Mechanika

Készülő jegyzet a Fizika K1A tárgyhoz

Írja: Wittmann Marian
Farkas Henrik† régi jegyzetét átdolgozva és kiegészítve

A jegyzet csak most készül, ez nem végleges változat.
Észrevételeket, hibajelzéseket köszönettel fogadunk:
wittmann@eik.bme.hu

A jegyzet hivatkozik az alábbi jegyzetre:
[*FA*]: Farkas Henrik – Wittmann Marian: Fizikai alapismeretek (Műegyetemi Kiadó, 60947)

TARTALOM

1. BEVEZETÉS A FIZIKÁBA

Előismeret: az SI rendszer alapmennyiségei és az ismertebb származtatott mennyiségek. Alapmértékegységek. Radián, szteradián. Prefixumok. Vektoralgebra.

1.1. A fizikai elmélet struktúrája, jellegzetességei

A fizikai elmélet szerkezete. A fizikai állítás igazsága. Modell. Klasszikus fizika, relativitáselmélet, kvantumfizika.

A fizika természeti jelenségekkel foglalkozik, a természettudomány egyik ága.

A fizika kiterjedten használja a matematika apparátusát. Különösen áll ez az elméleti fizikára, amelynek struktúrája is a matematikai példát követi. Így egy fizikai elméletben mindenekelőtt bevezetünk alapfogalmakat és alaptételeket, ez utóbbiakat posztulátumoknak, vagy ha az adott területen különösen fontosak és átfogóak, általános érvényűek, akkor *axiómáknak* nevezzük. Az alapfogalmak segítségével *definíciók* révén bevezethetünk újabb fogalmakat, és ezekre állításokat, *tételeket* mondhatunk ki. A tételeket logikai úton kell az axiómákból, posztulátumokból levezetni (*bizonyítás*).

Egy fizikai állítás mindig csak meghatározott modellekre mondható ki. A *modell* a valóság leegyszerűsített, csak a lényegesnek tartott sajátságokra szorítkozó képe. Így például a *merev test* egy olyan ideális test, amelynek pontjai egymástól mindig ugyanolyan távol maradnak, mozgás közben a pontok távolsága nem változik. A merev test sokszor jó közelítéssel leírja a szilárd halmazállapotú testek viselkedését.

A fizikai állítás *igaz*, ha az axiómákból logikai úton levezethető. Ritkán fordulnak elő, de annál nagyobb jelentőségűek azok a hiteles, megbízható kísérletek, amelyek az adott időben elfogadott axiómákkal ellentmondásban álló eredményt produkálnak. Ekkor új fizikai elmélet születik új axiómákkal. A régi elmélet gyakran ugyancsak használható marad, de csak bizonyos határokon belül.

Egyik legnevezetesebb példa a XIX. szd. végén elvégzett *Michelson*-kísérlet, amelyben a fény sebességét mérték a Földön különböző irányokban. A Föld mozog, a mérés olyan pontos volt, hogy ennek a mozgásnak a hatását észlelni kellett volna, de a fény sebessége mégis irány-függetlennek bizonyult. A kísérlet nyomán a térről és időről való klasszikus fogalmakat át kellett értékelni, és megszületett az új axiómákon nyugvó *relativitáselmélet*. Az új elmélet azonban nem váltotta fel a klasszikus fizikát, csak annak érvényességi köre korlátozódott a fénysebességhez képest kicsi sebességek és nem túl erős gravitációs terek esetére.

A relativisztikus fizikát akkor kell alkalmazni, ha a sebességek nagyok (a fénysebességhez képest nem elhanyagolhatók), vagy ha a gyorsulások illetve gravitációs térerősségek nagyon jelentősek.

A klasszikus fizika általában nem alkalmazható atomi, molekuláris méretű testekre sem, ekkor kvantumfizikát kell használni. A relativitáselmélet és a kvantumfizika megjelenése a fizikában forradalmi, gyökeres változást hozott a XX. század elején.

1.2. Fizikai mennyiségek

Fizikai mennyiség, mérőszám, mértékegység. Dimenzió, dimenzióanalízis. Mérés, mérési hiba. Szabványok, SI. Alapmennyiségek, származtatott mennyiségek. A méter, kilogramm és szekundum története. Skalárok, vektorok, tenzorok. Állandók a fizikában.

A fizikai állításokat leggyakrabban a fizikai mennyiségek közötti összefüggések alakjában fogalmazzuk meg. Bármely fizikai mennyiség (A) egy mértékegységnek ([A]) és egy mérőszámnak ({A}) a szorzata:

$A = \{A\} \cdot [A]$.

Azokról a fizikai mennyiségekről, amelyeket azonos mértékegységgel is kifejezhetünk, azt mondjuk, hogy *dimenziójuk* azonos. Két azonos dimenziójú fizikai mennyiség hányadosa *dimenziótlan*. A fizikai mennyiségek közötti összefüggéseknél a dimenzió igen fontos, a formuláknak, egyenleteknek dimenzionálisan is korrektnek kell lenni. Hatványkitevő, illetve a szögfüggvények független változója csak dimenziótlan mennyiség lehet. A fizikai mennyiségek dimenziójára vonatkozó megfontolásokat alkalmazza a hasonlóságelmélet és a dimenzióanalízis.

Példa: a matematikai inga lengésideje. Első lépésként számba vesszük, hogy a T lengésidőt milyen adatok határozhatják meg. Szóba jöhető adatok: a fonál hossza (l), az inga tömege (m), a gravitációs térerősség (g), a maximális szögkitérés (ϕ). Tételezzük fel tehát, hogy

$T = f(l,m,g,\phi)$

További lépésként feltételezzük, hogy az egyes mennyiségektől függő tényezők szorzataként áll elő f, és az első három tényező hatványfüggvény:

$T = l^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma} F(\phi)$

A dimenzióanalízis segítségével az ismeretlen kitevőket oly módon határozzuk meg, hogy az egyenletben a mennyiségeket kifejezzük az alapmértékegységeikkel. Jelen esetben, mivel ϕ dimenziótlan, ezért az F függvényre nem jön ki korlátozás, teljesülni kell viszont az alábbinak:

$s = m^{\alpha} kg^{\beta} (m/s^2)^{\gamma}$

Ez akkor teljesül, ha $\beta=0$, $\alpha+\gamma=0$, $1=-2\gamma$. A lengésidőre tehát a következőt kapjuk:

$T = F(\phi)\ (l/g)^{1/2}$

A dimenzióanalízisből nem jön ki, de ismert [*FA*], hogy kis ϕ esetén $F(\phi) = 2\pi$.

Egy fizikai mennyiség akkor jól definiált, ha megadható a mérésére vonatkozó *mérési utasítás*. Adott mértékegység esetén egy konkrét fizikai mennyiség mérőszámát méréssel határozhatjuk meg. Méréskor a mérendő fizikai mennyiséget összehasonlítjuk ismert mennyiséggel. Az összehasonlítható fizikai mennyiségeket hordozó testeknek van közös sajátsága, és e sajátság mértékében lehet köztük eltérés.

A mérés általában nem pontos, a mérési hibák előfordulása szükségszerű.

A fizikai mennyiségek elnevezését, jelölését, mértékegységeit is szabványok írják elő. Ezek a szabványok a mértékegységek nemzetközi rendszerén (System International, rövidítve: SI) alapulnak.

Az SI rendszer megkülönböztet alap- és származtatott mennyiségeket.

Az alapmértékegységek definíciójánál fontos szempont az egyértelműség, a reprodukálhatóság, az időtállóság. Régebben előszeretettel vettek alapul csillagászati adatokat, majd mesterséges etalonokat, manapság pedig egyre inkább az atomi sajátságokon alapul az alapmennyiségek definíciója.

A származtatott mennyiségek egységei kifejezhetők az alapegységekkel. Például az egyenletes mozgásra vonatkozó $v = s/t$ összefüggés alkalmas a sebesség egységének megadására: m/s. Természetesen ez az egység a sebesség mindig (nemcsak egyenletes mozgásnál) alkalmazható egysége is.

A fizikai mennyiségek a térbeli irányokkal való kapcsolatuk szerint lehetnek *skalárok, vektorok* vagy *tenzorok.* A tenzor kifejezést általánosabb értelemben is használjuk: a skalár nulladrendű, a vektor elsőrendű tenzornak tekinthető, míg a szűkebb értelemben vett tenzor másodrendű tenzor.

A fizikában többféle "állandó" fordul elő. A dimenziótlan matematikai konstansokon kívül előfordulnak az univerzális fizikai állandók (h hatáskvantum, c vákuumbeli fénysebesség stb.), elemi részecskékkel kapcsolatos állandók, égitestek jellemző adatai, makroszkopikus anyagi sajátságok. Utóbbiak között vannak olyan anyagjellemzők, amelyek csak bizonyos közelítéssel tekinthetők állandónak egy korlátozott tartományban (pl. fajlagos vezetés, hőtágulási együttható).

1.3. A fizika felosztása

A fizika felosztásánál több szempontot szokás figyelembe venni.

- A vizsgált jelenségek, témakörök szerint a fizika fő fejezetei: mechanika, elektrodinamika, termodinamika, optika, atomfizika, magfizika, elemi részek fizikája, stb.
- Az alapul vett axiómáknak, megközelítési módoknak megfelelően a klasszikus fizikán kívül beszélünk relativisztikus, kvantum- és statisztikus fizikáról és ezek kombinációiról.
- További felosztási lehetőséget nyújtanak a vizsgált *modellek* (pl. tömegpont, fluidum, ideális fluidum, ideális gáz, ideális vezető, szigetelő, átlátszó közeg, stb.) illetve *folyamattípusok* (sztatika, stacionárius folyamatok, egyenletes változás, szinuszos folyamatok).
- Szokásos még beszélni *kísérleti, elméleti* és *alkalmazott fizikáról,* attól függően, hogy melyik szempont a hangsúlyosabb.

Ezek a szempontok a fizikában egyidejűleg lépnek fel, ezért ezek nem különíthetők el szigorúan egymástól.

A fizika más tudományágakkal szorosan összefüggő területeit megfelelő jelzős szerkezettel nevezik el: matematikai fizika, műszaki fizika, kémiai fizika, biofizika, stb.

2. BEVEZETÉS A MECHANIKÁHOZ

Előismeret: tömegpont, helyvektor, sűrűség, merev test, transzláció, rotáció, elmozdulás, pálya

2.1. A mechanika felosztása

Tömegpont. A pontmechanika alkalmazhatósága. Kiterjedt testek: pontrendszer és kontinuum. Sűrűség, átlagsűrűség. Dirac-delta. Diszkrét tömegeloszlás közelítése folytonossal és viszont. Kinematika - dinamika - sztatika.

Tömegpont (vagy röviden *pont*) a mechanika alapfogalma, a legegyszerűbb és legjelentősebb mechanikai modell. A tömegpontnak sem kiterjedése, sem belső szerkezete nincs, csak tömege. A tömegpont modellje jó közelítéssel leírja az olyan testek mechanikai viselkedését, amelyek mérete az előforduló mozgásokhoz képest kicsi, és a belső szerkezetük hatásaitól eltekinthetünk. A tömegpont modellje pontosan (nemcsak közelítésként) alkalmazható akármilyen nagyméretű test tisztán transzlációs mozgására. A tömegpont-mechanika jelentőségét láthatjuk a tömegközéppont tételéből is, ami szerint a kiterjedt test tömegközéppontjának mozgására mindig alkalmazható a pontmechanika.

A *pontrendszerek* (diszkrét tömegeloszlású kiterjedt testek) és a *kontinuumok* (folytonos tömegeloszlású testek) kiterjedéssel és belső szerkezettel bírnak, ezek *kiterjedt testek.* (A mechanikai „testek” különböző halmazállapotúak lehetnek.)

Kontinuumokra vezethetjük be a sűrűség fogalmát. Válasszuk ki a kontinuum egy P pontját. Vegyük körül P-t egy kis ΔV térfogattal. Ha ebben a térfogatrészben ΔM tömeg van, akkor itt az átlagsűrűség

$$\rho_{\acute{a}tl} = \Delta M/\Delta V \; . \tag{1}$$

Ennek az átlagsűrűségnek a határértéke, amint a ΔV térfogat a P pontra zsugorodik, a test sűrűsége a P pontban:

$$\rho = dM/dV = \lim \Delta M/\Delta V \; . \tag{2}$$

A határátmenetnél a szóban forgó térfogat tartson zérushoz, de ez még nem elegendő. Szükséges még, hogy a térfogatrész átmérője (két legtávolabbi pontjának távolsága) is zérushoz tartson. Ha a test *homogén*, akkor sűrűsége minden pontban egyenlő és megegyezik a test átlagsűrűségével.

Megjegyzendő, hogy a fizikában szokásosan a test által elfoglalt tértartományt és annak térfogatát ugyanazon V betűvel jelöljük. Ezért külön figyelmet igényel, hogy megkülönböztessük a halmaz és a térfogat fogalmakat.

Folytonos tömegeloszlású a test, más szóval kontinuum, ha a sűrűség szakaszonként folytonos függvénye a helynek. Pont vagy pontrendszer esetén a sűrűség mindenütt zérus, kivéve bizonyos diszkrét pontokat, ahol a tömeg koncentrálódik, ezekben a pontokban a sűrűség nem értelmezhető: “végtelen nagy”. A függvény fogalmát azonban lehet úgy általánosítani, hogy a diszkrét tömegeloszlásokhoz is rendelhessünk egy térbeli sűrűségfüggvényt. Erre a célra alkalmas az ún. “Dirac-delta”: $\delta(x)$. Egydimenziós esetben $\delta(x)$ az alábbi sajátságokkal definiálható:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{ha } x\neq 0; \qquad \int \delta(x)\,dx = 1 \tag{3}$$

A Dirac-delta közelíthető közönséges függvények sorozatával. Egyik legegyszerűbb közelítés:

$$h_n(x) = \begin{cases} n & \text{ha } |x| < 1/2n \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{4}$$

$$\lim h_n(x) = \delta(x) \tag{5}$$

E függvénysorozat grafikonja egységnyi területű csökkenő szélességű, növekvő magasságú téglalapsorozatot ad meg.

A Dirac-delta nem közönséges függvény, szigorú matematikai megalapozása azonban lehetséges: általánosított függvény, disztribúció vagy operátor néven található meg ez a fogalom a matematikában.

Könnyen általánosítható a Dirac-delta többdimenziós esetre. A háromdimenziós $\delta(\mathbf{r})$ függvénnyel az $\mathbf{r}_i$ pontban m_i tömegű (i=1, ..., n) pontokból álló pontrendszer sűrűsége:

$$\rho(\mathbf{r}) = \Sigma\, m_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) \tag{6}$$

A diszkrét és a folytonos tömegeloszlás két olyan modell, ami bizonyos esetekben egymással kölcsönösen megközelíthető. A kontinuumot úgy közelíthetjük pontrendszerrel, hogy kis részekre osztjuk fel, és minden kis részt közelítünk egy tömegponttal. A sok pontból álló pontrendszert megfelelő sűrűségű kontinuummal közelíthetjük; e közelítés akkor jogosult, ha a vizsgált térfogatrészekben igen sok tömegpont van (pl. gáz, csillagködök, porok).

A mechanikát fel szokás osztani kinematikára és dinamikára. A kinematika megelégszik a hely, illetve a helyváltozás (mozgás) leírásával. A dinamika a testek közötti kölcsönhatásokat, erőket is figyelembe veszi, és összefüggéseket állapít meg az erők és a mozgások között. A sztatika nyugvó testek (mechanikai egyensúlyok) tárgyalásával foglalkozik, vizsgálja az egyensúly feltételeit, típusait.

2.2. Vonatkoztatási rendszer és koordinátarendszer

Koordinátarendszer. Vonatkoztatási rendszer. A merev test fogalma. Szabadsági fok. Transzláció és rotáció. A nyugalom és mozgás relativitása.

A tömegpont helyét helyvektorral vagy koordinátákkal adhatjuk meg. Az **r** helyvektor kezdőpontja egy vonatkoztatási pont (koordinátarendszer rögzítése esetén annak origója), végpontja pedig a tömegpontban van. A tömegpont helye kizárólag a tömegpontra jellemző, ám a helyvektor már függ a vonatkoztatási ponttól is. A koordinátákkal való helymeghatározás koordinátarendszer-függő. A legegyszerűbb típusú koordinátarendszer a normált egyenletes beosztású, derékszögű, egyenesvonalú koordinátarendszer, amit röviden Descartes-rendszernek nevezünk. Az általános koordinátarendszereket a Függelék tárgyalja.

A tömegpont mozgásának leírásakor belép egy fontos fizikai fogalom, a *vonatkoztatási rendszer*. Az egymáshoz képest nyugalomban lévő koordinátarendszerek ugyanazon vonatkoztatási rendszerhez tartoznak. Fordítva is igaz, ha két koordinátarendszer ugyanazon vonatkoztatási rendszerhez tartozik, akkor a két koordinátarendszer egymáshoz képest nyugalomban van.

A mechanikában a nyugalom és a mozgás relatív fogalmak. Csak akkor beszélhetünk róluk, ha már van vonatkoztatási rendszer: ehhez viszonyítva vizsgálhatjuk a mozgásokat. A vonatkoztatási rendszer bevezetésénél alapvető jelentőségű a *merev test* modellje.

A merev test pontjainak távolsága időben állandó, ezért a merev test bármely része mozgás közben az eredetileg elfoglalt tértartománnyal azonos alakú és méretű tértartományt tölt ki. A merev test *térbeli szabadsági foka* 6, ami azt jelenti, hogy egy adott test térbeli elhelyezkedését 6 koordinátával adhatjuk meg. Egyik lehetséges megadás: megadjuk a test 3 nem egy egyenesbe eső pontjának (P_1, P_2, P_3) helyét. P_1 helyét 3 koordináta adja meg. A P_1P_2 távolság állandósága miatt P_2 egy P_1 középpontú, P_1P_2 sugarú gömbfelületen lehet, P_2 helyzetének megadásához tehát elegendő 2 szögkoordináta. Végül P_3 a P_1P_3 és P_2P_3 távolságok állandósága miatt egy kör kerületén helyezkedhet el, így helyzete 1 szögkoordinátával megadható.

A merev test általános mozgása transzlációból és rotációból tevődik össze. A *transzláció* (haladó mozgás) olyan mozgás, amelynek során a test minden pontjának elmozdulása (s ezért a sebessége, gyorsulása is) azonos. Transzlációnál a test minden pontja ugyanolyan alakú és hosszúságú pályán mozog, az egyes pontok pályái egymáshoz képest párhuzamos eltolással fedésbe hozhatók. *Rotáció* (forgómozgás) olyan mozgás, amelynek során az egyes pontok szögelfordulása (s ezért a szögsebessége, szöggyorsulása is) azonos. Rotációnál az egyes pontok pályái körívek, a körök középpontjai a rotáció tengelyén (forgástengely) vannak.

A vonatkoztatási rendszer úgy képzelhető el, hogy a teret egymáshoz mereven rögzített pontok halmazának (végtelen merev közegnek) tekintjük. Régen ennek az elképzelt merev közegnek valódi fizikai létezést és fizikai sajátságokat tulajdonítottak („éter”), ma viszont csak a mozgások leírásához használt segédfogalom.

3. PONTKINEMATIKA

Előismeret: Időfüggő mennyiség megváltozása. Átlagos és pillanatnyi változási sebesség. Átlagérték. Helyvektor, pálya, út, elmozdulás.

3.1. Kinematikai alapfogalmak

A pálya megadása paraméteres alakban. Elmozdulás, átlagsebesség. Sebesség. A sebesség iránya és nagysága. Elemi mennyiségek, elemi elmozdulás. A pálya szelője és érintője. A sebesség, átlagsebesség szavak jelentése a köznapi életben. Egyenesvonalú mozgás. Egyenletes mozgás. Egyenesvonalú egyenletes mozgás. Gyorsulás. Egyenletesen gyorsuló mozgás.

A pont mozgása során egy irányított térgörbét ír le, ez a test pályája. A pálya hossza a megtett út (s). A pályát paraméteres alakban az

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (7)

mozgásfüggvény adja meg. Ez a függvény egy vektor-skalár függvény, a t időponthoz hozzárendel egy vektort, azt az **r** helyvektort, ami megadja a pont helyét a t időben. [Itt ismét alkalmaztuk a matematikai szempontból kifogásolható, de egyébként elterjedt jelölést: a jobboldalon **r** a függvény jele, míg a baloldalon ugyanaz az **r** betű a függvény értékét, a t időpontbeli helyvektort jelenti.] A mozgásfüggvényből a pont mozgásával kapcsolatos bármely mennyiség kiszámítható.

Tekintsük a (t_1, t_2) időintervallumot. A legegyszerűbben kifejezhető kinematikai mennyiségek a mozgás e szakaszára:

kezdőpont: $\mathbf{r}(t_1)$,
végpont: $\mathbf{r}(t_2)$,
elmozdulás: $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$,
átlagsebesség: $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$, ahol $\Delta t = t_2 - t_1$ **.**

Az elmozdulás tehát más szóval a helyvektor megváltozása.

A helyvektor idő szerinti első deriváltját a pont pillanatnyi sebességének, röviden sebességének nevezzük és **v**-vel jelöljük:

$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ (8)

Ismeretes, hogy a differenciálhányados a differenciahányados határértéke, tehát a pillanatnyi sebesség a t időpontban a t-t tartalmazó (t_1,t_2) időintervallumra vonatkozó átlagsebesség határértéke:

$\mathbf{v} = \lim \Delta\mathbf{r}/\Delta t.$ (9)

A $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulásvektor a pályagörbe egy szakaszának (a kérdéses Δt időintervallumra vonatkozó szakaszának) szelője. A szelő iránya határesetben az érintő irányához tart.

A fizikában használjuk az "elemi" (infinitézimális) jelzőt az absztrakt matematikai analízis fogalmainak szemléltetésére. Így a **dr** elemi elmozdulást a $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás határesetének tekinthetjük: **dr**-et úgy képzelhetjük el, mint egy olyan piciny vektort, amit a $\Delta\mathbf{r}$ elmozdulás annál jobban megközelít, minél kisebb a szóban forgó Δt intervallum. Az "elemi" mennyiségekkel való számítások szabályait a differenciál- és integrálszámítás egzakt matematikai szabályaiból olvashatjuk ki.

