

VEKTORSZÁMÍTÁS

1. VEKTORALGEBRA

1.1. A vektor szemléletes értelmezése

Azok a fizikai mennyiségek, melyeknek nagyságukon kívül irányuk is van, **vektorok**. (A vektorok absztrakt matematikai definíciójában döntő szerepe van az összeadásnak és a skalárral való szorzásnak. Az olyan halmazok elemeit nevezik vektoroknak, amelyek elemeire értelmezve vannak ezek a műveletek, és a műveletek lényeges szabályai megegyeznek az irányított egyenes szakaszok összeadásának és számmal való szorzásának főbb szabályaival.)

A vektort egyértelműen megadhatjuk a hosszával és az irányával; nem tekintünk különbözőnek két vektort, ha azok párhuzamos eltolással átvihetők egymásba.

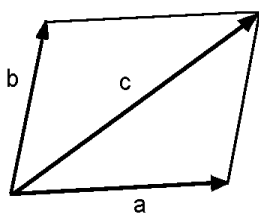
1.2. A vektor abszolút értéke

A vektor kezdő- és végpontjának távolságát a vektor **abszolút értékének** (**hosszának**, **nagyságának**) nevezzük. Jelölése: $|\mathbf{a}|$ vagy a .

Ha a vektor hossza egységnyi, akkor a vektort **egységvektornak**, ha nulla, akkor **nullvektornak** mondjuk. Nullvektor csak egy van, de egységvektorból végtelen sok különböző van.

1.3. Vektorok összeadása

Két vektor összegét a paralelogramma-szabály definiálja:



Az összeadás invertálható művelet, inverz művelete a kivonás. Tehát ha

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}, \text{ akkor (és csak akkor)}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{c} - \mathbf{b}.$$

1.4. Vektor szorzása skalárral

Az \mathbf{a} vektornak λ számmal való szorzata

$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ egy olyan vektor, melynek nagysága

$$|\mathbf{b}| = |\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|,$$

iránya pedig megegyezik az \mathbf{a} vektor irányával, ha $\lambda > 0$, és ellentétes, ha $\lambda < 0$.

1.5. A skalárszorzat

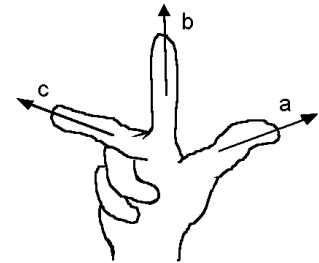
Két vektorhoz, **a**-hoz és **b**-hez rendeljünk hozzá egy számot: a két vektor abszolút értékének és az általuk közbezárt szög koszinuszának szorzatát. Ezt a számot a két vektor **skaláris** (belső) **szorzatának** nevezzük:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Szokásos jelölések még (\mathbf{a}, \mathbf{b}) és $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ is.

1.6. Vektorszorzat

Két vektorhoz, **a**-hoz és **b**-hez rendeljünk hozzá egy **c** vektort, melynek nagysága a két vektor által meghatározott paralelogramma területe, iránya pedig merőleges az **a** és **b** vektorok által meghatározott síkra, úgy, hogy az **a**, **b** és **c** vektorok jobbrandszert alkossanak, azaz a **c** vektor végpontjából nézve az **a** vektort π -nél kisebb szögű pozitív (az óramutató járásával ellentétes) irányú forgatás vigye át a **b** vektor irányába. (Szemléletesebben. ha a jobb kéz hüvelykujja az **a**, mutatóujja a **b** vektor irányába mutat, akkor a középső ujj beállítható a **c** vektor irányába.) Az így definiált **c** vektort az **a** és **b** vektor **vektoriális** (külső) **szorzatának** nevezzük:



$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Szokásos jelölés még $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ is.

