

# DINAMIKAI RENDSZEREK

## Gyakorló feladatok

1.) Egy skaláris differenciálegyenlet az alábbi alakú:

$$\dot{x} = (\mu - x^2) \cdot x \cdot (x - 1) ,$$

ahol  $\mu$  egy paraméter.

a) Adjuk meg a  $\mu=0,25$  paraméterértéknél a stacionárius pontok helyét és stabilitását! (Indokoljuk a választ!)

b) Milyen bifurkációk fordulnak elő a  $\mu$  paraméterérték változása során? Szerkesszünk  $x_s = x_s(\mu)$  ( $x_s$ :  $x$  stacionárius értéke) megoldásdiagramot a válasz indoklására! (Stabil stacionárius pont: folytonos vonal, instabil stacionárius pont: szaggatott vonal)

2.) Egy skaláris differenciálegyenlet két paramétertől függ:

$$\dot{x} = \mu_1 x - x^2 + \mu_2$$

a) Milyen bifurkáció fordul elő  $\mu_1$  függvényében, ha  $\mu_2=0$ ? Rajzoljuk fel az  $x_s = x_s(\mu_1)$  megoldásdiagramot! Indokoljuk a rajzot!

b) Milyen bifurkáció fordul elő  $\mu_2$  függvényében, ha  $\mu_1=0$ ? Rajzoljuk fel az  $x_s = x_s(\mu_2)$  megoldásdiagramot! Indokoljuk a rajzot!

c) Rajzoljuk fel a  $\mu_1, \mu_2$  paramétersíkon a bifurkációk helyét megadó görbét! Indokoljuk a rajzot!

\*d) Ha az előbbi paramétersíkon a  $\mu_2 = \frac{\mu_1}{2} + \frac{1}{4}$  egyenes mentén haladunk, akkor milyen bifurkációt figyelhetünk meg? (Indoklással!)

3.) Tekintsük az alábbi kétváltozós elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel megadott, un. Van der Pol-oszcillátort!

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - \frac{x^3}{3} + y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x \end{aligned}$$

a) Lineáris rendben vizsgáljuk meg, hogy a  $\mu$  paraméter értékét változtatva hogyan változik a stacionárius pont típusa?

b) Bebizonyítható, hogy negatív  $\mu$  értékekre a stacionárius pont globális attraktor (medencéje az egész  $x - y$  sík). Erre támaszkodva indokoljuk, hogy milyen bifurkáció jön létre a  $\mu=0$  paraméterértéknél!

\*c) Bizonyítsuk be, hogy negatív  $\mu$  értékekre a stacionárius pont globális attraktor!

Próbálkozzunk a

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(\omega_0^2 x^2 + y^2)$$

elliptikus szintfelületeket adó Ljapunov-függvényvel!

4.) A következő néhány feladat polárkoordinátás szorzatrendszerekkel foglalkozik:

a)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r - r^3 \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned}$$

Rajzoljuk fel a fázisportrét (csak kvalitatívan) a  $\mu=-1, \mu=0$  és  $\mu=1$  esetekben! Milyen bifurkáció történik a  $\mu=0$ -nál? Rajzoljuk fel az  $r_s = r_s(\mu)$  megoldásdiagramot is!

b)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -4r + \mu r^3 - r^5 \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned}$$

Rajzoljuk fel a kvalitatív fázisportrét a  $\mu=0$  és  $\mu=5$  esetekben! Milyen bifurkáció történik a két érték között? Rajzoljuk fel az  $r_s = r_s(\mu)$  megoldásdiagramot is!

c)

$$\dot{r} = 4r - r^3$$

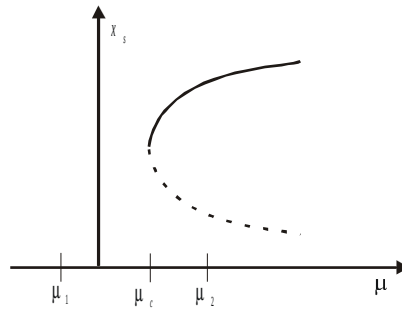
$$\dot{\varphi} = 1 - \mu \sin \varphi$$

Rajzoljuk fel a kvalitatív fázisportrét a  $\mu=0,97$ ;  $\mu=1$  és  $\mu=1,03$  esetekben! Milyen bifurkáció történik  $\mu=1$ -nél?