Ha a mozgásfüggvény egy időpontban nem differenciálható, akkor ott persze sebesség sincs. Még ilyenkor is létezhet bal- és jobboldali derivált: ez az eset fordul elő pl. az ütközések modellezésénél.

A sebesség vektormennyiség. Iránya mindig a pálya érintőjének iránya, mozgásirányban előre mutat, nagysága pedig az út idő szerinti deriváltja:

$v = ds/dt$ (10)

A sebesség nagyságának átlagértéke a megtett út és a mozgás közben eltelt idő hányadosa:

$v_{átl} = s/t$ (11)

A köznapi életben, például a közlekedésben használt sebesség, átlagsebesség fogalmak a sebességvektor nagyságát és ennek időbeli átlagértékét jelentik.

A sebességvektor irányáról és nagyságáról tett fenti kijelentések egy matematikai tételből következnek, nevezetesen abból, hogy a

$d\mathbf{r}/ds$

vektor a pálya érintőjének irányába mutató egységvektor. A közvetett függvény differenciálására vonatkozó láncszabály szerint

$d\mathbf{r}/dt = d\mathbf{r}/ds \; ds/dt$ (12)

A sebességvektor tehát az érintő irányú (tangenciális) $\mathbf{e_t}$ egységvektor és a sebesség nagyságának a szorzata:

$\mathbf{v} = v\mathbf{e_t} \qquad v = ds/dt \qquad \mathbf{e_t} = d\mathbf{r}/ds$ (13)

Akkor mondjuk, hogy a mozgás egyenesvonalú, ha a pálya egyenes. A mozgás akkor és csak akkor egyenesvonalú, ha a sebességvektor iránya időben állandó. (Legfeljebb az irányítottság változik, mint pl. a rezgőmozgásnál.)

Akkor mondjuk, hogy a mozgás egyenletes, ha a sebesség nagysága állandó. Egyenesvonalú egyenletes mozgásnál tehát a sebességvektor is állandó, ezért az egyenesvonalú egyenletes mozgás mozgásfüggvénye lineáris:

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v}\,dt = \mathbf{v}t + \mathbf{r_0} \qquad (14)$$

ahol $\mathbf{r_0}$ a helyvektor kezdeti értéke: $\mathbf{r_0} = \mathbf{r}(0)$.

A sebesség idő szerinti deriváltját gyorsulásnak nevezzük, és **a**-val jelöljük:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt \qquad (15)$$

Az idő szerinti differenciálhányadost röviden a mennyiség jele fölé tett ponttal, a második deriváltat pedig két ponttal is szokásos jelölni, tehát

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \dot{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \dot{\mathbf{v}} = d^2\mathbf{r}/dt^2 = \ddot{\mathbf{r}} \qquad (16)$$

A gyorsulás is vektormennyiség, de iránya és nagysága nem fejezhető ki olyan egyszerűen, mint a sebességé (lásd: **3.6.**).

A mozgást egyenletesen gyorsulónak nevezzük, ha a gyorsulás időben állandó. A tömegpont mozgása homogén erőtérben ilyen (lásd: **8.1.**).

3.2. A mozgás leírása Descartes-koordinátarendszerben

A hely-, a sebesség- és a gyorsulásvektor koordinátái. A sebesség nagysága. Az út kiszámítása.

A Descartes-rendszer bázisvektorait szokás **i**, **j**, **k**-val, az **r** helyvektor koordinátáit pedig x, y, z-vel jelölni:

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \qquad (17)$$

Mivel a Descartes-rendszer bázisvektorai állandóak, sem az időtől, sem a helytől nem függenek, ezért a sebességvektor koordinátái éppen a koordináták idő szerinti deriváltjai:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\,\mathbf{i} + \dot{y}\,\mathbf{j} + \dot{z}\,\mathbf{k} \qquad (18)$$

Újabb differenciálással kapjuk a gyorsulásvektor koordinátáit:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j} + \ddot{z}\,\mathbf{k} \qquad (19)$$

Mivel a bázisvektorok egymásra merőleges egységvektorok, a sebesség nagysága:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \qquad (20)$$

Ennek segítségével a megtett út kifejezhető:

$$s = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\;dt \qquad (21)$$

3.3. Síkbeli mozgás leírása polárkoordináta-rendszerben

A polárkoordináta-rendszer egységvektorai és deriváltjuk. A hely-, a sebesség- és a gyorsulásvektor koordinátái. A sebesség nagysága. Szögsebesség, szöggyorsulás.

Síkbeli mozgások leírására használhatunk síkbeli polárkoordináta-rendszert is. A bázisvektorok most a sugárirányú $\mathbf{e_r}$ radiális, és az erre merőleges, pozitív forgásirányba mutató $\mathbf{e_\varphi}$ azimutális egységvektor. A helyvektor kifejezése ebben a koordinátarendszerben:

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e_r} \qquad (22)$$

hiszen az $\mathbf{e_r}$ radiális egységvektor iránya éppen az **r** helyvektor iránya.

Differenciáljunk az idő szerint:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e_r} + r\,\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{r} \qquad (23)$$

Egységvektor deriváltja merőleges az eredeti egységvektorra, a derivált nagysága pedig éppen a szögsebesség (Függelék), ezért

$$\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{r} = \dot{\varphi}\,\mathbf{e_\varphi} \qquad (24)$$

Tehát a sebességvektor polárkoordináta-rendszerbeli kifejezése

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e_r} + r\,\dot{\varphi}\,\mathbf{e_\varphi} \qquad (25)$$

A sebesség nagysága:

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} \qquad (26)$$

A gyorsulás számításánál szükségünk lesz az $\mathbf{e_\varphi}$ egységvektor idő szerinti deriváltjára is. Az egységvektor deriváltjának tulajdonságait felhasználva most

$$\dot{\mathbf{e}}_{\boldsymbol{\varphi}} = -\dot{\varphi}\,\mathbf{e_r} \qquad (27)$$

adódik. A mínusz előjel abból adódik, hogy a kétszeres pozitív irányú $\pi/2$ szögű elfordulás a vektort éppen a (–1)-szeresébe viszi. Némi összevonással kapjuk a gyorsulásvektort polárkoordinátákban:

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\mathbf{e_r} + (2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\mathbf{e_\varphi} \qquad (28)$$

A szögsebességen a szög változási sebességét, azaz idő szerinti deriváltját értjük:

$$\omega = \dot{\varphi} \qquad (29)$$

A szögsebesség előjeles mennyiség: pozitív, ha a szög időben nő. (Pozitív forgásirány: az óramutató járásával ellentétes.)
A szögsebesség idő szerinti deriváltja a szöggyorsulás:

$$\beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \qquad (30)$$

3.4. Körmozgás

Leírás polárkoordinátákban. Hely-, sebesség-, gyorsulásvektor. A gyorsulás tangenciális és centripetális komponense. Egyenletes körmozgás, periódusidő, fordulatszám.

A körmozgás legegyszerűbben egy olyan síkbeli polárkoordináta-rendszerben írható le, amelynek origója a kör középpontja. A helyvektor nagysága ekkor állandó: r = R, ahol R a kör sugara. A helyvektor pedig:

$$\mathbf{r} = R\,\mathbf{e_r} \qquad (31)$$

Akár közvetlen differenciálással, akár a polárkoordinátáknál levezetett formulák alkalmazásával megkapjuk a sebességvektort és a gyorsulásvektort:

$$\mathbf{v} = R\,\omega\,\mathbf{e_\varphi} \qquad (32)$$

$$\mathbf{a} = R\,\beta\,\mathbf{e_\varphi} - R\,\omega^2\,\mathbf{e_r} \qquad (33)$$

A körmozgás sebessége tehát a kör érintőjének irányába mutat, nagysága pedig $v = R\,|\omega|$.

A gyorsulás két komponensből tevődik össze:

tangenciális komponens: $$\mathbf{a_t} = R\,\beta\,\mathbf{e_\varphi} \qquad (34)$$

centripetális komponens: $$\mathbf{a_{cp}} = -R\,\omega^2\,\mathbf{e_r} \qquad (35)$$

A tangenciális komponens mozgásirányban előrefelé mutat, ha a körmozgás gyorsul (a sebesség nagysága nő), ill. hátrafelé mutat, ha a mozgás lassul.

Egyenletes körmozgás

Egyenletes a körmozgás, ha szögsebessége állandó.
Ekkor tehát a szög időfüggése

$$\varphi(t) = \omega\,t + \varphi_0\,, \qquad (36)$$

ahol φ_0 a szög kezdeti értéke ($\varphi_0 = \varphi(t_0)$).
Egyenletes körmozgásnál

$$\mathbf{r} = R\,\varphi(t)\,\mathbf{e_r} \qquad (37)$$

$$\mathbf{v} = R\,\omega\,\mathbf{e_\varphi} \qquad (38)$$

$$\mathbf{a} = -R\,\omega^2\,\mathbf{e_r} \qquad (39)$$

Ilyenkor a mozgás periodikus, a periódusidő T. A periódusidő reciproka a fordulatszám:

$$n = 1/T, \qquad (40)$$

a szögsebesség pedig

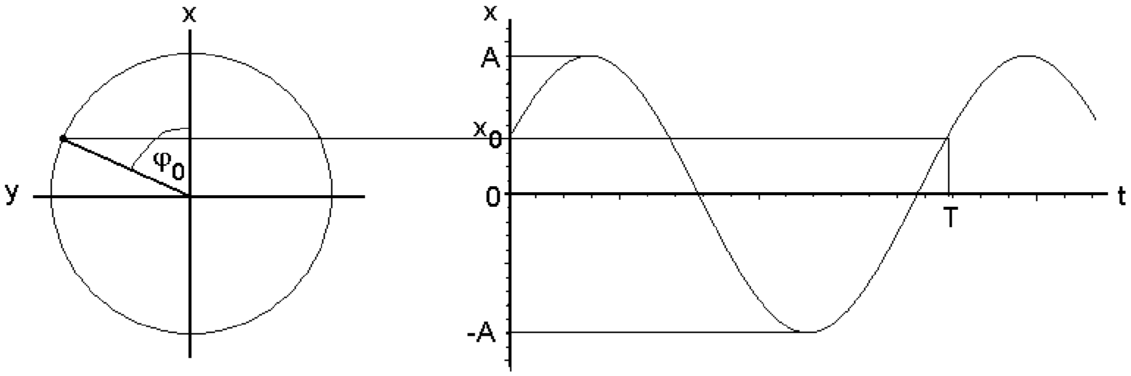
$$\omega = 2\pi n = 2\pi/T \qquad (41)$$

Az egyenletes körmozgás gyorsulása (centripetális gyorsulás) tehát mindig a kör középpontja felé mutat, nagysága pedig

$$a_{cp} = R\,\omega^2 = v^2/R = v\omega \qquad (42)$$

3.5. Harmonikus rezgőmozgás, mint az egyenletes körmozgás vetülete

A rezgőmozgásra jellemző mennyiségeknek, elnevezések.



Az egyenletes körmozgást végző pontnak a sík bármely egyenesére vett vetülete harmonikus rezgőmozgást végez. Vegyük például az x tengelyt, ekkor a vetület:

$$x = R\cos\varphi(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (43)$$

A körmozgásra jellemző mennyiségeknek a rezgőmozgásnál más neveket adunk. A rezgőmozgást jellemző mennyiségek:

A: amplitúdó, az x „kitérés” maximális értéke,

$\omega = 2\pi n = 2\pi/T$ a körfrekvencia,

T a rezgésidő,

$n = 1/T$ a frekvencia (rezgésszám),

$\varphi(t)$ fázis, φ_0 kezdőfázis.

Frekvenciaegységként használjuk a Herz-et (1 Hz = 1/s), de ezt a körfrekvenciára nem használjuk.

A rezgőmozgás sebessége és a gyorsulása:

$$v = \dot{x} = -v_{max}\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (44)$$

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = -a_{max}\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (45)$$

A gyorsulás arányos lesz a kitéréssel és ellentétes előjelű:

$$a = -\omega^2 x \qquad (46)$$

3.6. Tangenciális és centripetális gyorsulás. Simuló kör.

Görbe vonalú mozgás közelítései. A sebesség nagyságának és irányának változásából adódó gyorsulások.

A tömegpont mozgását az **r**(t) függvény írja le. Ezt a függvényt egy adott időpont kis környezetében egyszerűbb függvényekkel, ennek megfelelően a görbe vonalú mozgást egyszerűbb mozgásokkal közelíthetjük. Első közelítésben a sebességvektor a meghatározó: a mozgást egyenesvonalú egyenletes mozgással közelíthetjük az érintő mentén az adott időpontbeli **v** sebességgel. Második közelítésben már a gyorsulás is szükséges, a mozgást körmozgással közelíthetjük a pálya kiválasztott pontjához tartozó simuló körön.

A simuló kör definíciója előtt lássuk az érintő szemléletes definícióját. A pálya kiválasztott P pontja környezetében válasszuk ki a pálya két különböző pontját: P_1, P_2. E két ponton át húzható egy egyenes –szelő–, az érintő ennek az egyenesnek a határesete, amint P_1 és P_2 tartanak a P ponthoz.

A simuló kör definiálásához válasszunk ki 3 – nem egy egyenesbe eső – pontot a P környezetében: P_1, P_2, P_3. Egyetlen kör van, ami e három ponton átmegy, ennek a körnek a határesete a simuló kör, amint P_1, P_2 és P_3 tartanak P-hez. A simuló kör érintője a P pontban megegyezik a pálya érintőjével. A simuló kör sugarát jelöljük R-rel.

A pont gyorsulásvektora a P pontban az ottani simuló kör síkjába esik. A gyorsulásvektor két komponense: az $\mathbf{a_t}$ tangenciális (érintő irányú), és az $\mathbf{a_{cp}}$ centripetális (normális, a simuló kör középpontja felé mutató) komponens. A formulák levezetéséhez induljunk ki a sebességvektorból:

$$\mathbf{v} = v\, \mathbf{e}_t, \qquad (47)$$

ahol v a sebesség nagysága, $\mathbf{e}_t$ pedig az érintő irányú egységvektor. A gyorsulásvektor:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\, \mathbf{e}_t + v\, \dot{\mathbf{e}}_t \qquad (48)$$

Az $\mathbf{e}_t$ egységvektor deriváltja

$$\dot{\mathbf{e}}_t = \omega\, \mathbf{e}_n, \qquad (49)$$

ahol ω az $\mathbf{e}_t$ egységvektor szögsebessége, $\mathbf{e}_n$ pedig a simuló kör középpontjába mutató normális egységvektor (Lásd: Függelék). Tehát

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_{cp}\,, \qquad (50)$$

ahol $\mathbf{a}_t = \dot{v}\, \mathbf{e}_t = \ddot{s}\, \mathbf{e}_t \qquad (51)$

$$\mathbf{a}_{cp} = v\, \omega\, \mathbf{e}_n = v^2 / R\, \mathbf{e}_n = R\, \omega^2\, \mathbf{e}_n \qquad (52)$$

A fenti matematikai levezetést szavakban összegezve:

Általános görbe vonalú mozgás esetén a gyorsulásnak két komponense van:

- a tangenciális komponens a sebesség nagyságának változását írja le,
- a centripetális komponens, amely a sebesség irányának változását írja le.

Ha a mozgás egyenesvonalú, akkor $\mathbf{a}_{cp} = 0$, ha pedig a mozgás egyenletes, akkor $\mathbf{a}_t = 0$.

A következő közelítésben a mozgás már általában nem lenne síkgörbe, a simuló kör síkja csavarodik, de ezzel már nem foglalkozunk.

4. TÖMEGPONT DINAMIKÁJA

Előismeret: Tömeg, erő, kölcsönhatás. Kétkarú mérleg, rugós erőmérő.

4.1. A dinamika I. axiómája és az inerciarendszer

Magára hagyott test. Inerciarendszer, inerciarendszerek családja.

Régen uralkodó volt az a szemlélet, ami szerint a testek természetes állapota a nyugalom. Ahhoz kell külső hatás, hogy a test mozogjon – ezt mutatták a tapasztalatok, és ezt a szemléletet ma leginkább Arisztotelész nevéhez kötjük.

Newton ezzel szemben megfogalmazta azokat az axiómákat, amelyek a klasszikus mechanika alapjait képezik.

Inerciarendszerben minden magára hagyott test sebessége időben állandó.

A magára hagyott test itt azt jelenti, hogy a testre más test nem hat. Mivel a kölcsönhatások erőssége a távolsággal csökken, magára hagyottnak tekinthető minden olyan test, ami más testektől elég távol van: ilyenek pl. az ún. állócsillagok.

De mi az inerciarendszer? Inerciarendszernek nevezünk egy vonatkoztatási rendszert, ha a magára hagyott testek sebessége e rendszerben állandó.

Mindazok a vonatkoztatási rendszerek, amelyek egy inerciarendszerhez képest egyenesvonalú egyenletes transzlációt végeznek, ugyancsak inerciarendszerek. Ekkor ugyanis

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0\,, \qquad (53)$$

ahol $\mathbf{v}$ a pont sebessége a K rendszerben, $\mathbf{v}'$ pedig ugyanazon pont sebessége a K-hoz képest $\mathbf{v}_0$ állandó sebességű (egyenesvonalú egyenletes) transzlációt végző K' rendszerben. Ha tehát $\mathbf{v}$ időben állandó, akkor $\mathbf{v}'$ is az. Az inerciarendszerek számossága végtelen, az inerciarendszerek egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes transzlációt végeznek.

Az inerciarendszer definíciója és az I. axióma látszólag egy körbenjárás, logikai circulus vitiosus. Ám valójában nem ez a helyzet: az I. axióma igazi tartalma az, hogy létezik inerciarendszer.

Tekintsünk egy vonatkoztatási rendszert. Ha ebben egy magára hagyott tömegpont sebessége időben változik, akkor biztos, hogy a rendszer nem inerciarendszer. Ámde ha ennek az egy tömegpontnak a sebessége állandó, akkor az még nem jelenti azt, hogy a rendszer inerciarendszer. (Tekintsünk például olyan koordinátarendszereket, amelyeknek origója e kiválasztott pont: ekkor a rendszerek még e ponton átmenő forgástengely körül tetszőlegesen foroghatnak.) Vegyünk egy másik magára hagyott tömegpontot. Ha ennek a sebessége is állandó, akkor az már – kivételes esetektől eltekintve – elegendő ahhoz, hogy kijelentsük: a rendszer inerciarendszer. És ekkor látszik az axióma tartalma: ugyanebben a vonatkoztatási rendszerben a harmadik, negyedik, akárhányadik magára hagyott tömegpont sebessége is állandó kell legyen.

A következőkben, ha mást nem mondunk, a mozgást inerciarendszerben, illetve inerciarendszerhez kötött koordinátarendszerben írjuk le.

4.2. A II. axióma

Erő, tömeg. A tömeg additivitása. Az erő és a tömeg mérése. Kompenzációs módszer.

A dinamika legfontosabb összefüggése, törvényszerűsége a második axióma:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \qquad (54)$$

Ez az axióma alapvető fontosságú a mechanikában, a dinamika alapegyenletének is nevezik. Szavakba foglalva: a test gyorsulása arányos a rá ható erővel, az arányossági tényező a test tömege.
Ez az axióma két alapfogalmat tartalmaz: a tömeget és az erőt. A tömeg a test tehetetlenségének mértéke, míg az erő a testre ható más test hatásának mértéke. Az $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ formula baloldalán a szóban forgó tömegpontra jellemző mennyiségek vannak, míg a jobboldal a környezetben lévő más test hatását adja meg.
A II. axióma alapján megadhatjuk az erő és a tömeg mérési utasítását, ez egy fizikai mennyiség esetében a mennyiség definíciójának is tekinthető.

A tömeg és az erő dinamikai mérése

Legyen adott egy $\mathbf{F}$ erő, és hasson ez először egy A tömegpontra, ami ennek hatására $\mathbf{a}_A$ gyorsulással mozog. Ugyanez az erő a B tömegponton $\mathbf{a}_B$ gyorsulást okoz. Ekkor

$$m_A\mathbf{a}_A = m_B\mathbf{a}_B \qquad (55)$$

Ez az egyenlet tehát megadja a két test tömegének arányát. Az egyik test tömegét vegyük adottnak (a tömeg egységének megválasztása), ekkor bármely más test tömege meghatározható.
Hasonló eljárással mérhetjük az erőt. Ha az $\mathbf{F}_1$ erő egy adott testen $\mathbf{a}_1$ gyorsulást hoz létre, míg $\mathbf{F}_2$ ugyanezen a testen $\mathbf{a}_2$ gyorsulást hoz létre, akkor $\mathbf{F}_1/\mathbf{F}_2 = \mathbf{a}_2/\mathbf{a}_1$. Tehát, ha az erő egységét megválasztjuk, akkor bármely más erő nagyságát meg tudjuk adni. Az erő iránya pedig az általa létrehozott gyorsulás iránya, az m tömeg ugyanis mindig pozitív skaláris mennyiség.

A tömeg és az erő sztatikus mérése

A tömeg sztatikus mérésének legegyszerűbb módja a kétkarú mérleg. Egyik serpenyőjébe az ismeretlen tömeget, másikba ismert tömegeket rakunk mindaddig, amíg a mérleg egyensúlyba nem kerül. Ismert tömegeket elvben darabolással állíthatunk elő, kihasználva, hogy a tömeg additív.
Az erő sztatikus méréséhez a kétkarú mérleg ugyancsak felhasználható. Az egyik serpenyőt most az ismeretlen erő húzza lefelé, és a mérleg akkor kerül egyensúlyba, ha a másikba helyezett ismert tömeg súlya éppen egyenlő az ismeretlen erővel. Mérleg helyett csigát is használhatunk, változtatható ismert erőforrás pedig a súly helyett egy rugóerő is lehet, amit a kitérésből olvashatunk le (rugós erőmérő).
Az úgynevezett sztatikai mérés kompenzációs módszer: az ismeretlen mennyiséget egy változtatható ismerttel hasonlítjuk össze. Szükségünk van egy nulldetektorra, ami jelzi, hogy a két mennyiség mikor egyenlő.

