázisportréi $\lambda<0$, $\lambda=0$ és $\lambda>0$ esetén.
b) A fenti lineáris rendszer megoldásdiagramja λ függvényében.

13.) A szubkritikus Hopf-bifurkáció polárkoordinátás normálalakja:

$$\frac{dr}{dt} = \mu r + r^3$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega$$

13.1 ábra: fázisportrék $\mu<0$, $\mu=0$ és $\mu>0$ esetén.
13.2 ábra: μ - r_S megoldásdiagram.

14.) Jelöljük be az alábbi fázisportrékon a rajtuk található attraktort vagy attraktorokat, adjuk meg a típusukat is! Ha látható az ábrán, jelöljük az attraktor(ok) vonzási tartományának határát is!