A vektorszorzat abszolút értéke:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| |\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})|.$$

1.7. Vetület

Az **a** vektor (merőleges) vetülete a **b** vektor irányára:

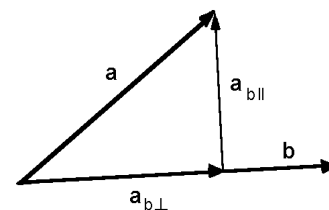
$$a_b = |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{e}_b = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \quad \text{a } \mathbf{b} \text{ irányú egységvektor. Az}$$

$$\mathbf{a}_{b\parallel} = a_b \mathbf{e}_b = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_b) \mathbf{e}_b$$

vektort az **a** vektor **b** irányú (vektor-)komponensének nevezzük.

Az **a** vektor felbontható egy **b** irányú és egy **b**-re merőleges komponens összegére:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{b\parallel} + \mathbf{a}_{b\perp}$$



A **b** vektorra merőleges $\mathbf{a}_{b\perp}$ komponens nagyságát a Pitagorasz-tétellel kapjuk:

$$|\mathbf{a}_{b\perp}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_b^2} = |\mathbf{a}| |\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})|.$$

A vetületek jelentős szerepet játszanak a vektorok szorzásánál - ezt mutatja az alábbi két azonosság:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| a_b = a_b |\mathbf{b}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_{b\parallel}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}_{b\perp}| = |\mathbf{a}_{b\perp}| |\mathbf{b}|$$

1.8. A vektoralgebra fontosabb szabályai és azonosságai

Legyenek \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} tetszőleges vektorok, λ és μ tetszőleges skalárok.

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

$$\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$$

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, akkor (és csak akkor) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

$$\lambda(\mu \mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ tehát a vektorszorzat antikommutatív!

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})$$

ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor (és csak akkor) $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

A hármasszorzat kifejtési tétele:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

Végül megemlítjük az ún. vegyes szorzatot:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c},$$

melynek értéke -előjeltől eltekintve- a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogatával egyenlő.

1.9. Vektorok Descartes-féle koordinátái

Legyenek \mathbf{i} , \mathbf{j} és \mathbf{k} ortonormált bázisvektorok, amelyek jobbrendszer alkotnak:

$$|\mathbf{i}|^2 = |\mathbf{j}|^2 = |\mathbf{k}|^2 = 1; \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$$

Ekkor bármely \mathbf{a} vektor egyértelműen felírható három merőleges komponens összegeként:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

Az a_x, a_y, a_z számokat az \mathbf{a} vektor koordinátáinak nevezzük az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisvektorok által meghatározott jobbsodrású Descartes-féle (x, y, z) koordinátarendszerben.

1.10. Vektorok közötti műveletek Descartes-féle koordinátákban

Összeadás: ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, akkor $c_x = a_x + b_x$, stb.

Szorzás skalárral: ha $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a}$, akkor $c_x = \lambda a_x$, stb.

Skalárszorzat: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Vektorszorzat: ha $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, akkor $c_x = a_y b_z - a_z b_y$, stb.

Az összeadás, skalárral való szorzás és a vektoriális szorzat y koordinátáját az x koordináta kifejezéséből ciklikus permutációval kapjuk az x index helyett y-t, y helyett z-t és z helyett x-et írva. A z koordinátára vonatkozó kifejezéseket ismételt ciklikus permutációval kapjuk meg.

A vektorszorzatot az alábbi determináns kifejtésével is megkaphatjuk:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Vektor abszolút értéke:

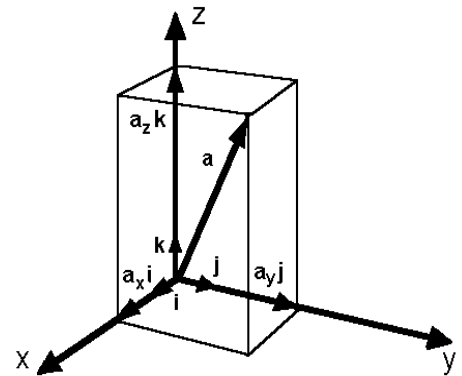
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

A vektornak a koordinátatengelyekkel bezárt szögeinek koszinuszai, azaz a vektor iránykoszinuszai:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}$$

Az iránykoszinuszok egyben az \mathbf{a} irányú \mathbf{e}_a egységvektor koordinátái, ezért

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

**2. VEKTOR-SKALÁR FÜGGVÉNY**

A vektor-skalár függvény független változója skalár, függő változója vektor. Ilyen függvényekre a határérték, folytonosság, differenciálhatóság fogalma a valós függvényeknél tanultakhoz hasonlóan alkalmazható.