4.3. A III. axióma

Ha az A test hat egy B testre egy erővel ($\mathbf{F}_{AB}$), akkor a B test egy ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú erővel ($\mathbf{F}_{BA}$) hat az A testre. Képletben:

$$\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA} = \mathbf{0} \quad (56)$$

Tehát a hatás és visszahatás között szimmetrikus a kapcsolat: az erő és ellenerő egy időben lép fel, nagyságuk, támadásvonaluk azonos. Hangsúlyozni kell viszont, hogy más testre hatnak, tehát támadáspontjuk nem ugyanott van.
A testek között kölcsönhatás létezhet csak, egyoldalú hatás nem.

> Kísérlet: Két ember áll két kocsin, kötéllel húzzák egymást. A végeredmény mindig ugyanaz, akár az egyik húz, akár a másik, akár mindkettő.

4.4. A negyedik axióma

A negyedik axióma azt mondja ki, hogy az egy tömegpontra ható erővektorok összege, $\mathbf{F} = \Sigma\, \mathbf{F}_i$ határozza meg a test gyorsulását. Tehát, ha egy pontra több erő is hat, akkor

$$M\,\mathbf{a} = \Sigma\, \mathbf{F}_i \quad (57)$$

Vigyázat: csak az ugyanazon tömegpontra ható erőket szabad és kell összeadni!

4.5. Erőtörvények

Földi nehézségi ~, általános gravitációs ~, lineáris rugalmas ~, csúszási súrlódási ~, tapadási súrlódási ~, gördülő ellenállási ~, közegellenállási erőtörvények

A testek közötti kölcsönhatások különféle típusokba csoportosíthatók. Az erőtörvény megmondja nekünk, hogy az adott kölcsönhatás esetén az erő mitől és hogyan függ. Matematikailag legjobban kidolgozott az az eset, ha az erő értékét megadó függvény független változói az idő, a hely és a sebesség:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\,(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad (58)$$

Igen fontos speciális eset az, amikor a sebesség nem szerepel változóként, azaz

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\,(t, \mathbf{r}) \quad (59)$$

A helytől és időtől függő fizikai mennyiségeket térmennyiségnek (tér, mező; angolul: field) nevezzük. A formula tehát egy erőteret ad meg. Ha ez időben állandó, azaz

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\,(\mathbf{r}), \quad (60)$$

akkor azt mondjuk, hogy az erőtér stacionárius (vagy sztatikus), ha pedig térben állandó, akkor az erőtér homogén. A stacionárius, homogén erőtér esetén az erő állandó:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \quad (61)$$

Most nézzünk néhány konkrét erőtörvényt.

Földi nehézségi erőtér

A Föld a test tömegével arányos G erővel hat a testekre:

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g} \quad (62)$$

Az arányossági tényező a **g** vektor, amit gravitációs gyorsulásnak is neveznek. Iránya függőleges, a Föld középpontja felé mutat. A **g** vektor a köznapi életben szokásos – a Föld méreteihez képest igen kicsi – tartományokban konstansnak tekinthető, ekkor az erőtér sztatikus és homogén.

Általános gravitációs erőtörvény

Newton felismerte, hogy bármely két test között hat egy vonzóerő, ami arányos a testek tömegeivel. Egy m_1 és egy m_2 tömegű tömegpont között ható erő nagysága:

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \ , \qquad (63)$$

ahol r a két tömegpont távolsága egymástól, γ pedig egy univerzális fizikai állandó (gravitációs állandó). A gravitációs erő mindig vonzó: a két tömegpontot összekötő egyenes irányába esik.
Ha az m_1 tömeg az origóban van és **r** az m_2 tömeg helyvektora, akkor az m_2 tömegre ható erő vektora

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Hangsúlyozni kell: ez az erő bármely két test között fellép, árnyékolni, befolyásolni nem lehet, erre utal az általános jelző.
Kiterjedt testek között a gravitációs erőt integrálással határozhatnánk meg: például egy pont és egy kiterjedt test közötti gravitációs erőt úgy határozhatjuk meg, hogy a kiterjedt testet kis részekre bontjuk, ezeket már tömegpontnak tekintjük, alkalmazzuk a (63) formulát, és az egyes részektől származó erővektorokat összegezzük, így egy közelítő értéket kapunk, aminek a határértéke végtelenül finomodó beosztásnál térfogati integrál.
A (63) formula azonban nemcsak tömegpontokra érvényes. Bebizonyítható a következő állítás:
Egy vékony, homogén gömbhéj és egy külső tömegpont közötti gravitációs erőt is megadja a (63) formula, ha r helyébe a tömegpontnak a gömbhéj középpontjától mért távolságát írjuk. Más szóval a gömbhéj úgy hat, mintha a középpontjában koncentrálódna a gömbhéj tömege. A gömbhéj belsejében lévő tömegpontra viszont a gömbhéj zérus erővel hat: a különböző irányú erők összege zérust ad ilyenkor.
Ebből következik továbbá, hogy a (63) formula alkalmazható gömbszimmetrikus tömegeloszlású testek közötti erőre is: a testeket a gömbök középpontjában koncentrált tömegekkel helyettesíthetjük.
A földi nehézségi erő is kiadódik az általános gravitációs erőtörvényből. A M tömegű R sugarú Föld közelében elhelyezett testre ható erő:

$$\gamma \frac{M\,m}{R^2} = m\,g_0 \,, \qquad \text{tehát} \quad g_0 = \gamma \frac{M}{R^2} \qquad (64)$$

Az általános gravitációs erőtörvény alapján a g gravitációs gyorsulás magasságfüggése meghatározható:

$$g(h) = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \qquad (65)$$

Távolodva a Földtől, a test egyre kevésbé érzi a Föld erőterét. Elvben persze a Földtől ható gravitációs vonzóerő csak a végtelenben tűnik el, de ha elég távol megyünk, akkor már más égitestek (például a Nap) vonzó hatása lesz a meghatározóbb, nagyobb.

Lineáris rugalmas erőtörvény

Egyik végén rögzített rugó a rugó megnyúlásával arányos erőt fejt ki:

$$F = -k\,(l - l_0) \ , \qquad (66)$$

ahol l a rugó hossza, l_0 pedig a rugó hossza megnyújtatlan állapotban. Mivel egydimenziós esetről van szó, elegendő egyetlen Descartes koordinátát használni, jelöljük ezt x-szel. A megfelelő erőtörvény másik szokásos alakja:

$$F = -k\,x \ , \qquad (67)$$

ahol F az erő x komponense. F tehát előjeles mennyiség: negatív, ha x pozitív.
Az erőtörvény elnevezésében a rugalmas jelző arra utal, hogy az erő csak a pillanatnyi kitéréstől függ, a lineáris pedig a kitérés és az erő közötti arányosságra.

A lineáris rugalmas erőtörvény a rugó modellezésén túl azért is lényeges, mert egy stabilis egyensúlyi pont környezetében minden tipikus egydimenziós erőtér ezzel közelíthető.
Ha egy konkrét rugó viselkedését nézzük, akkor az csak kis kitéréseknél követi a lineáris rugalmas erőtörvényt, nagyobb kitéréseknél a linearitástól eltérés tapasztalható, a nemlineáris rugalmas test viselkedésére az általánosabb F = F(x) típusú erőtörvény alkalmazható.

Súrlódási, közegellenállási erőtörvények

Csúszási súrlódás

Ha egy test egy szilárd felületen mozog, akkor rá a mozgásiránnyal ellentétes csúszási súrlódási erő hat, ami arányos az érintkező felületek közötti N nyomóerővel:

$$F = \mu N \tag{68}$$

μ a csúszási súrlódási tényező.

Tapadási súrlódás

Ha egy test egy felületen áll, akkor ebből a nyugalmi helyzetéből csak elegendően nagy erő tudja kimozdítani. Jelöljük a testre ható egyéb erőt $\mathbf{F_1}$-gyel, a felület által kifejtett tapadási súrlódási erőt $\mathbf{F}$-fel. Mindaddig, amíg a test nyugalomban marad

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F_1}$$

Van azonban egy F_{kr} kritikus érték, aminél nagyobb F nem lehet; ha ennél nagyobb erővel hatunk a testre, akkor az kimozdul egyensúlyi helyzetéből, és a felület mozgás közben már a csúszási súrlódási erővel hat a testre. A kritikus erő szintén arányos a felületek közötti N nyomóerővel:

$$F_{kr} = \mu_t \, N. \tag{69}$$

Gördülő ellenállás

Henger, gömb illetve kerekek gördülésénél is hat egy fékező erő a testre, ez a gördülő ellenállás, ami szintén arányos a felületek közötti N nyomóerővel:

$$F = \mu_g \, N \tag{70}$$

μ_g a gördülő ellenállási tényező.

Mindhárom tényező (μ, μ_t, μ_g) függ a felületek minőségétől. Általános szabályként elmondható, hogy $\mu_g < \mu < \mu_t$. Ez magyarázza a kerék használatát: gördülésnél a legkisebb a veszteség.

Közegellenállás

Ha egy szilárd test folyadékban vagy gázban mozog, akkor rá a sebességgel ellentétes irányú fékező erő hat: ez a közegellenállás. Kis sebességnél a közegellenállás arányos a sebességgel, nagyobb sebességnél a sebesség négyzetével. Tehát a közegellenállásra két egyszerű erőtörvény írható fel:

$$\mathbf{F} = -\,k\,\mathbf{v} \tag{71}$$

$$\mathbf{F} = -\,k\,v\,\mathbf{v} \tag{72}$$

4.6. Mozgásegyenlet

A tömegpont mozgásának differenciálegyenlete. Kezdeti feltételek. A mechanikai determinizmus. A determinizmus korlátai: káosz, kvantummechanika. Galilei transzformáció és Galilei-féle relativitás-elv.

Ha a II. axiómába behelyettesítjük a testre ható erők erőtörvényeit, valamint a gyorsulást is kifejezzük a helyvektor második deriváltjaként, akkor kapjuk a tömegpont mozgásegyenletét:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\,(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \tag{73}$$

Ez az egyenlet egy közönséges másodrendű differenciálegyenlet, a független változó az idő. A differenciálegyenlet megoldása egy $\mathbf{r}(t)$ mozgásfüggvény, ha ezt visszahelyettesítjük (73)-ba, akkor azonosságot kapunk. Ismeretes, hogy a megoldások létezésének vannak matematikai feltételei. Ezek rendszerint a fizikai problémáknál teljesülnek. Ekkor viszont végtelen sok megoldás van, amelyekből a kezdeti feltételek választják ki a fizikai probléma egyetlen megoldását. Tipikus kezdeti feltétel: megadjuk a helyvektort és a sebességvektort egy kezdeti időpontban:

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0\,, \qquad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$$

Bizonyos matematikai feltételek teljesülése esetén tehát az

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\,, \qquad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0\,, \qquad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0$$

kezdetiérték-problémának egyetlen megoldása van. Ha a kezdeti feltételek és a tömegpontra ható erők ismertek, akkor a tömegpont mozgásának teljes jövője és múltja egyértelműen meghatározható, más szóval a modell determinisztikus.

A determinizmus

Determinisztikus rendszerek nemcsak a mechanikában, hanem számos más tudományágban előfordulnak. Az ilyen rendszerek kezdeti állapota egyértelműen meghatározza a rendszer jövőbeli fejlődését, jövőbeli állapotait. A mechanikában az "állapot" alatt a hely és sebesség együttese értendő. A pontmechanikában az állapottér, más szóval fázistér 6 dimenziós, a fázistér egy pontját két vektor, az **r** helyvektor és a **v** sebességvektor adja meg, röviden tehát (**r**,**v**). Kiválasztva a fázistér egy tetszőleges pontját mint kezdőállapotot, a mozgásegyenlet megoldása megadja az időbeli alakulást, amit a kezdőponton átmenő görbe, más szóval trajektória ír le. Kézenfekvő a görbét paraméteresen megadni: ((**r**(t),**v**(t)) jelenti a pont mechanikai állapotát a t időpillanatban. A trajektóriának pozitív időkhöz tartozó fele a jövőt, negatív időkhöz tartozó fele a múltat adja meg, míg t=0-hoz a kezdeti állapot tartozik: ((**r**(0),**v**(0)).
A mechanikai determinizmust a fizikában sokáig korlátlanul érvényesnek tekintették. Ha egy pénzérmét feldobunk, akkor látszólag véletlenszerűen esik le. Ám kézenfekvő feltételezni, hogy ha pontosan ismernénk a kezdőfeltételeket, akkor meg tudnánk előre jósolni mi lesz: fej vagy írás. A huszadik században ismerték fel, hogy a mechanikai determinizmusnak korlátai vannak. Kiderült, hogy már elég egyszerű mozgásegyenleteknél is előfordulhat káosz, azaz olyan megoldás, aminél a trajektóriák nem rendezett képet mutatnak, hanem gyorsan összegabalyodnak, úgy, mint a turbulensen áramló folyadék részecskéinek pályái. Ilyenkor a kezdeti állapot nem alkalmas a jövő meghatározására, mert egy egész kis eltérés a kezdeti állapotban gyorsan nagy változásokhoz vezet. Bár a rendszer elvben determinisztikus, ez gyakorlati szempontból semmit sem jelent, hiszen a kezdeti állapotot nem tudjuk megadni teljesen pontosan, a mérésnek mindig van hibája.
A determinizmus a kvantummechanikában nemcsak gyakorlatilag, de elvben is érvényét veszti. A kvantummechanikai tömegpont állapotának megadása hullámfüggvénnyel történik, a hullámfüggvény viszont valószínűségi jelentéssel bír. A kvantummechanikában a véletlen nem küszöbölhető ki, a mérési eredményekre elvben is csak valószínűségi kijelentéseket tehetünk. A mérési hibák elvben sem csökkenthetők tetszőlegesen, a hely- és a sebességmérés hibájának szorzata a Heisenberg-féle bizonytalansági reláció folytán állandó, ezért, ha az egyik kicsi, a másik nagy lesz.

Galilei-transzformáció, Galilei-féle relativitási elv

Tekintsünk egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes transzlációt végző két koordinátarendszert, K-t és K'-t. Ha a két origó t = 0 -nál egybeesik és a K' rendszer állandó v_0 sebességgel mozog a K-hoz képest, akkor

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}_0 \cdot t \qquad (74)$$

amiből

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \quad \text{és} \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a} \qquad (75)$$

A (74) transzformációt Galilei-transzformációnak nevezik. A mozgásegyenlet alapjául szolgáló II. axióma ugyanazt az alakot ölti K-ban és K'-ben, hiszen egyrészt a gyorsulás a Galilei-transzformáció következtében azonos a két rendszerben, másrészt az erő értéke megint azonos, mert az a másik test hatásának a mértéke, és értéke független a vonatkoztatási rendszertől. (Klasszikus mechanikában a tömeg sem függ a vonatkoztatási rendszertől.) Ezért a mechanikai jelenségek mindkét vonatkoztatási rendszerben ugyanúgy zajlanak le. Érvényes tehát a **Galilei-féle relativitási elv**: az inerciarendszerek a mechanika szempontjából egyenértékűek, nincs kitüntetett inerciarendszer. Állandó sebességű vonat belsejében végzett mechanikai kísérletekkel nem tudjuk megmondani a vonat sebességét: az elhajított tárgyak, az inga, a rugóra akasztott test pontosan ugyanúgy mozog, mint egy álló vonatban. Einstein speciális relativitáselmélete továbbmegy. Einstein relativitási elve szerint az inerciarendszerek nemcsak a mechanika, hanem bármely fizikai jelenség szempontjából egyenértékűek, pl. a fény a mozgó vonatban is pontosan úgy mozog, mint az álló vonatban.

4.7. Tehetetlenségi erők: a mozgás leírása nem-inerciarendszerben

A tehetetlenségi erő fogalma, szerepe, összetevői: transzlációs, centrifugális, Coriolis, Euler erő. Súly és súlytalanság.

A K inerciarendszerhez képest gyorsuló és/vagy forgó K' rendszerben a tömegpont gyorsulása nem egyenlő a tömegpont K-beli gyorsulással. A különbség a két gyorsulás között $\mathbf{a}_{teh} = \mathbf{a'} - \mathbf{a}$ a pont helyétől, sebességétől, valamint a K' mozgásának jellemzőitől függ. A K inerciarendszerben érvényes a II. axióma: $m \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}$. A K' rendszerben tehát $m \cdot \mathbf{a'} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{teh}$, ahol $\mathbf{F}_{teh} = m \cdot \mathbf{a}_{teh}$.
Az $\mathbf{F}_{teh}$ tehetetlenségi erő nem "igazi" erő, itt nincs másik test, ami a testre erővel hatna. A tehetetlenségi erő olyan - egyébként erő dimenziójú - korrekciós tag, amit a valódi **F** erőhöz hozzá kell adnunk, ha azt akarjuk, hogy az axióma a K' nem-inerciarendszerben formailag ugyanolyan alakban érvényes legyen, mint az inerciarendszerben.

Az $\mathbf{F}_{teh}$ tehetetlenségi erő arányos a test tömegével. Levezethető, hogy a legáltalánosabb esetben négy tagból – transzlációs, centrifugális, Coriolis, Euler erőből – áll:

$$\mathbf{F}_{teh} = \mathbf{F}_{tr} + \mathbf{F}_{cf} + \mathbf{F}_{C} + \mathbf{F}_{E} \qquad (76)$$

Az első tag az inerciarendszerhez képest gyorsuló transzlációt végző rendszerben lép fel, míg a másik három tag a forgó rendszerekben.

Transzlációs tehetetlenségi erő

Tekintsünk egy K' rendszert, ami a K inerciarendszerhez képest transzlációt végez $\mathbf{a}_{tr}$ gyorsulással. Ekkor $\mathbf{a'} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{tr}$, tehát a transzlációs tehetetlenségi erő $\mathbf{F}_{tr} = -m \cdot \mathbf{a}_{tr}$. Az $\mathbf{F}_{tr}$ erő tehát a rendszer gyorsulásával ellentétes irányú. A K' rendszerben minden testre hat ez az erő; ezt érezhetjük, tapasztalhatjuk, ha gyorsuló vagy fékező járműben vagyunk.

Centrifugális erő

Legyen most K egy inerciarendszerhez kötött Descartes-koordinátarendszer, K' pedig egy olyan Descartes-rendszer, aminek origója ugyanott van, mint a K origója, és a K-hoz képest a z tengely körül forog ω szögsebességgel. Az m tömegpont a K' rendszer x' tengelyén álljon, ekkor K-hoz képest ω szögsebességű egyenletes körmozgást végez. Ehhez szükséges egy valódi **F** erő, amit például az origóhoz rögzített fonál fejt ki. A II. axióma a K rendszerben: $m \cdot \mathbf{a}_{cp} = \mathbf{F}$, ahol $\mathbf{a}_{cp}$ az origó felé mutató centripetális gyorsulás. A K' rendszerben $\mathbf{0} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{cf}$. A centrifugális erő ilyenkor pontosan annyi, mint a fonál húzóereje, csak ellentétes irányú. Általános esetben is érvényes, hogy a centrifugális erő
- a forgástengelytől kifelé mutat,
- nagysága $m \cdot r_0 \cdot \omega^2$, ahol r_0 a forgástengelytől mért távolság, ω pedig a rendszer forgásának szögsebessége.

Coriolis erő akkor lép fel, ha a test a(z inerciarendszerhez képest $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel forgó) K' rendszerhez képest mozog: az erő merőleges a forgástengelyre és a test K'-beli **v'** sebességére, nagysága $2m \cdot v' \cdot \omega \cdot \sin\alpha$, ahol α a **v'** és $\boldsymbol{\omega}$ vektorok szöge.

Euler erő gyorsulva forgó K' rendszerben lép fel, értéke: $\mathbf{F}_E = m \cdot \mathbf{r'} \times \boldsymbol{\beta}$, ahol **r'** a tömegpont helyvektora K'-ben, $\boldsymbol{\beta}$ a K' rendszer szöggyorsulása a K inerciarendszerhez képest.

Súly és súlytalanság

A Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszer nem inerciarendszer. A Föld forog és kering a Naphoz képest, sőt maga a Nap is gyorsul a Tejútrendszer tömegközéppontjához képest. E sokféle gyorsulás közül a legjelentősebb hatása a Föld tengely körüli forgásának van. A Földhöz rögzített neminercia-rendszerben a gravitációs erőhöz hozzá kell adnunk a vonatkoztatási rendszer mozgásából eredő tehetetlenségi erőket, amelyekből a legjelentősebb a Föld tengely körüli forgása folytán fellépő centrifugális erő, ami az Egyenlítőnél éppen a középponttól kifelé mutat. Ez azonban csak az egyik oka annak, hogy a testek súlya az Egyenlítőnél kisebb, mint a sarkoknál. A másik ok: a Föld alakja nem pontosan gömb, a sarkoknál kissé belapult. (ld. Függelék)

4.8. A klasszikus mechanika érvényességi határai

A klasszikus mechanika általában csak makroszkopikus testekre alkalmazható. Molekulákra, atomokra, elemi részekre a kvantummechanika érvényes. A kvantummechanikában az egy részecskét jellemző fizikai mennyiségek a klasszikustól eltérően valószínűségi változók. A részecske állapotát egy komplex értékű tér-idő függvény, a $\Psi(\mathbf{r},t)$ hullámfüggvény jellemzi, a mozgásegyenlet pedig egy parciális differenciálegyenlet, a Schrödinger-egyenlet.

A klasszikus fizikában elvileg készíthetünk olyan mérőeszközt, amely egyrészt akármilyen nagy pontosságú lehet, másrészt a mérendő mennyiségre való hatása elhanyagolható. A kvantumfizikában egyik követelmény sem teljesíthető: itt a mérés szükségszerűen megváltoztatja a mért rendszer állapotát, tehát a mérendő mennyiséget, továbbá a pontosságot elvileg sem növelhetjük egy határon túl. A bizonytalansági relációk értelmében nem lehet egyszerre pontosan mérni például a helyet és a sebességet: hibáik szorzata konstans. Ennek ellenére nem ritkák az olyan esetek, problémák, ahol a klasszikus mechanika jól leírja elemi részecskék mozgását, így például töltött részecskék mozgását elektromágneses térben.

