1.2. METROLÓGIA ÉS HIBASZÁMíTÁS

1.2.1 Metrológiai alapfogalmak

A **metrológia** a mérések tudománya, a mérésekkel kapcsolatos ismereteket fogja össze.
Méréssel egy objektum valamilyen tulajdonságáról számszerű értéket kapunk. A **mérési eredményt** egy számmal (a **mértékszámmal**) és a **mértékegységgel** adjuk meg.
A mérést megismételve általában nem kapunk azonos mérési eredményeket. Egyrészt, mert a mérendő mennyiség változhat az idővel. De ha a mérendő mennyiség állandó is, a mérési eredményt a műszer állapota és a megfigyelést végző ember is befolyásolja.
Jelöljük a mérni kívánt mennyiség valóságos értékét x-szel, a mérési eredményt x_m-mel. A **mérés hibája**, Δx a mért érték és a valóságos érték különbsége:

$$\Delta x = x_m - x$$

és a relatív hiba:

$$\delta x = \Delta x / x$$

Hibatípusok

Véletlen hiba: A mérési eredmények a valóságos értéktől mindkét irányban azonos valószínűséggel, véletlenszerűen térnek el. Nagy számú mérés átlagát véve a véletlen hiba tetszőlegesen csökkenthető.
Rendszeres hiba: A mérési eredmények a valóságos értéktől eltérő érték körül ingadoznak. Oka a hibás vagy rosszul beállított műszer, de rendszeres hibát okoz az is, ha elhanyagolunk vagy rosszul veszünk figyelembe valamilyen, a mérést befolyásoló külső tényezőt (pl. hőmérsékletet vagy nyomást).

1.2.2. A hibaszámítás alapjai

A hibaszámítás a valószínűségszámítás és matematikai statisztika felhasználásával a mérés során fellépő véletlen hibák becslésére ad módot. A valószínűségszámítás alapvető eszközei a valószínűségi sűrűség- és eloszlásfüggvény, melyekkel jellemezzük egy-egy sokaságon a vizsgált tulajdonság, a valószínűségi változó eloszlását. Ezen függvények mellett gyakran használt mennyiségek egyes eloszlásparaméterek, melyekkel rövidebben lehet jellemezni az adott sokaságot: ezek elsősorban a *várható érték,* mely a valószínűségi változónak a sokaságra leginkább jellemző értéke, és a *variancia*, mely azt adja meg, mennyire térnek el az egyes értékek a várható értéktől (ill. ugyanezt jellemzi a *szórás*, a variancia négyzetgyöke). A matematikai statisztika módszereket ad arra, hogy egy bizonyos számú mérésből álló méréssorozat alapján megbecsüljük ezeket a paramétereket adott valószínűségi (ún. „konfidencia-„) szinten a sokaság elemszámánál sokkal kisebb minta alapján.

1.2.3. Méréssorozat kiértékelése

A várható érték, μ becslése: a sokaságból vett N elemszámú minta alapján az egész sokaságra vonatkozó átlagot, azaz a várható értéket, μ-t az egyes x_i mért adatok $\overline{x}$ átlagával becsüljük:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

A variancia, azaz szórásnégyzet becslése: az N számú mérés átlagának szórását $s_{\overline{x}}$-gal, a középérték korrigált tapasztalati szórásával (standard deviációjával) becsülhetjük:

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{(N-1)N}}$$

Δx hibaintervallum megadása bizonyos konfidenciaszintre

Mivel az átlagérték a várható értéknek csak becslése, fontos kérdés az, hogy mennyire jó ez a becslés. Az átlagérték körül megadhatunk egy intervallumot, amelyhez meghatározható –a minta elemszámának ismeretében– az, hogy mekkora valószínűséggel esik bele a kijelölt intervallumba a tényleges várható érték. Fordítva pedig, egy bizonyos valószínűségi (konfidencia-) szinthez kijelölhetünk egy bizonyos szélességű intervallumot az átlagérték körül. Az intervallum szélességének kiszámításához $s_{\bar{x}}$-ra, a középérték korrigált tapasztalati szórására és egy bizonyos paraméterértékre, az ún. Student-féle t-paraméter értékére van szükség, mely a minta elemszáma és a választott konfidenciaszint ismeretében kiolvasható az I. táblázatból.

I. táblázat: A Student-féle t paraméter értékei P konfidenciaszintnél és N mérésszámnál

N \ P	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**
2	3,078	6,314	12,706	25,452	63,657	127,32
3	1,886	2,920	4,303	6,205	9,925	14,089
4	1,638	2,353	3,182	4,176	5,841	7,453
5	1,553	2,132	2,776	3,495	4,604	5,598
6	1,476	2,015	2,571	3,163	4,032	4,773
7	1,440	1,943	2,447	2,969	3,707	4,317
8	1,415	1,895	2,365	2,841	3,499	4,029
9	1,397	1,860	2,306	2,752	3,355	3,832
10	1,383	1,833	2,262	2,685	3,250	3,690
20	1,328	1,729	2,093	2,433	2,861	3,174
∞	1,282	1,645	1,960	2,241	2,576	2,807

A Δx hibaintervallum $s_{\bar{x}}$ és t szorzata: $\Delta x = s_{\bar{x}} \cdot t$

A mérési eredményt a következő formában adjuk meg:

$$\xi \text{ (mért mennyiség)} = (\bar{x} \pm t\, s_{\bar{x}}) \text{ [mértékegység]}$$

Ez azt jelenti, hogy a mérendő mennyiség valóságos értéke a konfidenciaszintnek megfelelő valószínűséggel az $[\bar{x} - t\, s_{\bar{x}},\ \bar{x} + t\, s_{\bar{x}}]$ intervallumba esik.