Az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ függvény határértéke a $t = t_0$ pontban \mathbf{a}_0 , vagyis

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0, \quad \text{ha tetszőleges } \varepsilon > 0 \text{ számhoz található olyan } \delta > 0, \text{ hogy}$$

$$|\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0| < \varepsilon, \quad \text{ha } |t - t_0| < \delta.$$

Az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ függvény a t_0 pontban folytonos, ha létezik határértéke, és az egyenlő a függvényértékkel:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t_0)$$

A $t = t_0$ pontban az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ függvény differenciálható, ha létezik a

$$\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t_0)}{t - t_0} \text{ differenciahányados határértéke } t = t_0\text{-ban. Ha ez a határérték } \mathbf{b},$$

akkor \mathbf{b} -t az $\mathbf{a}(t)$ t_0 -beli **differenciálhányadosának**, **deriváltjának** nevezzük. Jelölése:

$$\dot{\mathbf{a}}(t_0) = \left. \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right|_{t=t_0} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t_0)}{t - t_0}$$

A differenciálhányadost minden pontban képezve kapunk egy újabb vektor-skalár függvényt, a derivált függvényt:

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}(t)$$

Ha ez a függvény is differenciálható, akkor deriváltját az $\mathbf{a}(t)$ függvény második differenciálhányadosának nevezzük:

$$\ddot{\mathbf{a}}(t) = \frac{d^2 \mathbf{a}}{dt^2} = \frac{d\dot{\mathbf{a}}(t)}{dt}$$

Hasonló módon definiálhatjuk a magasabbrendű deriváltakat.

A skalár-skalár függvények differenciálási szabályaival analóg összefüggések állnak fenn vektor-skalár függvényekre is. Ha $\lambda(t)$ differenciálható skalár-skalár függvény, $\mathbf{a}(t)$ és $\mathbf{b}(t)$ differenciálható vektor-skalár függvények, akkor az alábbi differenciálási szabályok alkalmazhatók:

Összeg differenciálása:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)] = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

Szorzat differenciálása:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\lambda(t)\mathbf{a}(t)] &= \frac{d\lambda}{dt} \mathbf{a} + \lambda \frac{d\mathbf{a}}{dt} \\ \frac{d}{dt} [\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{b}(t)] &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} \\ \frac{d}{dt} [\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)] &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \end{aligned}$$

Közvetett függvény differenciálása:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}(\lambda(t)) = \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dt}$$

Ha az $\mathbf{a}(t)$ vektorokat közös kezdőpontból mérjük fel, akkor a vektorok végpontjai egy térgörbét írnak le, miközben a t változó értéke végigfut egy intervallumon; az $\dot{\mathbf{a}}(t)$ derivált vektor pedig a térgörbe érintőjének irányába mutat. Ha az $\mathbf{a}(t)$ vektor egységvektor, akkor a térgörbe egy gömbfelületen lesz rajta, és az $\dot{\mathbf{a}}(t)$ derivált vektor merőleges lesz az $\mathbf{a}(t)$ -re. Ezt a következőképpen láthatjuk be.

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{a}(t)] = 2\mathbf{a}(t) \cdot \dot{\mathbf{a}}(t) = \frac{d}{dt} |\mathbf{a}(t)|^2 = \frac{d}{dt} \{1\} = 0$$

Tehát mivel $\mathbf{a}(t)$ és $\dot{\mathbf{a}}(t)$ skalárszorzata zérus, a két vektor merőleges egymásra.