A klasszikus mechanika érvényessége másrészt nem terjed ki a nagy sebességek, nagy gyorsulások, illetve erős gravitációs terek tartományára. A speciális relativitáselméletet kell alkalmazni akkor, ha a sebességek megközelítik c-t, a vákuumbeli fénysebességet. Az általános relativitáselmélet pedig erős gravitációs terek leírásához szükséges. Az általános relativitáselméletben alapfeltétel a súlyos és a tehetetlen tömeg azonossága, így a gyorsuló rendszerekben fellépő tehetetlenségi erők és a gravitációs erők ekvivalensek, leírásuk egységes.

A relativitáselméletben egy csomó megszokott fogalom, elképzelés nem érvényes. A mennyiségek, például hossz, időtartam, tömeg függenek a vonatkoztatási rendszertől. Nem érvényes a sebességösszeadás klasszikus formulája sem. A vákuumbeli fénysebesség nem függ a vonatkoztatási rendszertől, fizikai állandó. Másrészt ez egy határsebesség: a nyugalmi tömeggel bíró testek csak ennél kisebb sebességgel mozoghatnak, továbbá semmilyen módon nem lehet jelet továbbítani a vákuumbeli fénysebességnél nagyobb sebességgel.

5. Kiterjedt testek alapfogalmai

5.1. Pontrendszer és kontinuum helyzetének megadása. A kontinuum részecskéje

A 2.1. pontban megismertük a kiterjedt test diszkrét és folytonos modelljét. Diszkrét pontrendszer tömegeloszlását, elhelyezkedését úgy adhatjuk meg, ha megadjuk minden pontjának helyvektorát és tömegét: $(\mathbf{r}_i, m_i)$, i=1,2,3,… . Kontinuumnál ugyanezt a $\rho(\mathbf{r})$ sűrűségfüggvény megadásával adhatjuk meg. A kontinuum dV térfogatú részecskéjének tömege az $\mathbf{r}$ helyen $dm = \rho(\mathbf{r})dV$.

5.2. Tömegközéppont

Pontrendszer tömegközéppontjának (más szóval súlypontjának) helyvektora a pontok helyvektorainak a tömegekkel súlyozott átlaga:

$$\mathbf{r}_s = \Sigma m_i \mathbf{r}_i / \Sigma m_i \tag{77}$$

Kontinuumnál a szummázást térfogati integrál helyettesíti:

$$\mathbf{r}_s = \int \rho(\mathbf{r})\mathbf{r}\, dV / \int \rho(\mathbf{r})\, dV \tag{78}$$

A nevező a test tömege, vagyis

pontrendszernél: $m = \Sigma m_i$ (79)

kontinuumnál: $m = \int \rho(\mathbf{r})\, dV$ (80)

Descartes-koordinátákban:

$$x_s = \Sigma m_i x_i / \Sigma m_i \tag{81}$$

illetve

$$x_s = \int x\rho(\mathbf{r})dV / \int \rho(\mathbf{r})\, dV \tag{82}$$

A tömegközéppont sajátosságai

a) Egyetlen tömegpont esetén a tömegközéppont helyvektora azonos a tömegpont **r** helyvektorával.
b) Két tömegpontból álló rendszer tömegközéppontja a két pont között az őket összekötő egyenesen van, a köztük levő távolságot a tömegközéppont a tömegekkel fordított arányban osztja.
c) A tömegközéppont számításánál a testet tetszőlegesen bonthatjuk részekre, és e részeket helyettesíthetjük egy-egy ponttal az adott rész tömegközéppontjában (csoportosíthatóság).
d) Szimmetrikus tömegeloszlású testek tömegközéppontja a szimmetriasíkon, -tengelyen, illetve a szimmetriacentrumban van.
e) A tömegközéppont nem feltétlenül pontja a testnek, de mindig a test szélei között helyezkedik el. (Ez utóbbi állítás pontosabban: a tömegközépponton átmenő tetszőleges sík két részre osztja a testet, és ezek egyike sem üres.)
f) Ha a pontrendszer minden pontjának ugyanannyi a tömege, akkor a tömegközéppont helyvektora a helyvektorok számtani közepe.
Pl.: Homogén lapháromszög tömegközéppontja a háromszög geometriai súlypontjában van.

A tömegközéppont jelentősége

A tömegközéppontnak sok helyen lesz szerepe: a testeket gyakran helyettesíthetjük egy ponttal (összetett testek tömegközéppontjának számítása, kiterjedt test impulzusának számítása, impulzustétel, tömegközéppont tétele, haladó mozgás), máskor viszont ez a helyettesítés nem tehető meg (forgó mozgás, kinetikus energia, impulzusmomentum számítása).

5.3. Kiterjedt testek mozgásegyenlete. Külső és belső erők

n pontból álló pontrendszer esetében a II. axiómát a rendszer minden pontjára alkalmazzuk. Behelyettesítve az erőtörvényeket, 3n darab, időben másodrendű, differenciálegyenletet kapunk a 3n helykoordinátára, amelynek a kezdeti helyek és kezdeti sebességek megadása esetén már egyértelmű megoldása van.

A pontrendszer pontjaira ható erők között megkülönböztetünk külső erőket és belső erőket. A belső erőket a pontrendszer pontjai fejtik ki egymásra. Tehát a mozgásegyenletek:

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \Sigma\mathbf{F}_{ki} \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad \mathbf{a}_i = d^2\mathbf{r}_i / dt^2 \qquad (83)$$

Itt $\mathbf{F}_i$ jelöli az i-edik pontra ható külső erők eredőjét, $\mathbf{F}_{ki}$ pedig a k-adik ponttól az i-edik pontra ható erőt, tehát $\Sigma\mathbf{F}_{ki}$ az i-edik pontra ható belső erők összege.

Kontinuum részecskéjének a mozgásegyenletét ugyancsak a II. axiómából kapjuk:

$$\rho(\mathbf{r})\,\mathbf{a}\,dV = d\mathbf{F}^{külső} + d\mathbf{F}^{belső} \qquad (84)$$

ahol a részecskére ható külső és belső erőket később (10. fejezet: Deformálható testek) még részletezzük.

6. Impulzus, impulzusmomentum

6.1. Az impulzus (lendület) definíciója. Kiterjedt test impulzusa

Egy m tömegű **v** sebességű tömegpont impulzusa:

$$\mathbf{I} = m\mathbf{v} \qquad (85)$$

Az impulzus vektor, a sebesség irányába mutat.
Az impulzus additív, pontrendszer impulzusa:

$$\mathbf{I} = \Sigma\mathbf{I}_i = \Sigma m_i\mathbf{v}_i \qquad (86)$$

Állítás. Kiterjedt test impulzusa egyenlő a test tömegének és a tömegközéppontja $\mathbf{v}_s$ sebességének a szorzatával.
Ezt az állítást könnyen bebizonyíthatjuk az impulzus és a tömegközéppont definíciójának felhasználásával: $m\,\mathbf{r}_s = \Sigma\, m_i\mathbf{r}_i \quad \Rightarrow m\,\mathbf{v}_s = \Sigma\, m_i\mathbf{v}_i$

6.2. Az impulzustétel

A test impulzusának változási sebessége ($d\mathbf{I}/dt$) egyenlő a testre ható külső erők eredőjével (**F**):

$$d\mathbf{I}/dt = \mathbf{F} \qquad (87)$$

Egyetlen tömegpont esetén **F** természetesen egyenlő a pontra ható erők eredőjével, hiszen ilyenkor minden erő külső erő. Az impulzustétel egyenértékű a II. axiómával, ha a tömeg időben konstans, ugyanis ekkor $d\mathbf{I}/dt = m\mathbf{a}$. Newton a II. axiómát nem a ma szokásos alakban, hanem az impulzustétel alakjában fogalmazta meg.
Ha a tömeg időben változik, akkor az impulzustétel és a II. axióma egyszerre nem lehet igaz. Változó tömegű test például a rakéta: a hajtógázok távozása miatt a rakéta tömege csökken. Ebben az esetben a klasszikus mechanikai leírásban az impulzustétel nem érvényes, a II. axióma pedig igen.
A relativisztikus mechanikában a tömegpont tömege függ a test sebességétől. Ha a pont tömege a hozzá képest nyugvó inerciarendszerben m_0 (nyugalmi tömeg), akkor abban a rendszerben, amihez képest a pont v sebességgel mozog

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad (88)$$

ahol c a vákuumbeli fénysebesség. A relativitáselméletben a fotonnak a nyugalmi tömege zérus, de a mozgási tömege nem.

Tekintsünk most egy pontrendszert és írjuk fel az impulzustételt a pontrendszer minden pontjára:

$$d\mathbf{I}_i/dt = \mathbf{F}_i^{\text{külső}} + \Sigma\, \mathbf{F}_{ki} \qquad (89)$$

Ha összegezünk i-re, akkor kapjuk az impulzustételt a kiterjedt testre:

$$d\mathbf{I}/dt = \mathbf{F}, \qquad (90)$$

ahol $\mathbf{F} = \Sigma\, \mathbf{F}_i^{\text{külső}}$ a külső erők eredője.
A belső erők összege a III. axióma miatt zérus (páronként kiejtik egymást: $\Sigma\,\Sigma\, \mathbf{F}_{ki} = \mathbf{0}$).
(Megjegyzendő, hogy a (90) formula akkor is érvényes lenne, ha a jobboldalon **F** az összes (külső és belső) erő eredőjét jelentené. Ám ha impulzustételről beszélünk, akkor **F** alatt csak a külső erők eredőjét értjük, így mond többet a tétel.)

6.3. A tömegközéppont tétele

Mint láttuk, kiterjedt test impulzusa úgy is számítható, mintha a testet egy m tömegű ponttal helyettesítenénk a test tömegközéppontjában. Ezért az impulzustételt kiterjedt testnél így is írhatjuk:

$$d(m\mathbf{v}_s) / dt = m\mathbf{a}_s = \mathbf{F} \qquad (91)$$

Azaz: **a test tömegközéppontja úgy mozog, mintha a test teljes tömege ott koncentrálódna, és az összes külső erő a tömegközéppontra hatna.**
A tömegközéppont mozgására tehát a belső erőknek nincs hatása, azt kizárólag a külső erők határozzák meg.

6.4. Az impulzusmegmaradás tétele

Ha a testre külső erő nem hat, akkor a test impulzusa időben állandó marad.

$$\text{ha } \mathbf{F} = \mathbf{0}, \text{ akkor } \mathbf{I} = \text{állandó} \qquad (92)$$

Szokásos a mechanikában zárt rendszernek nevezni olyan testet, amire külső erő nem hat. Ezzel a szóhasználattal: **zárt rendszer impulzusa megmarad**.
A tömegközéppont tételéből az is jön, hogy zárt rendszer tömegközéppontjának sebessége időben állandó, ez a kijelentés pedig éppen az I. axióma.
Pusztán belső erők tehát a tömegközéppont sebességét nem tudják megváltoztatni, ha pl. a tömegközéppont sebessége kezdetben zérus volt, akkor zérus is marad.
Az impulzus-megmaradás tétele nagyon jó szolgálatot tesz, ha a belső erőket nem ismerjük, így például ütközéseknél vagy a már említett rakéta mozgásának számításánál.

6.5. Impulzusmomentum (perdület)

Az impulzusmomentum az impulzusvektor momentuma (vektor momentuma: ld. Függelék). A **p** impulzusú tömegpont origóra vonatkoztatott impulzusmomentuma tehát:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{93}$$

Más elnevezés: impulzusnyomaték, perdület.

Az impulzusmomentum additív, ezért egy pontrendszer impulzusmomentuma:

$$\mathbf{N} = \Sigma\mathbf{N}_i = \Sigma\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \tag{94}$$

A tömegpont mozgása során a helyvektor „súrol” egy felületet. A Δt idő alatt súrolt felület az **r** helyvektor és a $\mathbf{\Delta r}$ elmozdulásvektor által meghatározott parallelogramma felét alkotó háromszöggel közelíthető. Ezért határesetben a helyvektor által dt idő alatt súrolt elemi felület: $\mathbf{dA} = \mathbf{r} \times \mathbf{dr} / 2$. A felületi sebesség tehát:

$$\mathbf{dA} / dt = \mathbf{r} \times \mathbf{v} / 2,$$ ami a sebességvektor momentumának fele.

Az impulzusmomentum és a felületi sebesség egy adott tömegpont esetén arányosak:

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 2m\, \mathbf{dA}/dt \tag{95}$$

6.6. Az impulzusmomentum tétele

Az impulzusmomentum változási sebessége egyenlő a testre ható külső forgatónyomatékkal:

$$d\mathbf{N}/dt = \mathbf{M} \tag{96}$$

Egy tömegpont esetén ennek bizonyítása egyszerű:

$$d\mathbf{N}/dt = d(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = d\mathbf{r}/dt \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\, d\mathbf{v}/dt = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{97}$$

mert $d\mathbf{r}/dt \times m\mathbf{v} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \mathbf{0}$ és $m\, d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}$.

Pontrendszer esetén a bizonyítás az impulzustétel bizonyításához hasonlóan megy: összegeznünk kell. A forgatónyomatékok összegezésénél a belső erők nyomatékai zérust adnak, ha feltételezzük, hogy két pont (i és k) közt ható belső erők ($\mathbf{F}_{ki}$ és $\mathbf{F}_{ik}$) a két tömegpontot összekötő egyenes irányába mutatnak:

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ik} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{ki} = \mathbf{0} \tag{98}$$

6.7. Az impulzusmomentum megmaradása. Centrális erőtér

Ha a testre külső nyomaték nem hat, akkor impulzusmomentuma időben állandó:

$$\text{ha } \mathbf{M} = \mathbf{0}, \text{ akkor } \mathbf{N} = \text{állandó} \tag{99}$$

Ilyenkor a felületi sebesség is állandó:

$$\mathbf{dA}/dt = \mathbf{0} \tag{100}$$

Centrális erőtérnek nevezzük az erőteret, ha az erő támadásvonala átmegy egy közös ponton. Válasszuk ezt origónak, és a nyomatékokat is vonatkoztassuk erre a centrumra. Ekkor az erő forgatónyomatéka zérus, bárhol van a tömegpont. Centrális erőtérben tehát az impulzusmomentum állandó marad mozgás közben. Ez azt jelenti, hogy a felületi sebesség vektora is állandó, vagyis az ilyen mozgás síkmozgás: a pálya síkja merőleges a konstans **N** vektorra, és a rádiuszvektor egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol.

Az impulzusmomentum megmaradási tételét jól tudjuk alkalmazni merev testek ütközésénél: ekkor ugyanis a nyomatékok meghatározása szinte lehetetlen, de az összimpulzusmomentum megmarad, minthogy külső erő nem hat.

7. Munka, teljesítmény, energia

Tömegponton végzett munka. Additivitás az erő és a pálya szerint. Teljesítmény, átlagteljesítmény.
Energia, energiamegmaradás. Tömegpont és pontrendszer kinetikus energiája.
A kinetikus energia tétele.
Konzervatív erőtér. Potenciális energia. Erővonalak és ekvipotenciális felületek. Homogén erőtér és gömbszimmetrikus erőtér.
Mechanikai energia. A mechanikai energia megmaradási tétele. A konzervatív erőtér kritériumai.
Hamilton-függvény, Hamilton-egyenletek konzervatív erőtérben mozgó tömegpontra.
Disszipatív erőtér: a mechanikai energia disszipációja.

7.1. Munka

Ha egy tömegpontra mozgása közben erő hat, akkor az a tömegponton munkát végez. Az **F** erő munkája az **F**(**r**) vektortérnek a g pályagörbe mentén vett vonalintegrálja:

$$W = \int \mathbf{F}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \qquad (101)$$

A munka additív az erő szerint és a görbe szerint is. Azaz, ha az erő két erő összege: $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$, akkor a munka is a két összetevő erő munkájának összege: $W = W_1 + W_2$. Továbbá, ha a g görbe két szakaszból tevődik össze, akkor a g görbén számított munka a két szakaszon végzett munka összege.

Ha az **F** erő a mozgás közben állandó, akkor az integráljel elé kiemelhető és ekkor a munka az erővektor és az elmozdulásvektor skaláris szorzata:

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} \qquad (102)$$

Az általános érvényű formula jelentése, a vonalintegrál definíciója a következő. Osszuk fel a pályát olyan kis szakaszokra, hogy egy-egy ilyen kis szakaszon belül az **F** erő már közel állandónak tekinthető. Ekkor a munkát az egyszerű $W_i = \mathbf{F_i}\, d\mathbf{r_i}$ képletből számoljuk. Adott felosztásnál tehát az integrált a $\Sigma\, \mathbf{F_i}\, d\mathbf{r_i}$ integrálközelítő összeg közelíti. Ennek a határértéke az integrál, amint a görbe beosztását végtelenül finomítjuk.

A munka képletében szereplő skaláris szorzat azt jelenti, hogy a munka pozitív, ha az erő az elmozdulással hegyesszöget, negatív, ha tompaszöget, zérus, ha derékszöget zár be.

Figyelembe véve, hogy az elemi elmozdulás nagysága azonos az elemi úttal, a munka így is megadható:

$$W = \int F_s\, ds, \qquad (103)$$

ahol F_s az erőnek az elmozdulás irányába eső komponense.

Az elmozdulásra merőleges erőkomponens nem végez munkát.

Ha F_s állandó, akkor $W = F_s \cdot ds$. Ha ezen kívül még az elmozdulás és az erő iránya megegyezik, akkor

$$W = F \cdot s \qquad (104)$$

A munka egysége a joule: 1 J = 1 Nm.

7.2. Teljesítmény

A teljesítmény P definíciója:

$$P = dW / dt \qquad (105)$$

Az egyszerűbb $P = W/t$ képlet általános esetben az átlagteljesítményre érvényes. Ha a teljesítmény időben állandó, akkor a (pillanatnyi) teljesítmény megegyezik az átlagteljesítménnyel.

A teljesítmény SI egysége a Watt: 1 W = 1 Js.

A tömegpontra ható F erő teljesítménye:

$$P = dW/dt = \mathbf{F}\, d\mathbf{r}/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \qquad (106)$$

7.3. Energia

Nem egyszerű feladat az energiát általánosságban a klasszikus mechanika keretében definiálni, ezt nem is kíséreljük meg, csak felidézzük az energia fontos sajátságait:

Az összenergia megmaradó mennyiség: zárt rendszer energiája állandó.

A mechanikában a test energiája a munkával van szoros kapcsolatban: a test energiaváltozása egyenlő a testen végzett munkával.

Az energia állapotfüggvény, szemben a munkával, ami folyamatfüggvény, azaz folyamathoz tartozik.

A relativitáselmélet kimondja a tömeg és energia ekvivalenciáját. Ha egy testnek van m tömege, akkor van E energiája is, és viszont. A tömeg és energia közt fennáll az

$$E = mc^2 \qquad (107)$$

összefüggés. Mivel a c vákuumbeli fénysebesség általános fizikai állandó, a tömeg és energia lényegileg ekvivalensek, bár dimenziójuk különböző.

7.4. Kinetikus energia

Egy m tömegű, v sebességű tömegpont kinetikus (mozgási) energiája:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2} mv^2 \qquad (108)$$

A kinetikus energia additív, ezért egy pontrendszer kinetikus energiája: $E_{kin} = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$

7.5. A kinetikus energia tétele

A test kinetikus energiájának ΔE_{kin} megváltozása egyenlő a testre ható összes erők összes W munkájával:

$$\Delta E_{kin} = W \qquad (109)$$

Más, egyenértékű alakja a kinetikus energia tételének $dE_{kin}/dt = P$, ahol P az összes erő összes teljesítménye.

A kinetikus energia tételét egy tömegpontra bizonyítjuk be:

$$E_{kin}/dt = m\mathbf{v}\, d\mathbf{v}/dt = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = P$$

Pontrendszerre a bizonyítás teljesen hasonló, csak összegeznünk kell az egyes tömegpontokra.

A kinetikus energia tétele teljesen általános érvényű, mindenféle testre és tetszőleges erőhatásokra érvényes.

7.6. Konzervatív erőtér

Konzervatív az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőtér, ha létezik egy olyan $E_{pot}(\mathbf{r})$ skalártér, hogy

$$\mathbf{F} = -\text{grad}\, E_{pot} \qquad (110)$$

E_{pot} neve: potenciális (helyzeti) energia.

Konzervatív erőtér kritériumai:

A következő sajátságok bármelyike egyenértékű a többivel, tehát a konzervatív erőterek - és csak azok - rendelkeznek a következő sajátságokkal:

Létezik olyan E_{pot}, hogy $\mathbf{F} = -\text{grad}\, E_{pot}$

A munka csak a kezdő és végponttól függ, de nem függ a pályától.

Bármely zárt g görbén végzett munka zérus.

Létezik olyan E_{pot}, hogy $W = -\Delta E_{pot}$

Létezik olyan E_{pot}, hogy $E_{mech} = E_{kin} + E_{pot}$ = állandó.

Az erőtér örvénymentes: rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

Konzervatív erőtérben a mozgásegyenleteket egy másik alakban is megfogalmazhatjuk. Ehhez a mechanikai energiát kifejezzük, mint a helykoordináták és az impulzusok függvényét, ezt a függvényt Hamilton függvénynek nevezzük.

A mozgásegyenletek pedig az időben elsőrendű Hamilton-egyenletek, lásd bővebben: emelt szint.

A Hamilton-formalizmusnak nagy szerepe van a kvantummechanikában.

7.7. Konzervatív erőtér, potenciális energia

Ha egy erőtér konzervatív, akkor hozzá végtelen sok potenciális energiafüggvényt rendelhetünk, mert ha E_{pot} jó potenciális energiának, akkor $E_{pot}(\mathbf{r}) + K$ is jó: a potenciális energiához tetszőleges K konstanst hozzáadhatunk, azaz a potenciális energia nullaszintjét önkényesen választhatjuk meg. Önkényesen mondhatjuk meg, hol legyen a potenciális energia pl. zérus.