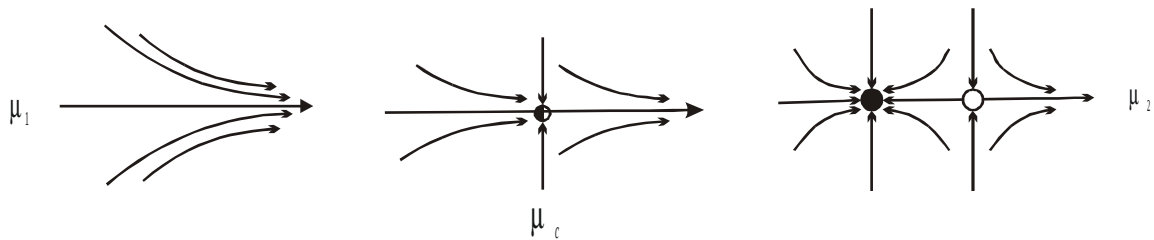
5.) Bifurkációs diagram – fázisportré sorozat gyakorlat. Itt a bifurkációs diagram magyarázatára fázisportré-sorozatot szerkesztünk.  $\mu_1$ : paraméterérték a kritikus  $\mu_c$  alatt;  $\mu_c$ : kritikus érték;  $\mu_2$ : paraméterérték a kritikus  $\mu_c$  felett.

Példák:

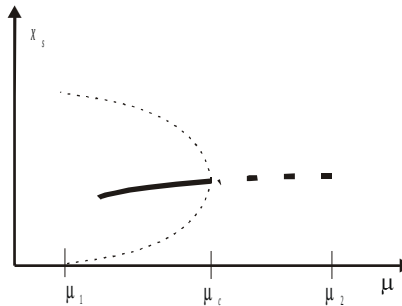
I. Nyereg-csomó bifurkáció



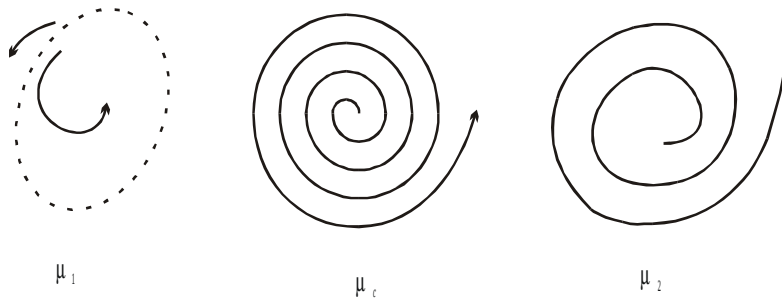
Fázisportré-sorozat:



II. Szubkritikus Hopf-bifurkáció



Fázisportré sorozat:



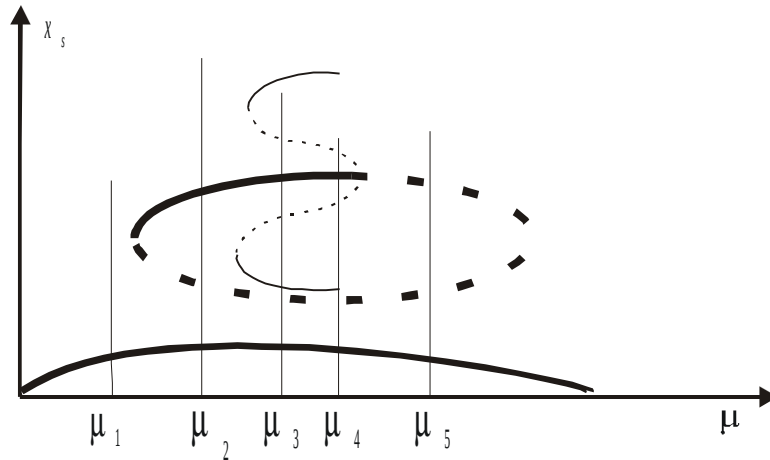
Feladatok:

i) Mondjuk meg, hogy az alábbi megoldásdiagramon milyen bifurkációk fordulnak elő!

ii) Minden, az ábrán jelölt  $\mu$  értékhez adjuk meg a fázisportrét! (A fázissíkon vagyunk.)