2.1. Vektor-skalár függvény Descartes-féle koordinátákban

Rögzített Descartes-féle koordinátarendszerben a vektort megadhatjuk koordinátaival, ezért az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ függvény három skalár-skalár függvénnyel egyenértékű:

$$a_x = a_x(t), \quad a_y = a_y(t), \quad a_z = a_z(t)$$

Ezek az egyenletek az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ függvény által meghatározott térgörbe paraméteres egyenletei. Ha a t paramétert valamelyik egyenletből kifejezzük és behelyettesítjük a másik kettőbe, kapjuk a térgörbe egyenletét

$$f(a_x, a_y, a_z) = 0, \quad g(a_x, a_y, a_z) = 0 \quad \text{alakban.}$$

A vektor-skalár függvények tulajdonságai megfogalmazhatók a koordinátáik segítségével is. Így pl. bebizonyítható, hogy az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ függvény akkor és csak akkor differenciálható, ha az $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ koordináták mindegyike differenciálható, és ekkor fennáll az

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = \dot{a}_x(t)\mathbf{i} + \dot{a}_y(t)\mathbf{j} + \dot{a}_z(t)\mathbf{k} \quad \text{összefüggés. Hasonló összefüggés áll fenn}$$

magasabb rendű deriváltakra.

3. SKALÁR- ÉS VEKTORTEREK

A fizikában gyakran előfordul, hogy egyes mennyiségek értéke függ a helytől. Mivel a helyet a helyvektorral adhatjuk meg, így ezeknek a mennyiségeknek a helyfüggését olyan függvények írják le, melyeknek független változója vektor.

Azokat a függvényeket, melyeknek független változója vektor, függő változója pedig skalár, **skalár-vektor függvényeknek** vagy **skalártereknek** nevezzük. Azokat a függvényeket pedig, melyeknek mindkét változója vektor, **vektor-vektor függvényeknek** vagy **vektortereknek** nevezzük.

Az ilyen típusú függvényekre hasonló módon értelmezhetjük a határérték és a folytonosság fogalmát, mint a vektor-skalár függvényekre. A képletek alakilag változatlanok maradnak, csak a független vektor változót kell az ott szereplő t helyébe írni, a függő változó helyébe pedig a megfelelő skalár vagy vektor függő változót, attól függően, hogy skalár- vagy vektorterről van szó. A differenciálhányados fogalmát azonban nem lehet közvetlenül a vektor-skalár függvény differenciálhányadosának mintájára értelmezni, hiszen a független változó jelen esetben vektor, mellyel osztani nem lehet.

3.1. Skalártér szintfelületei

Legyen

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r})$$

egy skalártér. Mivel az \mathbf{r} vektort kifejezhetjük x, y, z Descartes-féle koordinátaival:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

ezért a skalárteret egy háromváltozós függvénnyel is leírhatjuk:

$$\varphi = \varphi(x, y, z).$$

A skalártér szemléltetésére bevezethetjük a **szintfelületek** (nívófelületek) fogalmát. A szintfelületek azon \mathbf{r} pontok mértani helyei, amelyekre a függvény értéke állandó. A szintfelületek egyenlete Descartes-féle koordinátákban:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1 = \text{konst.}$$

Különböző φ_1 értékekhez különböző szintfelületek tartoznak, így a $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ skalártérhez egyparaméteres szintfelület-sereg tartozik - paraméternek tekinthetjük a φ_1 értéket.

A hőmérséklet, a nyomás, ill. a potenciál térbeli eloszlását leíró skalárterek szintfelületeit izoterma, izobár, ill. ekvipotenciális felületeknek nevezzük.

3.2. Iránymenti derivált és gradiens

A közönséges derivált a függő változó változási sebességét jelenti. Skalárterek esetén bevezetjük az **iránymenti derivált** fogalmát. Legyen \mathbf{e} egy egységvektor. A $\varphi = \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z)$ skalártér \mathbf{e} irányú iránymenti deriváltjának az \mathbf{r}_0 pontban az ehhez az irányhoz tartozó függvényérték-változási sebességet nevezzük:

$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{\mathbf{r}_0} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r}_0 + \Delta s \mathbf{e}) - \varphi(\mathbf{r}_0)}{\Delta s}$$