Az erőtér erővonalai merőlegesek a potenciális energia szintfelületeire, és a potenciális energia csökkenésének irányába mutatnak.

A fenti formulából integrálással jön, hogy a tömegponton végzett munka konzervatív térben:

$W = -\Delta E_{pot}$

Konzervatív erőtérre példák:

- Földi nehézségi erőtér:

  $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}, \quad E_{pot} = mgz$ (111)

- Az M tömegű tömegpont az origóban van és az m tömegpont pedig az **r** helyen, az m pontra ható gravitációs erőtér:

  $$\mathbf{F} = -\gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (112)$$

  A tér konzervatív, a potenciális energia:

  $E_{pot} = -\gamma Mm / r$

  Általában is igaz, hogy az olyan centrális erőtér, ahol az erő csak a centrumtól mért távolságtól függ konzervatív.

- Lineáris rugalmas erő:

  $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}, \quad E_{pot} = \frac{1}{2} kx^2$ (113)

A súrlódási, közegellenállási erők nem konzervatívak. A csak a helytől függő erőterek között is ritka, ám a gyakorlatban igen fontosak a konzervatív erőterek.

7.8. A mechanikai energia megmaradásának tétele

A kinetikus és potenciális energia összegét mechanikai energiának nevezzük. A mechanikai energia természetesen csak konzervatív erőtérben létezik, és ott a mozgás közben állandó:

$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = \text{állandó}$ (114)

Ennek bizonyítása roppant egyszerű:

$\Delta E_{mech} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = W - W = 0$

A konzervatív elnevezés pont ebből a megmaradási sajátságból ered.

7.9. Disszipatív erők: a mechanikai energia disszipációja

Tételezzük fel most, hogy a tömegpontra a konzervatív $\mathbf{F}_{konz}$ erőn kívül még további $\mathbf{F}_d$ erő is hat, amelyre teljesül, hogy a végzett munkája mindig negatív. Ilyenek a súrlódás, közegellenállás, összefoglalóan a disszipatív erők, ezeknél az erő az elmozdulással ellentétes irányú. Ilyen esetekben a testnek szigorúan véve nincs mechanikai energiája, de a konzervatív erőtérhez tartozik potenciális energia, s így ekkor is képezhetünk egy általánosított mechanikai energiát: $E_{mech} = E_{kin} + E_{pot}$.

Ha a testre konzervatív és disszipatív erő egyszerre hat, akkor ez a ”mechanikai energia” időben soha nem növekszik, hiszen ekkor

$\Delta E_{mech} = \Delta E_{kin} + \Delta E_{pot} = W - W_{konz} = W_d < 0$

A természetben mindig vannak disszipatív erők, ezért a folyamatok iránya kitüntetett, a valódi folyamatok irreverzibilisek. Ezt a törvényszerűséget a termodinamika II. főtétele fogalmazza meg. Ugyancsak a termodinamikában értelmezhető, hogy mi lesz a látszólag elveszett mechanikai energiával: belső energiává alakul, azaz szétszóródik a molekuláris szabadsági fokokon, disszipálódik.

8. Példák, speciális problémák

8.1. Tömegpont mozgása homogén erőtérben

Homogén erőtérben az erő –és így a pont gyorsulása is– állandó:

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m = \text{konst.} \tag{115}$$

A sebességet és a helyvektort integrálással kapjuk:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}t + \mathbf{v}_0 \tag{116}$$

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \tag{117}$$

A $\mathbf{v}_0$ és $\mathbf{r}_0$ vektorok integrációs állandók. Fizikai jelentésük: kezdősebesség és kezdeti helyvektor: $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$.
A pont pályája parabola, ami speciális esetben egyenes is lehet. A parabola tengelye az erő irányával párhuzamos, az erő a parabola belseje felé mutat.

Legszemléletesebb példája a homogén erőtérben való mozgásnak a hajítás. A tömegpont mozogjon a Föld közelében, a gravitációs erőtérben. Válasszuk meg a koordinátarendszer origóját úgy, hogy a kezdetben a pont az origóban legyen, azaz $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$. A z tengely mutasson függőlegesen felfelé, a vízszintes tengelyeket meg válasszuk meg úgy, hogy a $\mathbf{v}_0$ kezdeti sebesség y komponense zérus legyen. Ekkor a sebességnek az y komponense mindig zérus marad, a pálya az x,z síkban lesz.
Az erő ekkor:

$$\mathbf{F} = -mg\,\mathbf{k} \tag{118}$$

ahol g a gravitációs gyorsulás.

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\alpha\,\mathbf{i} + v_0 \sin\alpha\,\mathbf{k}$$

α a hajítás szöge, ekkora szöget zár be $\mathbf{v}_0$ az x tengellyel.
Alkalmazzuk a fenti általános formulákat erre az esetre. A sebesség és a helyvektor két komponense ezekkel a jelölésekkel:

$$v_x = v_0 \cos\alpha \tag{119}$$

$$v_z = v_0 \sin\alpha - gt \tag{120}$$

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \tag{121}$$

$$z = v_0 \sin\alpha \cdot t - \tfrac{1}{2} g t^2 \tag{122}$$

Ez utóbbi két egyenlet a pálya egyenlete paraméteres alakban. A pálya egyenletét explicit formában is megkaphatjuk, ha az időt kiküszöböljük (t-t az x-szel kifejezzük, és azt helyettesítjük a z-t megadó formulába): z az x-nek másodfokú függvényeként adódik (z tengelyű parabola).
A hajítás magassága a maximális z érték. A tetőpontban a sebesség vízszintes irányú, ebből adódik az emelkedési idő és az emelkedési magasság:

$$v_z(t_1) = 0 \quad\Rightarrow\quad t_1 = v_0 \sin\alpha / g$$

$$h = z(t_1) = (v_0 \sin\alpha)^2 / 2g \tag{123}$$

A hajítás ideje és a hajítás távolsága:

$$z(t_2) = 0 \quad\Rightarrow\quad t_2 = 2\,v_0 \sin\alpha / g \;(= 2\,t_1)$$

$$d = x(t_2) = v_0^2 \sin 2\alpha / g \tag{124}$$

Adott nagyságú kezdősebesség mellett tehát vízszintes terepen maximális távolság akkor érhető el, ha a kezdősebesség vízszintessel bezárt szöge 45^0-os.

8.2. A bolygómozgás. Kepler törvényei.

M tömeg (Nap) áll az origóban, gravitációs terében m tömegű tömegpont (bolygó) mozog. A mozgásegyenlet:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma\frac{Mm}{r^3}\mathbf{r} \tag{125}$$

A mozgásegyenlet megoldása bonyolult matematikai feladat. A mozgás lényeges sajátságait Kepler régóta ismert törvényei fogalmazzák meg:

I. törvény: A bolygó ellipszispályán kering a Nap körül, az ellipszis egyik fókuszában a Nap van.
II. törvény: A Naptól a bolygóhoz húzott vezérsugár egyenlő idők alatt egyenlő területeket súrol (a felületi sebesség állandó).
III. törvény: A Naprendszer bolygóira a bolygók keringési idejének négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint pályáik nagytengelyeinek köbei.

Az, hogy a pálya ellipszis, a differenciálegyenlet részletes megoldásából adódik. Itt ezt nem végezzük el, csak arra mutatunk rá, hogy az erőtér centrális, ezért a bolygó impulzusmomentuma állandó. Ebből közvetlenül következik Kepler II. törvénye, valamint az, hogy a pálya síkgörbe.
Kepler III. törvényét körpályák esetére szemléltetjük. Ha a bolygó körpályán mozog egyenletesen, akkor a következő összefüggés áll fenn a T keringési idő és az R pályasugár között:

$$m\,a_{cp} = F, \quad \text{azaz} \quad m\,r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \gamma\frac{mM}{r^2} \qquad (126)$$

Átrendezve:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2} \qquad (127)$$

Ebből látható, hogy r^3 / T^2 az egész Naprendszerre jellemző állandó mennyiség.

Kéttest-probléma

Tegyük fel, hogy az M és m tömegpont között csak a gravitációs erő hat, de most engedjük meg az M mozgását is. Ez az ún. kéttest-probléma. A mozgásegyenletek:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \gamma\frac{Mm}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{R}}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}$$

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \gamma\frac{Mm}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|^2}\frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|} \qquad (128)$$

Látható, hogy $m\ddot{\mathbf{r}} + M\ddot{\mathbf{R}} = (m+M)\ddot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{0}$, tehát a rendszer tömegközéppontjának gyorsulása zérus, sebessége állandó. (Hogy a tömegközéppont sebessége inerciarendszerben állandó, az közvetlenül jön az impulzusmegmaradás tételéből is.) Ezért bevezethetünk egy olyan inerciarendszert, amiben a tömegközéppont áll. Koordinátarendszerünk origója legyen az álló tömegközéppontban. Ekkor M helyvektora kifejezhető:

$$\mathbf{R} = -\,m/M\,\mathbf{r} \qquad (129)$$

és m mozgásegyenlete:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma\frac{Mm}{\left(1+\frac{m}{M}\right)r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (130)$$

A kapott egyenlet pontosan ugyanolyan, mint a bolygómozgás egyenlete, csak a konstansok értéke más. Tehát Kepler I. és II. törvényei most is érvényesek: a bolygó és a Nap is ellipszispályán mozog, az ellipszis fókusza a tömegközéppontban van.

Az úgynevezett **háromtest-probléma**, amikor három tömegpont mozog, és közöttük csak gravitációs erő hat, egyáltalán nem hasonlít az előző egy- és kéttest-problémához. Ilyenkor a megoldás nem fejezhető ki elemi függvényekkel, továbbá előfordul, hogy a megoldás kaotikus.

8.3. Ponttöltés mozgása homogén mágneses térben

Mágneses térben mozgó ponttöltésre erő hat. Ez az erő:

$$\mathbf{F} = Q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B} \qquad (131)$$

ahol Q a pont töltése, **v** a sebessége, **B** pedig a mágneses indukció.

Mivel az erő merőleges **v**-re, ezért munkája zérus, a pont kinetikus energiája, és így sebességének nagysága is állandó! Bontsuk fel a kezdeti sebességet **B**-vel párhuzamos és **B**-re merőleges komponensekre:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$$

Mivel az erő **B**-re is merőleges, ezért a sebesség párhuzamos komponense is állandó. Tételezzük fel, hogy a kezdeti sebesség **B**-re merőleges, akkor az is marad. Ekkor az erő nagysága: $F = QvB$. Mivel az erő a sebességre merőleges, ezért a gyorsulás centripetális gyorsulás, azaz $mv^2/R = QvB$. Ebből az következik, hogy R is állandó marad, azaz a tömegpont egyenletes körmozgást végez **B**-re merőleges síkban. Az utóbbi összefüggés alkalmas arra, hogy töltött elemi részek fajlagos töltését megmérjük, és így a részecskét beazonosítsuk. Ehhez láthatóvá kell tenni a pályáját, ami pl. ködkamrában vagy fotoemulzióban könnyen lehetséges.

8.4. Rezgések

Ha egy mennyiség időben periodikusan változik, akkor beszélünk rezgésről. A periódusidő (T) reciprokát frekvenciának (ν) nevezzük, a frekvencia egysége a hertz: 1 Hz = 1/s.
Szinuszos, más szóval harmonikus rezgésnél az x mennyiség időfüggése:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (132)$$

ahol A: amplitúdó, ω: körfrekvencia, $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, T: periódusidő, φ_0: kezdőfázis.
Bármely periodikus függvény felbontható szinuszos függvények összegére (Fourier-sorok). Az összegben a periódusidőnek megfelelő alapfrekvenciájú szinuszos tagon kívül megjelennek az alapfrekvenciának egész számú többszöröseit tartalmazó szinuszos függvények. Ez a felbontás ugyanaz, mint a hangtanban a hang felbontása alaphangra és felharmonikusaira. A jel alakját (a hangszínt) az egyes tagokhoz tartozó amplitúdók és kezdőfázisok határozzák meg.

8.4.1. Harmonikus rezgés

Egyik végén rögzített rugóra akasztott, egyensúlyi helyzetéből kitérített és elengedett test közelítőleg harmonikus rezgőmozgást végez. A jelenség modellezéséhez tekintsünk egy m tömegű tömegpontot, ami az x tengely mentén mozoghat, miközben rá lineáris rugalmas erő hat. Ekkor a mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = -k\,x \qquad (133)$$

ahol k: rugóállandó ($k > 0$).
A rugóerő arányos a rugó megnyúlásával: $F = -k(l - l_0) = -k\,x$
Ennek a mozgásegyenletnek az általános megoldása, amint majd látni fogjuk a 8.4.2. pontban, harmonikus rezgőmozgás ω körfrekvenciával.
A lineáris rugalmas erőtér, mint minden egydimenziós erőtér, konzervatív. A potenciális energia:

$$E_{pot} = \tfrac{1}{2} kx^2 \qquad (134)$$

A mechanikai energia megmaradási tétele:

$$E_{mech} = \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} kx^2 = \tfrac{1}{2} kA^2 \qquad (135)$$

A sebesség zérus, ha x-nek szélsőértéke van ($x = \pm A$), és a sebesség nagysága maximális, ha $x = 0$.

8.4.2. Rezgő rendszer csillapítással

Tételezzük fel, hogy a lineáris rugalmas erőn kívül egy a sebességgel arányos, azzal ellentétes irányú fékező erő is hat. Ekkor a mozgásegyenlet:

$$m\ddot{x} = -kx - cv, \qquad c > 0 \qquad (136)$$

m-mel beosztva és a $k/m = \omega_0^2$, $c/m = 2\beta$ jelöléseket bevezetve a (136) egyenlet az alábbi alakú lesz:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (137)$$

Ez a differenciálegyenlet lineáris, állandó együtthatós. Az ilyen egyenletek legegyszerűbb megoldási módszere: $e^{\lambda t}$ alakú megoldásokat keresünk. Visszahelyettesítve a (137) egyenletbe, a differenciálás ilyenkor λ-val való szorzást jelent, és így a differenciálegyenletből egy algebrai egyenletet kapunk a λ sajátértékekre. Ezt az algebrai egyenletet szokás karakterisztikus egyenletnek, megoldásait karakterisztikus értékeknek is nevezni.
Esetünkben a karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad (138)$$

Ennek λ_1, λ_2 gyökeivel a (137) egyenlet általános megoldása $c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$.
A megoldóképletből

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \qquad (139)$$

A valós megoldások száma 2, 1 vagy 0. Az alábbiakban részletezzük a fizikailag különböző eseteket.

Harmonikus rezgőmozgás (csillapítatlan eset) $\beta = 0$, $\omega = \omega_0$

A (136) egyenlet ekkor a (133) egyenletet adja, általános megoldása $x = c_1 \cdot e^{i\omega t} + c_2 \cdot e^{-i\omega t}$.
A c_1 és c_2 komplex együtthatókat úgy kell megválasztani, hogy az x valós legyen. Ebből a követelményből és az Euler-formula $\left(e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)\right)$ alkalmazásából egyszerűen levezethető, hogy az általános megoldás

$$x = a \cos \omega t + b \sin \omega t \qquad (140)$$

Más megfogalmazásban kimondhatjuk, hogy ha egy komplex értékű függvény megoldása a valós együtthatós differenciálegyenletnek, akkor a valós része és a képzetes része is megoldás, azaz cos ωt és sin ωt két független megoldás, ezek lineáris kombinációja az általános megoldás.
Ez az általános megoldás ugyanaz, amit a harmonikus rezgőmozgásnál felírtunk, a (132) egyenletben szereplő A, φ_0 valamint a (140) egyenletben szereplő a, b tetszőleges állandók kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak, az egyik páros a másikból kiszámítható:

$$\left.\begin{aligned} A &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi_0 &= \operatorname{arc\,tg}\,(-b/a) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} a &= A \cos \varphi_0 \\ b &= -A \sin \varphi_0 \end{aligned}\right. \qquad (141)$$

A, φ_0 ill. a, b értéke egy adott rezgésre a kezdeti feltételekből határozható meg.
Legyenek a kezdeti feltételek a szokásosak:

$$x_0 = x(0), \quad v_0 = \dot{x}(0).$$

Ezekből $a = x_0$, $b = v_0/\omega$. Tehát az ezeknek a kezdeti feltételeknek megfelelő megoldás:

$$x = x_0 \cos \omega t + v_0/\omega \sin\omega t = A \cos (\omega t + \varphi_0), \qquad (142)$$

ahol $A^2 = x_0^2 + v_0^2/\omega^2$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = -v_0/(x_0 \cdot \omega)$.

Csillapodó rezgések

Ha $\beta < \omega_0$, akkor bevezethető az $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ pozitív mennyiség, amivel a karakterisztikus értékek: $\lambda = -\beta \pm \omega i$, és az általános megoldás:

$$e^{-\beta t} \cdot (a \cos \omega t + b \sin \omega t), \quad \text{vagy más alakban} \quad e^{-\beta t} \cdot A_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (143)$$

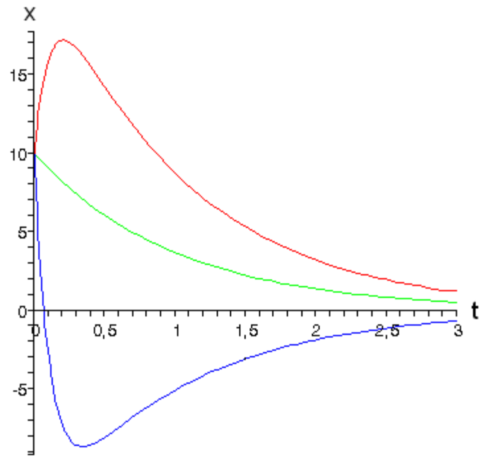
Ez utóbbi alakot úgy is interpretálhatjuk, mintha ω körfrekvenciájú harmonikus rezgés lenne időben exponenciálisan csökkenő amplitúdóval: $A = A_0 \cdot e^{-\beta t}$. Bár a maximumok most nem szigorúan periodikusan követik egymást, a zérushelyek igen ($T = 2\pi/\omega$ periódusidő alatt két zéruspont van). A csillapodó rezgés nem periodikus, de annál közelebb van ahhoz, minél kisebb a csillapítási tényező. A nem szigorúan periodikus, de arra emlékeztető folyamatot is rezgésnek nevezhetjük.

Nagy csillapítás: aperiodikus folyamat

Ha $\beta > \omega_0$, akkor a karakterisztikus egyenletnek két valós, negatív gyöke van. Az általános megoldás:

$$x = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t}, \quad \text{ahol} \quad \lambda_1 < \lambda_2 < 0 \qquad (144)$$

A megoldások kvalitatív viselkedése a kezdőfeltételtől függően háromféle lehet, amint azt a ábra mutatja. Mindhárom esetre igaz, hogy a megoldás tart zérushoz, amint t tart végtelenhez, továbbá, hogy a t > 0 félegyenes mentén legfeljebb egy szélsőérték és legfeljebb két zéruspont lehet.



Aperiodikus határeset: $\beta = \omega_0$

Ekkor a karakterisztikus egyenletnek egyetlen kétszeres gyöke van ($-\beta$), és az általános megoldás:

$$x = c_1 \cdot e^{-\beta t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-\beta t} \qquad (145)$$

A kvalitatív viselkedés ugyanolyan 3 típusú lehet, mint az aperiodikus folyamatnál.

A (136) egyenlet minden megoldása $\beta > 0$ esetben zérushoz tart, ám az $x = \dot{x} = 0$ egyensúlyi állapotot csak határesetben éri el. Az egyensúlyi állapothoz való lecsengés a leggyorsabb éppen az aperiodikus határesetben.

8.4.3. Gerjesztett rezgések

Hasson a rezgő rendszerre a csillapító erőn kívül egy szinuszos gerjesztő erő is:

$$m\ddot{x} = -kx - cv + F_0 \cos \omega_g t\,, \qquad (146)$$

ahol F_0 a gerjesztő erő amplitúdója, ω_g pedig a körfrekvenciája.

Osszunk be m-mel, és vezessük be az előző pont jelöléseit: $k/m = \omega_0^2$, $c/m = 2\beta$, valamint $F_0/m = f_0$, amivel:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega_g t \qquad (147)$$

Ez az egyenlet egy inhomogén differenciálegyenlet, az általános megoldása (x(t)) úgy áll elő, hogy a homogén rész (136) általános megoldásához ($x_h(t)$) hozzáadjuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását ($x_1(t)$):

$$x(t) = x_h(t) + x_1(t) \qquad (148)$$

Mint a 8.4.2. pontban láttuk, a homogén rész megoldása mindenképpen nullához tart (lecseng, más szóval tranziens), ezzel a kezdeti feltételek hatása is elhal. Hosszú idő múlva az inhomogén egyenlet minden megoldása egymáshoz, illetve x_1-hez tart (állandósult állapot áll be).