A megoldásdiagramokon vastag vonallal a stacionárius pontokat, vékony vonallal a periodikus pályákat jelöljük.

Folytonos vonal a stabil, szaggatott vonal az instabil stacionárius pont, ill. periodikus pálya.



6.) Tekintsük az alábbi „sátortető” leképezést a  $[0; 1]$  intervallumban:

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2,5 \cdot \mu \cdot x_n & \text{ha } 0 \leq x_n \leq 0,4 \\ \mu & \text{ha } 0,4 < x_n < 0,6 \\ 2,5 \cdot \mu \cdot (1 - x_n) & \text{ha } 0,6 \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$

ahol  $\mu$  egy paraméter.

a) Rajzoljuk le a leképezést a  $\mu=0,2$ ;  $0,4$ ;  $0,8$  és  $0,9$  értékeknél!

b) Adjuk meg a dinamikai rendszer stacionárius állapotait ugyanezekben az esetekben (indoklással)! Néhány szóval jellemezzük is a rendszer dinamikai viselkedését mind a négy esetben!

7.) Tekintsük az alábbi leképezést az egész számok halmazán:

$$x_{n+1} = x_n + \mu - x_n^2$$

ahol  $\mu$  egy paraméter.

a) Adjuk meg a rendszer fixpontjait a  $\mu$  paraméter függvényében!

b) Vizsgáljuk meg ezek stabilitását  $\mu$  függvényében!

c) Milyen bifurkáció történik  $\mu=0$  esetén?

d) Milyen bifurkáció történik  $\mu=1$  esetén? Igazoljuk is, hogy tényleg ez a bifurkáció történik.

e) Mi lesz a leképezés stacionárius állapota  $\mu=1,1$  esetén, ha tudjuk, hogy  $\mu=1$  és  $1,1$  között nem történik újabb bifurkáció?

### Rajzos elméleti kérdések:

Az ábrákon a tengelyek és a görbék mellé írjuk oda, hogy mit jelölnek, és hogy melyik feladat megoldásának szántuk!

8.) Transzkritikus bifurkáció

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2$$

8.1 ábra: Három  $x$  vs.  $f(x)$  diagram a)  $\mu < 0$ , b)  $\mu = 0$  és c)  $\mu > 0$  értékekre.

8.2 ábra  $\mu$ - $x_s$  diagram (megoldásdiagram).

9.) Vasvilla bifurkáció perturbációja

$$\frac{dx}{dt} = \mu_1 x - x^3 + \mu_2$$

9.1 ábra Megoldásdiagram  $\mu_2 > 0$  és  $\mu_2 < 0$  esetén

9.2 ábra  $\mu_1 - \mu_2$  bifurkációs diagram. (A bifurkáció helye a  $\mu_1 - \mu_2$  koordinátarendszerben.)

**10.)** a) Rajzoljuk fel a Tr-Det diagramot és írjuk be az egyes tartományokba, illetve határvonalakra, hogy a stacionáris pont milyen jellegű (pl. Stabil csomó, instabil fókusz, stb.)!

b) Milyen fázisportré felel meg a Tr-Det diagram origójának?

**11.)** a) A  $\begin{bmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{bmatrix}$  lineáris rendszer fázisportréi  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  és  $\lambda > 0$  esetén.

b) A fenti lineáris rendszer megoldásdiagramja  $\lambda$  függvényében.

**12.)** A szubkritikus Hopf-bifurkáció polárkoordinátás normálalakja:

$$\frac{dr}{dt} = \mu r + r^3$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

12.1 ábra: fázisportrék  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$  és  $\mu > 0$  esetén.

12.2 ábra:  $\mu - r_s$  megoldásdiagram.

**Bónusz-kérdés:**



Látott már valaki ilyen karaktert? A  $\mu$ -ből lett betűtípus váltásnál :)