Megadhatjuk a relatív hibaintervallumot is:

$$\xi \text{ (mért mennyiség)} = \bar{x} \text{ [mértékegység]} \pm 100\, t\, s_{\bar{x}} / \bar{x}\ \%$$

Ha vásárolunk valamilyen előre csomagolt árut vagy alkatrészt, melyeknek valamilyen mennyiségi jellemzője van (pl. tömeg, ellenállás), akkor az áru tömegén, vagy az ellenállás **névleges értékén** kívül sokszor feltüntetik a **tűrést** is, mely a névleges értéktől való megengedett eltérést jelenti. Ez tulajdonképpen egy konfidencia-intervallum, és általában 95% konfidenciaszintre van megállapítva. Ha egy 100 darabos szállítmányból 3 darab kiesik a tűrésből, még nem illik reklamálni a szállítónál, de ha 10 kiesik, akkor már lehet.

1.2.4. Közvetett mérés hibája (hibaterjedés)

Tegyük fel, hogy meg akarunk határozni egy ϕ mennyiséget, melyet nem tudunk közvetlenül mérni, de ϕ függ az x,y,z,... mennyiségektől és az utóbbiak viszont megmérhetők; megbecsüljük azok várható értékét és varianciáját, azaz ismerjük az $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$,... átlagértékeket és a $\Delta x, \Delta y, \Delta z$,... hibaintervallumokat bizonyos konfidenciaszinten. Ezek alapján ϕ várható értéke kiszámítható az $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$,... átlagértékek $\phi(x,y,z,...)$ függvénybe való behelyettesítésével, és a $\Delta\phi$ hibaintervallum pedig a következő módszerrel:

$$\Delta\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi(x,y,z,..)}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial \phi(x,y,z,..)}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial \phi(x,y,z,..)}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2 + ...}$$

ahol a parciális differenciálhányadosok az $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $z = \bar{z}$, ... helyen számítandók.

1.2.5. Lineáris regresszió (a legkisebb négyzetek módszere)

Sok esetben az a feladat, hogy két mennyiség közötti függvénykapcsolatot akarunk "kimérni", méréssel meghatározni. Ez azt jelenti, hogy a függvény alakját ismerjük, vagy ismertnek tételezzük fel, és a függvény paramétereit akarjuk a méréssel megállapítani.

Tegyük fel, hogy x-et pontosan tudjuk szabályozni, illetve mérni, és N darab x_i értéknél meghatározzuk az y_i értékeket. Feltételezzük azt is, hogy y varianciája független x értékétől, a mérési intervallumban állandó. Az (x_i, y_i) pontokra egy olyan görbét kell illesztenünk, mely azokhoz a "legközelebb" halad. A mérési pontoknak a görbétől való távolságát jellemezhetjük az y-beli eltérések négyzetösszegével:

$$S(\alpha,\beta,...) = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - f\left(x_i\right)\right)^2$$

Azt kívánjuk, hogy S minimális legyen. Ehhez az szükséges, hogy S-nek az $\alpha,\beta,...$ paraméterek szerinti parciális deriváltjai zérussal legyenek egyenlők:

$$\partial S / \partial \alpha = 0, \qquad \partial S / \partial \beta = 0$$

Ez a paraméterek számával azonos számú algebrai egyenletet jelent, melyekből a paraméterek értéke meghatározható.

Ha f lineáris függvény: $y = a x + b$, akkor két illesztendő paraméter van, a és b:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \Sigma \ (y_i - ax_i+b)\, x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad a\, \Sigma x_i^2 + b\, \Sigma x_i = \Sigma x_i y_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \Sigma \ (y_i - ax_i+b) = 0 \quad \Rightarrow \quad a\, \Sigma x_i + N \cdot b = \Sigma y_i$$

Bevezetve a következő átlagértékeket:

$$\overline{x} = 1/N \ \Sigma x_i , \qquad \overline{y} = 1/N \ \Sigma y_i , \qquad \overline{xy} = 1/N\, \Sigma (x_i y_i) , \qquad \overline{x^2} = 1/N\, \Sigma (x_i)^2$$

az egyenletrendszer megoldása:

$$a = (\overline{x}\,\overline{y} - \overline{xy}) / (\overline{x}^2 - \overline{x^2}) , \qquad b = \overline{y} - a\, \overline{x} .$$