A megoldást komplex számok felhasználásával kaphatjuk meg kényelmesen. Először is a (147) egyenlet helyett tekintsük a

$$\ddot{\mathbf{z}} + 2\beta\dot{\mathbf{z}} + \omega_0^2 \mathbf{z} = f_0\, e^{i\omega_g t} \qquad (149)$$

komplex kiterjesztést. Ha $\mathbf{z}(t)$ ennek megoldása, akkor az

$$x(t) = \mathrm{Re}(\mathbf{z}(t))$$

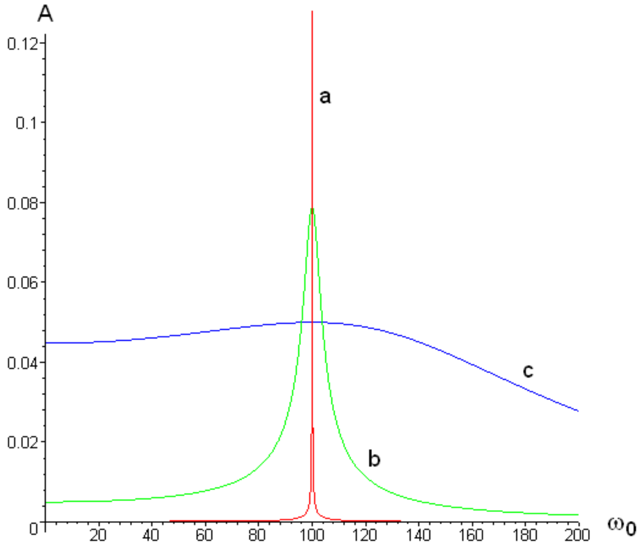
valós függvény megoldása az eredeti (147) egyenletnek. A komplex egyenlet megoldását $\mathbf{z} = \mathbf{Z}\, e^{i\omega_g t}$ alakban keressük. Behelyettesítve (149)-ba kapjuk, hogy

$$\mathbf{Z}\left(\omega_0^2 - \omega_g^2 + 2\beta\omega_g i\right) = f_0 \qquad (150)$$

A $\mathbf{Z}$ mennyiséget komplex amplitúdónak nevezzük, jelöljük abszolút értékét A-val, fázisát φ-vel: $\mathbf{Z} = A\, e^{i\varphi}$. A (150) egyenletből A (és φ is) megkapható:

$$A = f_0 / \sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \omega_g{}^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_g{}^2} \qquad (151)$$

A keresett megoldás tehát: $x = \mathrm{Re}(\mathbf{z}) = A\cos(\omega_g t - \varphi)$. Látható, hogy A függ a rendszer adataitól, a gerjesztő rezgés amplitúdójától és körfrekvenciájától. Különösen érdekes az ω_g körfrekvenciától való függés.



mindhárom görbénél $\omega_g = 100$

a: $\beta = 0$ $(f_0 = 1)$

b: $\beta = 10$ $(f_0 = 50)$

c: $\beta = 10000$ $(f_0 = 1000)$

Az ábra a rezonanciagörbét mutatja különböző csillapítások esetére. Kis csillapításnál az amplitúdónak éles maximuma van egy $\omega_r \approx \omega_g$ rezonancia-körfrekvenciánál. Ha a β csillapítás tart zérushoz, akkor A_{max} tart végtelenhez: rezonanciakatasztrófa. Nagy β esetén a függvénynek nincs maximuma, monoton csökken. A rezgésre képes két- vagy háromdimenziós rendszereknek sok rezonanciafrekvenciája van. A rezonanciát gyakran tapasztalhatjuk, sokszor káros lehet, ezért tilos például nagyobb csoportoknak lépést tartani hidakon.

8.5. Kényszerek

8.5.1. Kényszererők

Felület

Tegyük fel, hogy a tömegpont egy merev test felületén van. Ez egy geometriai kényszert jelent: a tömegpont csak úgy mozoghat, hogy mozgása közben sem hatolhat be a felületbe. Ezt a felület egy, a felületre merőleges N nyomóerővel éri el. A felület egy kényszer, az N nyomóerő pedig kényszererő. N-nek csak az iránya ismert, nagysága határozatlan: pontosan annyi, amennyi elegendő ahhoz, hogy a pont ne hatoljon be a felületbe.
Nyugvó felület esetén a pont sebessége merőleges a felület normálisára, tehát N-re is, ezért ilyenkor a kényszererő nem végez munkát. Tulajdonképpen ez a gondolatmenet igazolja, hogy a felület által kifejtett kényszererő merőleges a felületre: ha nem így lenne, örökmozgót lehetne csinálni.
A felület által kifejtett N kényszererő ellenereje a felületre ható nyomóerő.
A felület N ereje nem akadályozza meg, hogy a tömegpont a felületről leváljon, hiszen N mindig csak a felülettől kifelé hat ((tart és soha nem visszatart)). Amennyiben a felület N kényszerereje zérus, a pont mozgását a felület nem befolyásolja, ekkor válhat el a felülettől a pont.

Nyújthatatlan kötél

Másik példa a kényszerekre a nyújthatatlan kötél. Ez azt garantálja, hogy a végére akasztott tömegpont ne távolodhasson el a kötél másik végétől a kötél hosszánál nagyobb távolságra. A kötélerő mindig a kötél irányába mutató húzóerő. A kötélről még azt is feltételezzük –ha mást nem mondunk–, hogy nincs tömege.

A kötélerő egy kötél mentén végig azonos nagyságú, ha a kötél nincs megfogva (csak a szélén), nem súrlódik. A kötélerőre is érvényes a III. axióma, tehát a kötél a két végére kötött testek közötti kölcsönhatást jelent egyenlő nagyságú és ellentétes irányú erő-ellenerő párossal.

8.5.2. Súrlódás. Görbült lejtő. Síklejtő

Az egyszerűség kedvéért csak olyan esetet vizsgálunk, amikor a mozgás pályája egy függőleges síkban van, a test azon a görbén csúszik lefelé, amit egy függőleges sík a lejtőből kimetsz. Ha a lejtő görbült, akkor a pálya egy g görbeív lesz. Tekintsük ennek egy P pontját, ott érvényes, hogy

$$m\mathbf{a} = \mathbf{G} + \mathbf{N} + \mathbf{F_s} \qquad (152)$$

ahol **G** a Földnek a testre gyakorolt függőleges irányú vonzóereje, **N** a lejtő által kifejtett, a felületre merőleges kényszererő, $\mathbf{F_s}$ pedig a sebességgel ellentétes irányú, a lejtő által kifejtett súrlódási erő. A korábban már tanult erőtörvények esetünkben:

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g}$$

$$F_s = \mu N$$

Az N kényszererőre nem tudunk eleve formulát felírni, N értéke a mozgásegyenletből határozható majd meg. A (152) vektoriális egyenletet két komponensre bontjuk, a tangenciális és a centripetális komponensekben az egyenlet:

$$m\, dv/dt = mg \sin\alpha + 0 - \mu N$$

$$m\, v\, d\alpha/dt = mg \cos\alpha - N + 0 \qquad (153)$$

A lejtő mentén megtett utat s-sel jelölve, a lejtő egyenlete kapcsolatot ad meg az s és a lejtő hajlásszöge között, tehát adottnak vehető az s(α) összefüggés. Továbbá v = ds/dt, és így a (153) egyenletrendszerben két ismeretlen marad: α és N, a differenciálegyenlet-rendszer megoldása kiadja az ő időfüggésüket, azaz a mozgást és a kényszererő változását.

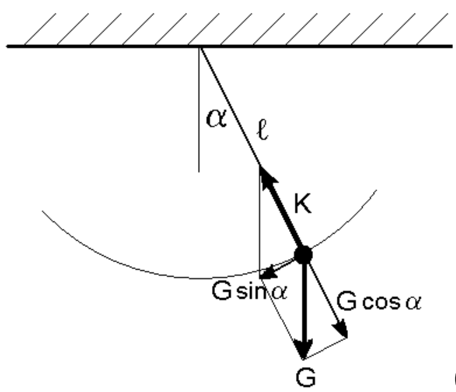
Amennyiben a lejtő síklejtő, akkor a centripetális gyorsulás zérus, s így kapjuk a középiskolából ismert:

$$N = mg \cos\alpha\,, \qquad a = dv/dt = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \qquad (154)$$

formulákat.

8.5.3. Matematikai inga

A matematikai inga egyik végén felfüggesztett, ℓ hosszúságú, nyújthatatlan és tömegtelen kötélre erősített m tömegű tömegpont. Nemzérus kötélerő esetén a tömegpont a felfüggesztési pont körüli ℓ sugarú gömbfelületen mozoghat, ezért gömbi ingának is nevezzük. Két speciális esetet veszünk.



<u>Síkinga</u>

Tegyük fel, hogy a tömegpont a földi nehézségi erőtérben mozog, és a kezdősebesség olyan, hogy a pálya egy állandó függőleges síkban van, ez az inga lengési síkja. A pálya ilyenkor körív.

A mozgásegyenlet:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{G} + \mathbf{K} \qquad (155)$$

Bontsuk fel a vektorokat tangenciális és centripetális (más szóval normális, esetünkben kötélirányú) összetevőkre. Vegyük figyelembe, hogy az s út és az α szög között az összefüggés: s = ℓα, a gyorsulás tangenciális komponense pedig $a_t = \ell\ddot{\alpha}$.

A mozgásegyenlet tangenciális komponense:

$$m\ell\ddot{\alpha} = -mg\sin\alpha \qquad (156)$$

m-mel egyszerűsíthetünk:

$$\ddot{\alpha} + (g/\ell)\sin\alpha = 0\,, \qquad (157)$$

azaz a mozgás független az m tömegtől: ez minden esetben így van, ha a test pusztán a nehézségi és kényszererők hatása alatt mozog.

Kis szögű kitérésekre $\alpha<<1$, alkalmazzuk a $\sin\alpha \approx \alpha$ közelítést, ekkor a mozgásegyenlet:

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0\,, \quad \omega^2 = g/\ell \qquad (158)$$

Ez pedig a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete. Az általános megoldás:

$$\alpha = \alpha_0\cos(\omega t+\varphi_0)\,, \qquad (159)$$

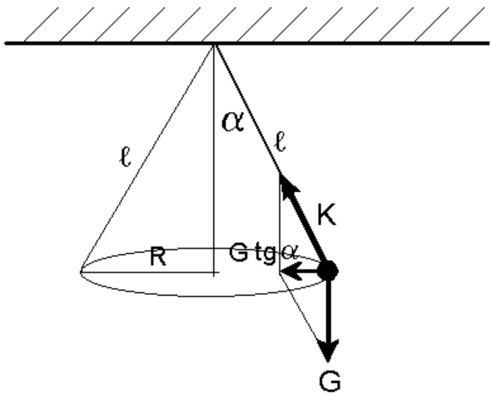
ahol ω a körfrekvencia, ahonnan a lengésidő: $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

Az α_0 és φ_0 integrációs állandókat a kezdeti feltételek határozzák meg.
α_0 a maximális szögkitérés, amplitúdó,
φ_0 pedig a kezdőfázis.

A síkinga síkját inerciarendszerben megtartja. A Föld tengely körüli forgását bizonyító első kísérletetek egyike volt a Foucault-inga. Igen hosszú fonálon felfüggesztett inga esetén elérhető, hogy az inga sokáig lengjen, a súrlódás kicsi. Ilyen ingánál tapasztalható, hogy az inga lengéssíkja hosszú idő alatt változik, minthogy a Földhöz rögzített rendszer nem inerciarendszer.

Kúpinga

Ha a matematikai ingát megfelelő kezdősebességgel indítjuk el, elérhetjük, hogy az inga fonala α kúpszögű kúpfelületet írjon le, az m tömeg egy vízszintes síkban egyenletes körmozgást végezzen v sebességgel. A mozgásegyenlet:



$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{G} + \mathbf{K}\,, \qquad (160)$$

ahol **K** a kötélerő.

Mivel a mozgás egyenletes körmozgás, a gyorsulás a kör középpontja felé mutat és nagysága $v^2/\ell\sin\alpha$.

Az ábrából ezért a

$$\mathrm{tg}\,\alpha = v^2/(g\,\ell\,\sin\alpha) \qquad (161)$$

összefüggés adódik.

(ld. a megoldást a 2011. zh2-höz)

9. Merev testek

9.1. Alapfogalmak

*Merev test*nek olyan testet nevezünk, amelynek bármely két pontja közötti távolság időben állandó. A merev test bármely része alak- és mérettartó.

A merev test szabadsági foka 6, ennyi valós adat szükséges és elegendő a merev test helyzetének megadásához. A helyzet egyik lehetséges megadása:
- megadjuk a test egy A pontjának térbeli helyzetét (ehhez három helykoordináta kell),
- a test egy másik B pontjának helyzetét két szögkoordinátával adhatjuk meg, hiszen az A pont rögzítése után a B -a két pont távolságának fix volta miatt- egy gömbfelületen helyezkedhet el,
- végül, ha a test két pontja már rögzített, akkor a merev test már csak az AB tengely körül végezhet egy forgómozgást, így a harmadik pont helyzetének megadásához egy újabb szögkoordináta elegendő.

Megjegyezzük, hogy a merev testek lehetnek pontrendszerek vagy kontinuumok. Az iménti okoskodás pontrendszerekre azonban csak akkor jó, ha a merev test pontjai nem mind esnek egy egyenesre. Az olyan merev testnek, amelynek minden pontja egy egyenesre esik, a szabadsági foka csak 5, hiszen ilyenkor a test saját egyenese körüli forgásról nem beszélhetünk. Ez az eset fordul elő például két tömegpontból álló pontrendszernél.

A merev test modelljét legtöbbször szilárd testek leírására alkalmazzuk, ámde akkor is alkalmazható, ha a kérdéses test ugyan nem szilárd, viszont a szóban forgó mozgás közben teljesíti a fenti “távolságtartás” követelményt.

9.2. A merev test mozgása. Transzláció és rotáció

A merev test általános mozgása mindig összetehető egy transzlációból és egy rotációból. Válasszuk ki ugyanis a merev test egy A pontját és tekintsük azt a transzlációt, amely az A pont mozgását teljesen megadja. Ha az A pont mozgása $\mathbf{r}_A(t)$, akkor egy tetszőleges P pontjának mozgása:

$$\mathbf{r}_P(t) = \mathbf{r}_A(t) + [\mathbf{r}_P(0) - \mathbf{r}_A(0)] \qquad (162)$$

Azaz a test minden pontjának elmozdulása (és így sebessége és gyorsulása is) megegyezik az A pontéval. E transzláció után a merev testet az A ponton átmenő valamely forgástengely körüli rotációval a kívánt véghelyzetbe hozhatjuk. A rotáció forgástengelye, és az elfordulás szöge függ attól, hogy melyik volt a kiválasztott A pont. Gyakran - bár nem mindig – célszerű, ha a kiválasztott pont éppen a test tömegközéppontja.

A véges időbeli elmozdulást végtelen kicsiny időtartamra vonatkozó, *elemi* (*infinitézimális)* elmozdulásokból rakhatjuk össze, s az infinitézimális mozgások infinitézimális transzlációkból és rotációkból tevődnek össze. Az infinitézimális rotációk forgástengelye az időben pillanatonként változhat. Minden időpillanatban találhatunk egy olyan egyenest, amely az adott pillanatban nem mozog (pontjainak pillanatnyi sebessége zérus), ezt az egyenest nevezzük *pillanatnyi forgástengelynek.*

9.3. A merev test mozgásegyenletei

Az impulzustétel és az impulzusmomentum-tétel minden testre érvényesek, így a merev testre is. Eltérően a deformálható testektől, a merev testeknél ez a két vektori egyenlet elegendő a mozgás leírásához, hiszen a szabadsági foka 6. Ezért szokás az

$$d\mathbf{I}/dt = \mathbf{F} \qquad d\mathbf{N}/dt = \mathbf{M} \qquad (163)$$

egyenleteket a merev test mozgásegyenleteinek nevezni. Nagy előny, hogy a belső erők, belső nyomatékok e formulákban nem szerepelnek, hiszen a merev test “távolságtartási” követelménye miatt a merev test pontjai között jelentős belső kényszererők léphetnek fel. A belső erők, nyomatékok a merev test mozgására tehát nincsenek hatással, ám számításuk a műszaki életben igen fontos lehet abból a szempontból, hogy a testet meddig tekinthetjük merevnek (igénybevételek, terhelhetőség, töréshatár, alakváltozás megjelenési határa).

9.4. Egyenértékű erőhalmazok

Legyen $\{\mathbf{F}\}$ és $\{\mathbf{F}^*\}$ erőknek két halmaza. A két *erőhalmazt* akkor mondjuk *egymással egyenértékűnek*, ha vektori eredőjük és eredő forgatónyomatékuk megegyezik:

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}^* \qquad \Sigma\, \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \Sigma\, \mathbf{r}\times\mathbf{F}^* \qquad (164)$$

Annak, hogy melyik pontra vonatkoztatjuk a nyomatékot, most nincs jelentősége, mert ha a vektori eredő erő már megegyezik, és valamely pontra vonatkoztatott forgatónyomatékok eredője is megegyezik, akkor már minden más pontra vonatkozó forgatónyomaték is megegyezik.

Egyenértékű erőhalmazok ugyanazon merev testen ugyanazon kezdőfeltételek mellett ugyanazt a mozgást hozzák létre.

A merev testre ható erő a támadásvonala mentén eltolható. Látható, hogy **F** és a belőle a támadásvonal mentén történő eltolással kapott **F*** erő egyenértékű. A forgatónyomaték számításánál ugyanis az erő támadáspontjának nincs jelentősége, csak az erő támadásvonalának, ez határozza meg az erő karját.

Érdekes kérdés, milyen erőhalmazok helyettesíthetők egyetlen erővel, azaz milyen erőhalmaz egyenértékű egyetlen erővel. Néhány fontos speciális eset:

a) *Erőpárnak* nevezünk két egyenlő nagyságú, ellentétes irányú, különböző támadásvonalú erőből álló erőhalmazt. Az erőpár eredő forgatónyomatéka mindig merőleges az erőpár síkjára, a forgatás irányával jobbrendszert alkot, nagysága pedig

$M = k F$,

ahol k a két párhuzamos támadásvonal távolsága, amit az erőpár karjának is nevezünk. Ennek bizonyítása:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r_1}\times\mathbf{F}] + [\mathbf{r_2}\times(-\mathbf{F})] = [(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}) \times \mathbf{F}] \qquad (165)$$

Az erőpár forgatónyomatéka tehát független a vonatkoztatási ponttól! Az erőpár a legegyszerűbb olyan erőhalmaz, ami nem helyettesíthető egyetlen erővel.

b) Egy pontban ható erők mindig helyettesíthetők vektori eredőjükkel, hiszen ilyenkor

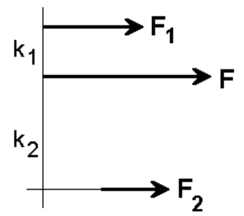
$$\mathbf{M} = \Sigma\, \mathbf{M}_i = \Sigma[\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i] = [\mathbf{r}_i\times\Sigma\mathbf{F}_i] \qquad (166)$$

c) Egy síkban fekvő két erőből álló erőhalmaz, amely nem erőpár, mindig helyettesíthető egy erővel.

- Ha az egy síkban fekvő $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ erő támadásvonalai nem párhuzamosak, akkor a két erőt eltolhatjuk támadásvonaluk metszéspontjába, és ott összegezhetjük.

- Párhuzamos erők esetén az eredő iránya a nagyobb erő irányával megegyező, támadásvonala a nagyobb erő támadásvonalához van közelebb.

$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$, $\quad F_1 k_1 = F_2 k_2$



d) Minden olyan erőhalmaz, amelynél a támadásvonalaknak van egy közös pontjuk, helyettesíthető egyetlen erővel.

e) Egyirányú erőkből álló erőhalmaz mindig helyettesíthető egyetlen erővel.

A földi nehézségi erő esetén az eredő erő támadáspontja a test tömegközéppontja, ezért nevezzük azt súlypontnak is. A merev testet felfüggesztve egy pontjában a súlypont úgy áll be, hogy a felfüggesztési pont alatt legyen, tehát rajta van a felfüggesztési ponton át húzott függőleges egyenesen, amit ezért súlyvonalnak is nevezhetünk. Az összes súlyvonal egy pontban, a súlypontban metszi egymást.

Általánosságban is érvényes, hogy tetszőleges erőkből és forgatónyomatékokból álló halmaz mindig egyenértékű egy erőből és egy erőpárból álló halmazzal, hiszen ezek alkalmas megválasztásával a kívánt vektori eredő és eredő forgatónyomaték előállítható.

9.5. Sztatika és a magára hagyott merev test mozgása

Ahhoz, hogy a merev test nyugalomban legyen, szükséges, hogy

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \mathbf{M} = \mathbf{0} \qquad (167)$$

Ez azonban a nyugalomhoz nem elegendő feltétel, mert ha ezek teljesülnek, a test még végezhet egyenesvonalú egyenletes transzlációt és valamely tengely (*szabad tengely*) körül egyenletes rotációt. Természetesen ilyen mozgások a gyakorlatban csak közelítőleg fordulhatnak elő, mert magára hagyott test szigorú értelemben nincs.

A magára hagyott merev test impulzusa, impulzusmomentuma, kinetikus energiája állandó (ld. megmaradási tételek). Mivel az impulzus állandó, ezért a tömegközéppont rajta van a forgástengelyen. Kimutatható, hogy ha a magára hagyott merev test forgástengelye időben állandó, akkor az csak fő tehetetlenségi tengely lehet (ld. később).

9.6. Tehetetlenségi nyomaték

Haladó mozgásnál a tömeg a tehetetlenség mértéke. Forgómozgásnál ezt a szerepet a tehetetlenségi nyomaték veszi át. Legyen adott egy tengely és tőle ℓ távolságra egy m tömegű tömegpont. A tömegpontnak e tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta = m\ell^2. \qquad (168)$$

A tehetetlenségi nyomaték additív, ezért egy pontrendszer tehetetlenségi nyomatéka:

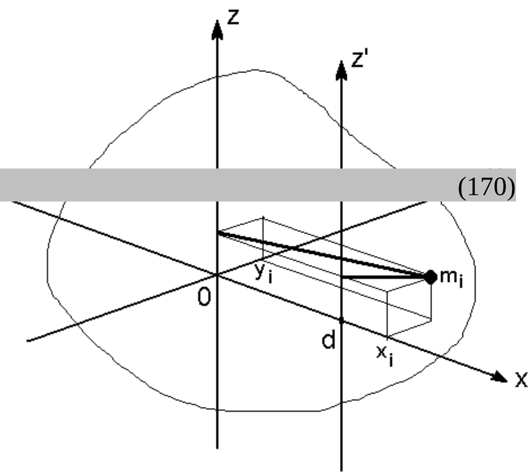
$$\Theta = \Sigma\Theta_i = \Sigma m_i \ell_i^2. \qquad (169)$$

A tehetetlenségi nyomaték értéke függ a test tömegeloszlásától, a tömegen kívül a geometriai adatoktól, és függ a vonatkoztatási tengelytől.

Az egymással párhuzamos tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok között egyszerű összefüggés van: Steiner-tétele szerint

$$\Theta = \Theta_S + md^2 \qquad (170)$$

ahol Θ_S a test tehetetlenségi nyomatéka a tömegközépponton átmenő tengelyre, Θ pedig ugyanezen test tehetetlenségi



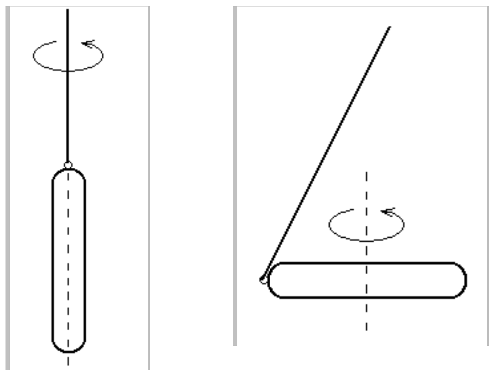
nyomatéka a tömegközépponttól d távolságban lévő párhuzamos tengelyre, m pedig az egész test tömege.
A Steiner-tétel bizonyításához vegyük fel úgy a koordinátarendszert, hogy origója a tömegközéppontban legyen, a vonatkoztatási tengely a z tengely, illetve az x tengely d koordinátájú pontján átmenő, a z tengellyel párhuzamos z' tengely. Ekkor

$$\Theta = \Sigma m_i((x_i-d)^2+y_i^2) = \Sigma m_i(x_i^2-2x_id+d^2+y_i^2) =$$
$$= \Sigma m_i(x_i^2+y_i^2) + \Sigma m_id^2 - 2d\, \Sigma m_ix_i = \Theta_S + md^2,$$

mert $\Sigma m_ix_i/m$ éppen a tömegközéppont x koordinátája, ami esetünkben zérus.
Tehát ha ismerjük a tehetetlenségi nyomatékot a súlyponton átmenő tengelyekre, akkor könnyen kiszámíthatjuk tetszőleges más tengelyre.

Nézzük most a súlyponton átmenő tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékokat. Ezek között van legnagyobb és legkisebb. Kimutatható, hogy a megfelelő két tengely merőleges egymásra. Ezt a két merőleges tengelyt, valamint a rájuk merőleges harmadik tengelyt *főtengelyeknek* nevezzük, a megfelelő tehetetlenségi nyomatékokat pedig *főtehetetlenségi nyomatékoknak*. ($\Theta_I = \Theta_{min}$, Θ_{II}, $\Theta_{III} = \Theta_{max}$) Ha a három főtehetetlenségi nyomatékot ismerjük, akkor a főtengelyekkel adott szöget bezáró bármely más tengelyre kiszámíthatjuk egy ismert, bár kissé bonyolult képletből. A fentiek az általános esetre vonatkoznak. Speciális esetekben, pl. ha a test szimmetrikus, előfordulhat, hogy két főtehetetlenségi nyomaték egyenlő, ekkor a megfelelő két főtengely síkjában bármely más tengelyre is ugyanaz a tehetetlenségi nyomaték. Ha pedig mindhárom főtehetetlenségi nyomaték megegyezik, pl. gömbnél, akkor bármely tengelyre ugyanaz a tehetetlenségi nyomaték értéke. A korábban említett szabad tengelyek csak főtehetetlenségi tengelyek lehetnek.

Kísérlet. Hosszúkás hengert fonálra felfüggesztünk és a fonál pörgetésével forgásba hozzuk. Kis szögsebességnél a henger a szimmetriatengely körül forog, ez most a minimális főtehetetlenségi tengely; nagy szögsebességnél viszont a henger vízszintesbe fordul, a szimmetriatengelyre merőleges főtengely körül fog forogni, vagyis úgy áll be, hogy a forgástengelyhez tartozzon a maximális a tehetetlenségi nyomaték.



kis szögsebesség nagy szögsebesség

9.7. Forgás rögzített tengely körül

Ha a merev test egy időben állandó forgástengely körül foroghat, akkor a szabadsági foka 1. Ez fordul előfordul akkor, ha a forgástengely rögzített, pl. csapágyazott tengelyhez van rögzítve a test, de előfordul szabad tengely körüli külső erőtől mentes forgás esetén is.
Erre az egyszerű forgásra létezik egy könnyen megjegyezhető szótár. A szótár az egyenesvonalú haladó mozgás és a rögzített tengely körüli forgómozgás jellemző fizikai mennyiségeit megfelelteti egymásnak.

Haladó mozgás	**Forgómozgás**
helykoordináta x	szögkoordináta α
sebesség v	szögsebesség ω
gyorsulás a	szöggyorsulás β
impulzus p	impulzusnyomaték N
tömeg m	tehetetlenségi nyomaték Θ
erő F	forgatónyomaték M

A szótár segítségével lefordíthatjuk a mondatokat. Ha van egy összefüggés a haladó mozgásra, akkor a megfelelő összefüggést forgómozgásra a fenti mennyiségek mechanikus behelyettesítésével kaphatjuk.
Ilyenek például:

$$a = dv/dt = d^2x/dt^2 \qquad \beta = d\omega/dt = d^2\alpha/dt^2$$
$$p = mv \qquad N = \Theta\omega$$
$$ma = F \qquad \Theta\beta = M$$

Az utóbbi összefüggést szokás a forgómozgás alapegyenletének nevezni.
A forgó test kinetikus energiája ugyancsak a fenti szótár alapján:

$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}\,\Theta\omega^2 \tag{171}$$

A haladó mozgásnál megismert feladatok forgási megfelelői ugyancsak a szótár alapján adhatók meg. Például az egyenletesen gyorsuló haladó mozgásra érvényes

$$x = a/2\; t^2 + v_0t + x_0$$

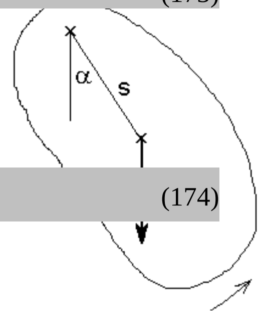
képlet megfelelője egyenletesen gyorsuló forgómozgásra

$$\alpha = \beta/2\; t^2 + \omega_0t + \alpha_0 \tag{172}$$

9.8. Fizikai inga

Fizikai inga egy vízszintes rögzített tengely körül forgó merev test. A test tömegközéppontjának a forgástengelytől mért távolságát jelöljük s-sel, a test tömegét m-mel, a forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát Θ-val.
A forgómozgás alapegyenletéből erre az esetre

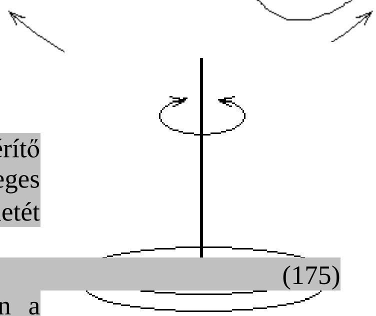
$$\Theta\, d^2\alpha/dt^2 = -mg\, s \sin\alpha \qquad (173)$$



Ez ugyanaz az egyenlet, mint az $\ell = \Theta/ms$ hosszúságú síkinga egyenlete. Tehát minden fizikai inga úgy mozog, mint az ilyen hosszúságú matematikai síkinga. Kis szögkitérésnél, amikor $\sin\alpha$ helyettesíthető α-val, kapjuk a harmonikus rezgés differenciálegyenletét, itt a forgás α szögkitérése időben szinuszosan változik, a lengésidő

$$T = 2\pi\sqrt{\Theta / msg} \qquad (174)$$

9.9. Torziós inga



A torziós inga esetén a forgatónyomatékot egy torziós szál szolgáltatja. Tekintsük az ábrán lévő elrendezést: Θ tehetetlenségi nyomatékú merev korong függőleges szálon középen van felfüggesztve. A szál rugalmas anyagból, pl. acélból készült, ezért ha a korongot elcsavarjuk, akkor visszatérítő nyomatékot gyakorol, ami arányos a kitérítés szögével. A korong tehát függőleges tengely körül forog, a helyzetét az α szög adja meg. A forgómozgás alapegyenletét alkalmazva erre az esetre:

$$\Theta\, d^2\alpha/dt^2 = -D\alpha\,, \qquad (175)$$

ahol D a torziós szálra jellemző állandó. Ez a differenciálegyenlet éppen a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete, tehát α szinuszosan változik az időben

$$T = 2\pi\sqrt{\Theta D}\,.$$

Megjegyzendő, hogy ez az összefüggés a torziós inga lengésidejét nagy szögekre is jól adja meg, mindaddig, amíg a csavarásnál fellépő nyomaték arányos a csavarási szöggel.

10. A kontinuummechanika alapjai. Rugalmas testek, szilárd testek

10.1. A kontinuum mozgása

A kontinuum mozgása során a részecskék helye változik. Mindenekelőtt persze tisztáznunk kell, hogy melyik részecskéről van szó. A részecskék elnevezésének az egyik legegyszerűbb módja, hogy megadjuk a részecske $\mathbf{r}_0$ helyvektorát a t = 0 kezdeti időpontban. A részecske nevét, identitását a mozgás során megőrzi, tehát $\mathbf{r}_0$ a mozgás közben állandó marad.
Változik viszont a mozgás során a részecske **r** helyvektora, ez függvénye a t időnek:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \qquad (176)$$

Erről a függvényről feltételezzük, hogy invertálható, tehát, ha megadjuk a helyvektort a t időben, e függvény inverze megadja a kezdeti helyvektor értékét, azaz a részecske nevét.

10.2. Térmennyiségek. Lokális és szubsztanciális leírás

A kontinuumban a fizikai mennyiségek közül vannak térmennyiségek, amelyek a kontinuum pontjaiban vannak értelmezve, ilyen például a hőmérséklet és a sűrűség. E térmennyiségek a hely és az idő függvényei. Két jelentősebb leírással ismerkedjünk meg:
Lokális leírás: az **r** helyvektort és a t időt tekintjük független változónak.
Szubsztanciális leírás: a részecskét jellemző $\mathbf{r}_0$ kezdeti helyvektort és az időt tekintjük független változónak.

Mivel a (176) összefüggés segítségével **r** és $\mathbf{r}_0$ kifejezhetők egymással, a két leírás ekvivalens.

A kétféle leírásnak megfelelően egy térmennyiségnek kétféle időderiváltja van: a lokális időderivált, azaz olyan parciális időderivált, amikor **r** konstans, ezt fogjuk ∂/∂t parciális derivált jellel jelölni, valamint a szubsztanciális időderivált, amikor $\mathbf{r}_0$ konstans, ezt fogjuk a d/dt teljes derivált jellel jelölni. A kétféle leírás szemléltetésére tekintsük példaként a T hőmérsékletet, és annak időderiváltjait. A lokális leírás annak felel meg, hogy a közeg hőmérsékletét fix helyű hőmérőkkel mérjük, a lokális időderivált e hőmérsékleti érték ∂T/∂t változási sebessége egy adott **r** helyen. A szubsztanciális leírásnál a közeggel együttmozgó hőmérőket képzelünk el, az általuk mutatott hőmérséklet dT/dt változási sebessége a szubsztanciális időderivált. A kétféle derivált között érvényes a következő összefüggés:

$$dT/dt = \partial T/\partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad } T \qquad (177)$$

összefüggés, ahol **v** a kontinuum adott pontjának sebessége. Az összefüggés jobb oldala abból a gondolatmenetből adódik, hogy a T(**r**,t) függvény értékében az időfüggés kétszer jelentkezik: egyszer a közvetlen függés, ebből ered a parciális derivált, másrészt az **r** helyvektor időfüggésén keresztül a közvetett függés. Ez utóbbinak a járuléka az időderiváltban a közvetett függvényre vonatkozó láncszabályból adódik. Természetesen (177)-hoz hasonló összefüggés írható fel nemcsak a hőmérsékletre, hanem bármely más térmennyiség időderiváltjaira is.

A kontinuum részecskéjének sebessége és gyorsulása természetesen szubsztanciális időderivált, hiszen egy adott részecskére vonatkoznak:

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt, \qquad \mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt. \qquad (178)$$

10.3. Deformálható testek. Feszültségtenzor. Rugalmas testek.

A kontinuumok speciális esetét, a merev testeket már tárgyaltuk. A merev test általános mozgása transzlációból és rotációból tevődik össze. A nem merev testet deformálhatónak nevezzük. A deformálható testek általános mozgásában a transzláción és rotáción kívül fellépő további mozgást deformációs mozgásnak nevezzük. A deformációs mozgások leírása bonyolult, most elegendő annyit előlegezni, hogy e mozgástípus is leírható fizikai mennyiségekkel, nevezzük ezeket az egyszerűség kedvéért deformációknak.

A kontinuumokban fellépő belső erők a kontinuumban felvett, a kontinuum részeit elválasztó belső felületeken oszlanak el. Bevezethető egy **T** feszültségtenzor, amivel a **dA** felületre ható belső erő így írható: d**F** = **T·dA**, tehát a feszültség felületi erősűrűség. A **T** mennyiség két vektor, a d**F** és a **dA** vektorok közti arányossági tényező, és mivel e két vektor általában nem egyirányú, azért lesz tenzor. A tenzornak, éppen úgy, mint a vektoroknak egy adott Descartes-koordinátarendszerben vannak koordinátái, a tenzor koordinátái egy 3x3-as mátrixot alkotnak. A mátrix-szorzás formalizmusával:

$$dF_i = \Sigma T_{ik}\, dA_k \qquad (179)$$

Innen látható a feszültségmátrix koordinátáinak jelentése: T_{ik} a k normálisú felületre ható erő i-koordinátája. A koordináták szokásosabb jelölésével T_{xx} az x tengelyre merőleges felületre ható erő x koordinátája. A felületre merőleges belső erőket húzó- illetve nyomóerőknek, a felülettel párhuzamos belső erőket nyíróerőknek nevezzük. A feszültségmátrix főátlójában tehát húzófeszültségek vannak, míg a mátrix többi, vegyes indexű elemei a nyírófeszültségek.

Rugalmas testeknél a feszültségek csak a pillanatnyi deformációktól függenek, míg a rugalmatlan alakváltozásoknál számít a múlt is, hiába szűnik meg a feszültség, a testben maradandó alakváltozások deformációk maradnak. Lineáris viselkedésű rugalmas testek esetén a feszültségek arányosak a deformációkkal, ez a jól ismert Hooke törvény általánosítása. Izotróp, lineáris, rugalmas testeket két független anyagi állandóval jellemezhetünk.

Deformálható testek mozgásegyenlete

Tekintsük a deformálható test egy elemi dV térfogatú darabját, erre írjuk fel a II. axiómát. A tömeg értéke ρdV, az erők pedig külső és belső erők. A külső erőkről feltételezzük, hogy a tömeggel arányosak, tehát a dV térfogatelemre ható külső erő: ρ **f** dV, ahol **f** a fajlagos erő. A belső erők a deformálható test elemi térfogatára a szomszédos részektől hatnak, mint láttuk, a felülettel arányosak. Az elemi dV térfogat határfelületén a divergenciatétel segítségével átalakítjuk a felületi integrált térfogativá, és figyelembe vesszük, hogy elemi térfogatnál a térfogati integrál egyszerű szorzat. Egyszerűsítve dV-vel kapunk egy lokális egyenletet, ami minden pontban érvényes, ez a deformálható test mozgásegyenlete:

$\rho\mathbf{a} = \rho\mathbf{f} + \text{div}\mathbf{T}$, ahol div**T** a **T** tenzor divergenciája, ami egy vektor.

10.4. Egyszerű nyújtás

Tekintsünk egyik végén (x = 0 -nál) befogott A keresztmetszetű, ℓ hosszúságú rudat. Tegyük fel, hogy a másik végén (x = ℓ -nél) F egyenletesen eloszló húzóerő hat. Ekkor a rúdban a feszültségmátrix $T_{xx} = F/A$, a többi mátrixelem pedig zérus. Ez a feszültség arányos a rúd relatív megnyúlásával:

$$T_{xx} = E\varepsilon, \qquad (180)$$

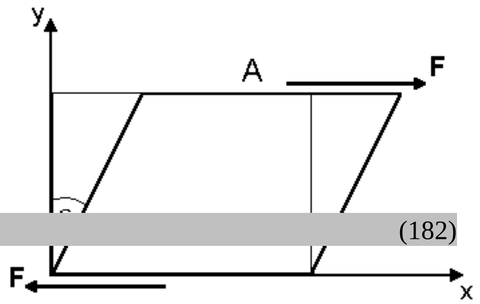
ahol $\varepsilon = (\ell-\ell_0)/\ell_0$ a rúd relatív megnyúlása, ebben az esetben ez a deformáció mértéke. Az E mennyiség anyagjellemző, neve: Young-modulus. A (180) Hooke-törvényből levezethető a rugóra felírt lineáris erőtörvény: F = kx, ahol $k = EA/\ell_0$, x pedig az $\ell-\ell_0$ megnyúlás. Az előjelkülönbség oka: az erőtörvénynél a rugalmas test által kifejtett erőt vettük alapul, itt pedig annak ellenerejét, a magára a rugalmas testre ható külső erőt.

Egyszerű nyújtás esetében a hossz megnyúlásával egyidejűleg a keresztmetszet lecsökken, ez a harántkontrakció. A keresztirányú átmérők relatív csökkenése izotróp testnél az x-re merőleges minden irányban, így az y és a z irányban is megegyezik, jelöljük ezt a harántdeformációt ε_h-val. A harántdeformáció és a nyúlási deformáció aránya, az ún. Poisson-arány is egy anyagjellemző:

$$\varepsilon_h = -\nu\varepsilon \tag{181}$$

Egyszerű nyújtásnál a térfogat nő, ez korlátot jelent a harántkontrakcióra. Elméletileg kimutatható, hogy $\nu<0{,}5$, gyakran 0,3-0,4 körüli érték.
A Young-modulus és a Poisson-arány két független anyagjellemző, ezek ismeretében a lineáris rugalmas test bármely alakváltozása kifejezhető, ha a feszültségeket ismerjük.

10.5. Egyszerű nyírás

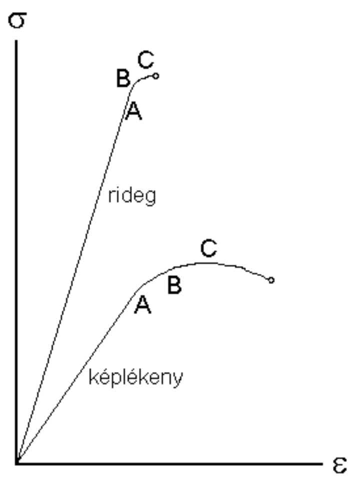


Egy téglatest alaplapját rögzítjük, A keresztmetszetű fedőlapjára F nyíróerőt gyakorolva a téglalap keresztmetszete parallelogrammává módosul. Az ε deformáció most a nyírás szögének tangense, kis deformációknál ez közelítőleg egyenlő magával a szöggel. Lineáris rugalmas testnél a τ nyírófeszültség arányos a deformációval:

$$\tau = \mu\varepsilon, \tag{182}$$

ahol μ a nyírási modulus.
Egy izotróp lineáris viselkedésű rugalmas testnek két független anyagjellemzője van, tehát a nyírási modulus az egyszerű nyújtásnál megismert Young-modulusból és a Poisson-arányból kifejezhető.
Egyszerű nyírásnál térfogatváltozás nincs.

10.6. Szilárd testek deformáció-feszültség diagramja



A szilárd testek alakváltozásának jellegzetességei többfélék. Az ábra két tipikusnak mondható esetet vázol: rideg test és képlékeny test deformáció – feszültség diagramját nyújtás esetére. A függőleges tengelyen a σ húzófeszültség, a vízszintesen az ε relatív megnyúlás van feltüntetve. Kis ε értékeknél az alakváltozás rugalmas és érvényes a lineáris Hooke-törvény. Növelve a feszültséget, először a lineáris viselkedés sérül (A), majd elérjük a rugalmassági határt (B). Ezután az alakváltozás rugalmatlan. Érdekes még a C pont, itt van a folyási határ: a feszültséget nem kell tovább növelni, hogy a megnyúlás nőjön: az anyag megfolyik. A rideg anyag ezután igen hamar eltörik, míg a képlékeny anyagnál az ε még sokáig növelhető csökkenő feszültség mellett, mielőtt az anyag elszakadna.
Megjegyzendő, hogy a rugalmatlan alakváltozásnál hiszterézis jelensége is fellép, ami azt jelenti, hogy a deformáció, illetve feszültség csökkentésével nem ugyanazon a görbén megy vissza a folyamat, mint előre, és nem érjük el többé az origót: feszültségmentes állapotban is lesz megnyúlás az eredeti hosszhoz képest!

11. Fluidumok sztatikája

A deformálható test mozgásegyenletéből a = 0 esetre kapjuk a deformálható testek sztatikájának alapegyenletét:

$$\rho\,\mathbf{f} + \mathrm{div}\,\mathbf{T} = \mathbf{0} \tag{183}$$

Nyugvó fluidumban nyírófeszültségek nem lépnek fel. Sőt, a gyakorlatban fontos esetekben a fluidumban a nyomás izotróp, azaz a nyomóerő nem függ az iránytól. Ekkor: $\mathbf{T} = -p\cdot\mathbf{1}$, ahol p a nyomás, **1** pedig az egységtenzor. Az olyan testet, amiben a feszültségtenzor mindig ilyen, Pascal-testnek nevezzük.
Erre az esetre $\mathrm{div}\,\mathbf{T} = -\mathrm{grad}\,p$. Feltesszük továbbá, hogy a külső erők konzervatívak:
$\mathbf{f} = -\,\mathrm{grad}\,U$, ahol U a fajlagos potenciális energia.

A fluidum sztatikájának alapegyenlete tehát:

$$\rho\,\mathrm{grad}\,U + \mathrm{grad}\,p = \mathbf{0} \tag{184}$$

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a külső és belső erők összege a fluidum minden kis részénél zérus.

Most feltételezzük még, hogy a sűrűség csak a nyomástól függ, más módon nem függ a helytől, csak a nyomáson keresztül: ρ(p). Vezessük be a nyomástól függő P(p) nyomásfüggvényt a következő módon:

$$P(p) = \int 1/\rho \; dp \tag{185}$$

Ekkor $\mathrm{grad}\,p / \rho = \mathrm{grad}\,P$, ezért

$$\mathrm{grad}\,(U+P) = 0 \tag{186}$$

Tehát U+P = konstans az egész összefüggő fluidumban. Ez az egyenlet azt jelenti, hogy a nyugvó fluidumban az izobár felületek éppen azonosak az ekvipotenciális felületekkel.

11.1. Nyugvó fluidum nehézségi erőtérben

Mivel ekkor U = gz, az izobár felületek vízszintes síkok.

A nyomás magasságfüggését egyszerű, szemléletes meggondolással is meghatározhatjuk. Tekintsünk egy függőleges hasábot, s abban egy réteget z és z+dz között. A rétegre ható erők összege zérus:

$A (p - (p+dp) - \rho g dz) = 0$, amiből

$gz = - \int (dp/r)$ (187)

11.2. Állandó sűrűségű folyadék

Ekkor P = p/ρ, ami miatt

$p = p_0 - \rho g z$, (188)

azaz a nyomás a magassággal lineárisan csökken. Más megfogalmazásban a szabad felszíntől h mélységben a nyomás ρgh értékkel nagyobb, mint a felszínen. A ρgh mennyiséget hidrosztatikai nyomásnak is nevezik. A levegő nyomása a tengerszinten, átlagosan kb. 76 cm-es higanyoszlop nyomásával egyenlő (Torricelli-kísérlet), ez kb. 10 m magas vízoszlop hidrosztatikai nyomása.

11.3. Izoterm ideális gáz

A gáz állapotegyenletéből:

$\rho = bp$, ahol $b = M/RT$. (189)

A nyomásfüggvény:

$P = (\ln p) / b +$ konstans. (190)

Tehát a nyomás magasságfüggése:

$p = p_0 \cdot e^{-bgz}$ (191)

Ezt hívják barometrikus magasságformulának. Ugyanígy változik a gáz sűrűsége is:

$\rho = \rho_0 \cdot e^{-bgz}$ (192)

A statisztikus fizikában nagy szerepet játszik a Boltzmann-faktor, ami megadja, hogy a klasszikus T hőmérsékletű ideális gáz részecskéi hogyan oszlanak el az energiaszinteken, az E energiaszinten a betöltési szám (részecskeszám/állapotszám) éppen konstans $e^{-E/kT}$, ahol k a Boltzmann-állandó. Amint látjuk, a barometrikus magasságformula is ugyanerre az eredményre vezet, hiszen

$\rho = \rho_0 \cdot e^{-bgz} = \rho_0 \cdot e^{-Mgz/RT} = \rho_0 \cdot e^{-E/kT}$ (193)

11.4. Forgó folyadék

Tekintsünk egy hengert, amiben folyadék van, és tengelye körül forgassuk meg ω állandó szögsebességgel. A folyadékszint parabolikus profilt vesz fel.

E problémát együttforgó vonatkoztatási rendszerben kezelhetjük sztatikai problémának, az együttforgó rendszerben ugyanis a folyadék áll. Ám ilyen együttforgó, neminercia-rendszerben a folyadékra még a centrifugális erő is hat, egységnyi térfogatra ez $r\omega^2$, ahol r a forgástengelytől mért távolság. Ez az erőtér konzervatív, a hozzátartozó potenciál:

$U_{cf} = - r^2\omega^2/2$. (194)

Ebben az esetben (188) helyett most:

$gz - U_{cf} + p/r =$ konstans (195)

A szabad felszín egyenlete:

$z = r^2\omega^2/2g +$ konstans, azaz

$p = p_0 - \rho g z + \rho r^2\omega^2/2$. (196)

12. Fluidumok áramlása

Fluidumban nyugalmi állapotban nyírófeszültségek nem lépnek fel. *Ideális* a fluidum, ha ezt a sajátságát mozgás közben is megőrzi, míg *reális* –vagy más szóval *viszkózus*– fluidumok áramlásakor nyírófeszültségek is fellépnek.

A *fluidum* a gázok és a folyadékok összefoglaló neve. A gázok és folyadékok egyensúlyának és áramlásának törvényszerűségei ugyanis a legtöbb esetben együtt tárgyalhatók. A gázokra jellemző az összenyomhatóság, míg a folyadékok kevésbé összenyomhatók. *Inkompresszibilis* az a kontinuum, amely egyáltalán nem nyomható össze, azaz sűrűsége nem függ a feszültségektől.

Izotróp, ideális fluidumra érvényes a *Pascal-törvény*. A nyomás ilyenkor a fluidum egy pontjában minden irányban ugyanaz, és a nyomóerő mindig merőleges a felületre. A feszültségtenzor ilyenkor: $\underline{\mathbf{T}} = - p \cdot \underline{\mathbf{1}}$, ahol p a *nyomás*. Ugyanilyen alakú a feszültségtenzor, ha a fluidum viszkózus, de nyugalomban van.

A p nyomás persze függhet a helytől, és amint alább láthatjuk, a sebességtől is.

12.1. Áramlási alapfogalmak

Az áramlás legfontosabb fizikai jellemzője a sebesség. A **v** sebesség persze a hely függvénye, tehát egy vektortér. A sebességtér vektorvonalait áramvonalaknak nevezzük. Stacionárius áramlás esetén **v** csak a helytől függ, időtől nem. Ekkor az áramvonalak azonosak a fluidum részecskéinek pályáival. Itt csak stacionárius áramlásokkal foglalkozunk!

Áramlási csőnek nevezünk egy olyan hengerszerű tartományt, amelynek palástját áramvonalak alkotják. Ezért az áramlási csőből –éppen úgy, mint egy valódi csőből– a fluidum se ki, se be nem megy a paláston. Az áramlási csőben értelmezhető a tömegáram-erősség: a cső keresztmetszetén időegység alatt átment tömeg: I = dm/dt, ami viszont a tömegáram-sűrűség felületi integrálja, azaz fluxusa (Függelék): $I = \int \mathbf{J}\,d\mathbf{A}$.
ahol az integrálást a cső keresztmetszetére értjük. A tömegmegmaradás miatt stacionárius áramlásnál egy áramlási cső mentén

$$I = \text{állandó}. \qquad (197)$$

12.2. Kontinuitási egyenlet

A tömegáram-sűrűség és a sebesség közti kapcsolat:

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} \qquad (198)$$

Tekintsünk most olyan áramlási csövet, ahol **v** egy keresztmetszet mentén állandó. Ekkor a tömegmegmaradás (kontinuitási egyenlet):

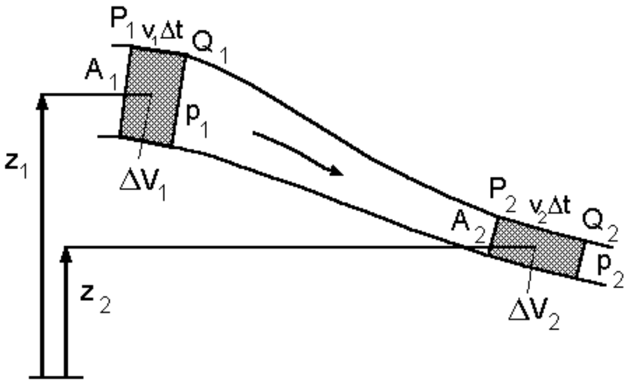
$$\rho v A = \text{konstans}. \qquad (199)$$

Inkompresszibilis és homogén folyadék sűrűsége állandó, nem függ sem a helytől, sem az időtől. Ezért ilyen folyadékra a kontinuitási egyenletből

$$vA = \text{konstans}, \qquad (200)$$

tehát a csőben nagyobb a sebesség a szűkületeknél.

12.3. A Bernoulli-egyenlet



Alkalmazzuk a kinetikus energia tételét egy *állandó sűrűségű* folyadék áramlására egy *áramlási csőben*. Tegyük fel, hogy a fluidum *stacionárius* áramlásakor az ábrán szereplő P_1 és P_2 közötti térfogat átmegy a Q_1 és Q_2 közötti térfogatba. A fizikai mennyiségek értékének megváltozásakor vegyük figyelembe, hogy a P_2Q_1 közös részt elhagyhatjuk, és a változást úgy számíthatjuk, mintha a P_1Q_1 közti térfogat ment volna át a P_2Q_2 térfogatba.
A tömegmegmaradás miatt a két sraffozott részben ugyanannyi a fluidum tömege, és mivel a sűrűség állandó ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$), ezért a két sraffozott csőrész térfogatának nagysága is azonos, $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$. A kiválasztott fluidum-rész kinetikus energiájának megváltozása:

$$\Delta E_{kin} = ½ (\rho_2 \Delta V_2 v_2^2 - \rho_1 \Delta V_1 v_1^2) = ½ \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2) \qquad (201)$$

Eközben a kiválasztott fluidum-részen végzett munka a nehézségi erők W_g és a nyomóerők W_p munkájából tevődik össze. Mivel a nehézségi erőtér konzervatív, ezért

$$W_g = -\Delta E_{pot} = \rho \Delta V g z_1 - \rho \Delta V g z_2 = \rho \Delta V g (z_1 - z_2) \qquad (202)$$

A nyomóerők a cső falán merőlegesek a sebességre, ezért ott a munka nulla. A nyomóerők a két keresztmetszetnél végeznek munkát: $W_p = p_1 \Delta V_1 - p_2 \Delta V_2 = (p_1 - p_2) \Delta V$.
Ezért

$$W = W_g + W_p = \rho \Delta V g (z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) \Delta V \qquad (203)$$

A kinetikus energia tétele szerint

$$W = \Delta E_{kin} ,$$

így –a fentieket felhasználva a kinetikus energia tételében– adódik a

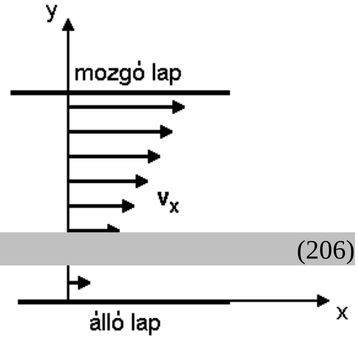
$$p + \rho g z + ½ \rho v^2 = \text{konstans} \qquad (204)$$

Bernoulli-egyenlet, amely tehát egy áramlási csőre érvényes, ha a közeg állandó sűrűségű, inkompresszibilis, az áramlás pedig stacionárius.

A Bernoulli-egyenlet következtében egy áramlási cső mentén a nyomás kisebb a nagyobb magasságokban és ott, ahol nagyobb az áramlási sebesség. Egyik alkalmazásaként levezethető, hogy egy edényből, amelyben H magasságban áll folyadék, az edény alján lévő kis nyíláson pontosan ugyanolyan sebességgel folyik ki a folyadék, mintha H magasságból szabadon esett volna:

$$v = \sqrt{2gH} . \qquad (205)$$

12.4. Viszkozitás



Fluidumok áramlásakor hasonló összefüggés áll fenn a feszültségtenzorra, mint amilyen az izotróp rugalmas szilárd test feszültségtenzorára, csak itt a dilatációs tenzor helyett a sebességgradiens tenzor szerepel. A viszkozitás mibenléte legegyszerűbben az ábrán látható elrendezésben szemléltethető. A viszkózus nyírófeszültség arányos a sebességgradiens nyírókomponensével:

$$T_{xy} = - \eta\ \delta v_x / \delta y \qquad (206)$$

Az η arányossági tényező a *viszkozitás*.

A viszkózus folyadékok áramlásánál már nem érvényes a Bernoulli-egyenlet: a nyomás még vízszintes, állandó keresztmetszetű csőben sem állandó, hanem a fluidum a nagyobb nyomású hely felől a kisebb nyomású hely felé áramlik. Kör keresztmetszetű csőre az jön ki, hogy az áramlási sebesség a középen a legnagyobb, a falnál zérus, közben a sebességprofil parabolikus. A térfogatáram-sűrűség arányos a nyomásgradienssel, továbbá arányos a cső sugarának 4. hatványával, fordítva arányos a viszkozitással:

$$dV/dt = -\pi/8 \cdot r^4 \cdot \Delta p/\ell, \qquad (207)$$

ahol ℓ a cső hossza, $-\Delta p = p_1 - p_2$ pedig a cső mentén a nyomásesés.

12.5. Turbulencia

Ha egy vízcsapot kinyitunk, akkor először a víz simán folyik ki, a vízsugár átlátszó. Ha a csapot jobban kinyitjuk, a vízsugár zuborgó, kavargó, átlátszatlan lesz. Az előbbi esetben az áramlás lamináris: a szomszédos részek szomszédosak maradnak, egymás mellett folynak tovább, az áramlás lamináris, rétegekben történik. Az utóbbi esetben az egyes részecskék pályája kaotikus, kusza görbe, a szomszédság nagyon hamar felbomlik, az áramlás turbulens, nem rétegekből tevődik össze. Létezik egy dimenziómentes szám, a Reynolds-szám, ami függ a cső sugarától, az áramlás sebességétől, a folyadék viszkozitásától és sűrűségétől, ami arra jellemző, hogy mikor vált át az áramlás laminárisból turbulensbe. Ha a Reynolds-szám egy kritikus érték alatt van (a többi paramétert konstanson tartva ez azt jelenti, hogy a sebesség egy kritikus érték alatt van), akkor az áramlás lamináris, fölötte pedig turbulens.

12.6. Közegellenállás, dinamikai felhajtóerő

Ha egy szilárd gömböt áramló ideális fluidumba helyezünk, akkor a gömbre az áramló fluidum nem gyakorol erőt. Igaz, hogy a gömb elülső pontjánál zérus a sebesség, ezért ott nagyobb a nyomás, de a gömb hátsó pontjánál teljesen szimmetrikus a helyzet, ezért az eredő erő zérus. ÁBRA!.

Ha a szilárd gömb viszkózus áramló fluidumban van, akkor a fluidum egy erőt gyakorol a testre, mintegy magával akarja vinni a belső súrlódás miatt. Kis sebességeknél ez a közegellenállási erő a sebességgel, nagyobb sebességeknél (amikor már turbulens az áramlás, és a gömbről örvények válnak le), a sebesség négyzetével arányos. Ez nemcsak gömbre, hanem más alakú testekre is érvényes, továbbá az arányossági tényező függ a keresztmetszettől és az alaktól is. Legkisebb a közegellenállási erő úgynevezett áramvonalas alak esetén.

Ha az áramló fluidumba helyezett szilárd test nem szimmetrikus az áramlásra nézve, akkor a közeg által gyakorolt erőnek a sebességre merőleges komponense is lesz. Ha pl. egy lapot helyezünk a vízszintes áramlás irányához képest ferdén (ábra), akkor a lapra hat egy felfelé mutató erő, ez a dinamikai felhajtóerő. A dinamikai felhajtóerő szintén a sebesség négyzetével arányos nagyobb sebességeknél és ez is függ az alaktól. Ez a jelenség fordul elő állatok úszásánál és repülésénél, repülőgépeknél.

MÉRLEGEGYENLETEK

A fizikai mennyiségek lehetnek *pontfüggvények* (térmennyiségek) és *halmazfüggvények*. Az utóbbiak esetében a tér egy halmazához tartozik egy érték. A szokásos szóhasználatban az **extenzív** mennyiségek olyan halmazfüggvények, amelyekre az **additivitás** követelménye teljesül:

$$E(A \cup B) = E(A) + E(B) \qquad \text{ha } A \cap B = \emptyset. \qquad (208)$$

Extenzív mennyiség (térfogati) *sűrűsége*: $\rho_E = dE/dV$. Értelmezés: a kiszemelt P pontot körülvesszük egy ΔV térfogatú tértartománnyal, ebben van ΔE mennyiség az E extenzív mennyiségből; az *átlagsűrűség*: ΔE/ΔV. Ennek határértéke, amint a ΔV tértartomány a P pontra zsugorodik, a sűrűség a P pontban.

Legyen E egy test extenzív mennyisége. Ennek megváltozása fizikailag lehetséges külső okok miatt (beáramlás a környezetből a test határfelületén át) vagy belső okok miatt (az E termelődése, *produkciója* a test belsejében): $\Delta E = (\Delta E)_k + (\Delta E)_b$. Beosztva a Δt időtartammal, és a $\Delta t \to 0$ határértékben kapjuk az E extenzív mennyiségre vonatkozó **globális (integrális**) *mérlegegyenletet*:

$$dE/dt = -I_E + P_E\ . \qquad (209)$$

Itt P_E az E mennyiség *forráserőssége*, I_E pedig az E mennyiségnek a test határfelületére vonatkozó *áramerőssége*.

Az E mennyiségnek valamely felületre vonatkozó *áramerőssége*: a felületen átment E mennyiség és az időtartam hányadosának határértéke. Ennek előjele függ attól, melyik átmeneti irányt tüntetjük ki.

A forráserősség extenzív mennyiség, sűrűsége a *forrássűrűség*. *Megmaradó* az a mennyiség, amelynek forráserőssége mindig zérus.

Az áramerősség is halmazfüggvény, de itt a halmazok kétdimenziósak: a szóban forgó felület részfelületei. Erre is értelmezhetünk tehát sűrűséget (felületegységre vonatkoztatott áramerősség-érték), ezt nevezzük *áramsűrűségnek*. Az áramerősség az áramsűrűség *fluxusa* (felületi integrálja):

$I = I\ \mathbf{J} \cdot \mathbf{dA}.$ (210)

A mérlegegyenletben szereplő tagokat pontfüggvények integráljaként állíthatjuk elő:

$dE/dt = d/dt\ I\ \rho_E\ dV = I\ \delta\rho_E /\delta t\ dV$ (ha a határfelület nem mozog) (211)

$I_E = \quad \mathbf{J}_E \cdot \mathbf{dA} = I\ \mathrm{div}\mathbf{J}\ dV$ (a Gauss-féle divergenciatétel alapján) (212)

$P_E = I\ \sigma_E\ dV$ (P_E extenzív, σ_E jelöli a sűrűségét, a *forrássűrűséget*) (213)

Az előforduló térfogati integrálok integrálási tartománya közös (t.i. a test által elfoglalt V tartomány), ezért a globális mérlegegyenletből:

$I\ (d\rho_E /dt + \mathrm{div}\mathbf{J}_E - \sigma_E)\ dV = 0.$ (214)

Ez az azonosság a test minden részére is fennáll, s ezért, ha az előforduló függvények folytonosak, akkor magának az integrandusnak kell eltűnnie:

$d\rho_E /dt + \mathrm{div}\mathbf{J}_E - \sigma_E = 0$ (215)

(ez a mérlegegyenlet lokális alakja)

A *térfogatáram-sűrűség*: $\mathbf{J}_v = \mathbf{v}.$ (216)

Ezért a konvektív *áramsűrűség*: $\mathbf{J}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{konv}} = \rho_E\ \mathbf{v}$, idő- és felületegységre vonatkoztatva ennyi E mennyiséget visz magával a mozgó közeg. A lokális mérlegben szereplő áramsűrűség a teljes áramsűrűség, ami a konvektív tagon kívül tartalmazhat *konduktív* (vezetési) tagot is:

$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{konv}} + \mathbf{J}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{kon}\mathrm{d}}$, tehát $\mathbf{J}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{kon}\mathrm{d}} = \mathbf{J}_E - \mathbf{J}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{konv}}$. (217)

A tömeg csak konvektív úton áramolhat, ezért a tömegáram-sűrűség:

$\mathbf{J}_M = \rho\mathbf{v}.$ (218)

A *tömegmérleg* lokális alakja:

$\delta\rho/\delta t + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0.$ (219)

Ezzel egyenértékű a *szubsztanciális* tömegmérleg:

$d\rho/dt + \rho\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} = 0.$ (220)

Inkompresszibilis közeg áramlása esetén $d\rho/dt = 0$, s ezért $\mathrm{div}\ \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

A lokális mérlegegyenletből matematikai azonosságok, valamint a kétféle időderivált közötti összefüggés felhasználásával kapjuk az E mennyiségre vonatkozó *szubsztanciális mérlegegyenletet*:

$\rho\ de/\delta t + \mathrm{div}\ \mathbf{J}_{\mathbf{E}}^{\mathbf{kon}\mathrm{d}} - \sigma_E = 0.$ (221)

FÜGGELÉK

A szekundum, a méter és a kilogramm

A szekundum (másodperc) csillagászati adaton alapult, úgy, hogy egy nap pontosan 24x3600 s. A csillagászati adatokban lévő bizonytalanságokat, változékonyságot küszöbölte ki az 1967-ben elfogadott és ma (2003-ban) is érvényes új definíció, ami már atomi adaton alapul, nevezetesen a Cs^{133} által emittált fény egy meghatározott spektrumvonalának frekvenciájára alapozták a szekundum definíciójában.

A 18. században két javaslat merült fel a méter definíciójára. Az egyik: olyan matematikai inga hossza, amelynek fél-lengésideje 1s. A Francia Akadémia 1791-ben a másik javaslatot fogadta el: a méter a Föld kerületének negyvenmilliomod-részeként definiálták, azaz a Föld kerülete 40.000 km. 1889-ben új definíciót fogadtak el: a méter egy – az első definícióhoz kapcsolódó mérések alapján gondosan elkészített etalon hossza. 1960-ban a korábbi definíciókban rejlő bizonytalanságokat úgy próbálták elkerülni, hogy a métert a Kr^{86} egy spektrumvonalának hullámhosszára alapozták.

1983-ban fogadták el a ma (2003-ban) is érvényes legújabb definíciót, ami a métert a fény sebességén keresztül definiálja, a fény vákuumbeli sebessége egészen pontosan (mindaddig, amíg ez a definíció érvényben lesz) 299.792.458 m/s, azaz majdnem 300.000 km/s.
A tömeg egységét, a kilogrammot először úgy definiálták, hogy 1 dm^3 víz tömege. Ezen az alapon készítették el 1889-ben a tömeg etalonját, ma is ez az etalon jelenti a kg nemzetközileg elfogadott definícióját.

A g értéke