Látható, hogy ez a derivált egyenlő a $\hat{\varphi}: s \mapsto \varphi(\mathbf{r}_0 + s\mathbf{e})$ függvénynek s szerinti közönséges deriváltjával az $s=0$ pontban:

$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{\mathbf{r}_0} = \left. \frac{d\varphi(\mathbf{r}_0 + s\mathbf{e})}{ds} \right|_{s=0}$$

Az iránymenti derivált segítségével szemléletesen definiálhatjuk a **gradiens** fogalmát. Képezzük az \mathbf{r}_0 pontban az összes iránymenti deriváltat, majd keressük meg azt az \mathbf{e}_0 egységvektort, amelyhez tartozó iránymenti derivált a legnagyobb. Az \mathbf{r}_0 pontban a gradiens vektor abszolút értéke egyenlő a legnagyobb iránymenti deriválttal, iránya pedig az \mathbf{e}_0 irányával megegyező. A gradiens abszolút értéke tehát az adott pontbeli legnagyobb függvényérték-változási sebességet jelenti, iránya pedig a leggyorsabb növekedés irányába mutat.

A gradiens vektor definiálása történhet más módon, a közönséges derivált mintájára is. Ehhez azonban nem használható a differenciahányados alak, mivel vektor nem kerülhet a nevezőbe. Viszont a nevezővel átszorozva a következőképpen definiálható egy skálár-skálár függvény deriváltja: az $y=y(x)$ függvény deriváltja az x_0 pontban y' , ha y megváltozása

$$\Delta y = y'(x_0) \Delta x + \varepsilon(x_0, \Delta x) \Delta x$$

alakban felírható, ahol

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(x_0, \Delta x) = 0.$$

Ennek mintájára egy $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ skálár-vektor függvény deriváltja az \mathbf{r}_0 pontban a $\Phi = \text{grad} \varphi$ vektor, ha

$$\Delta \varphi = \text{grad} \varphi \cdot \Delta \mathbf{r} + \varepsilon(\mathbf{r}_0, \Delta \mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r}$$

alakban felírható, ahol

$$\lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} \varepsilon(\mathbf{r}_0, \Delta \mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

3.3. Iránymenti derivált és gradiens Descartes-féle koordinátákban

Legyenek az \mathbf{e} egységvektor koordinátái e_x, e_y, e_z , az \mathbf{r}_0 ponté pedig x_0, y_0, z_0 . Akkor az iránymenti derivált a közvetett függvényre vonatkozó differenciálási szabály felhasználásával:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{\mathbf{r}_0} &= \left. \frac{d\varphi(\mathbf{r}_0 + s\mathbf{e})}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} \varphi(x_0 + se_x, y_0 + se_y, z_0 + se_z) \right|_{s=0} = \\ &= \left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}_0} \cdot e_x + \left. \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}_0} \cdot e_y + \left. \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}_0} \cdot e_z, \end{aligned}$$

ami az \mathbf{e} vektor skalárszorzata a $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)$ vektorral. Az utóbbi éppen a gradiens vektor Descartes-féle koordinátákban kifejezve:

$$\mathit{grad}\varphi = \frac{d\varphi}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \mathbf{k}, \text{ amivel tehát}$$

$$\left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{\mathbf{r}_0} = \mathit{grad}\varphi \Big|_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{e} = \left| \mathit{grad}\varphi \Big|_{\mathbf{r}_0} \right| \cdot \cos\alpha$$

ahol α a $\mathit{grad}\varphi$ és az \mathbf{e} vektorok által bezárt szög. Az utóbbi alakból az is látható, hogy az iránymenti derivált maximuma éppen $\mathit{grad}\varphi$ ($\cos\alpha=1$). Másrészt $-\mathit{grad}\varphi$ éppen a leggyorsabb csökkenés irányába mutat ($\cos\alpha=-1$). Ha viszont $\mathit{grad}\varphi$ és \mathbf{e} merőlegesek egymásra ($\cos\alpha=0$), az iránymenti derivált zérus, azaz a $\mathit{grad}\varphi$ merőleges a $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ skalártér szintfelületeire.

3.4. A vektortér vektorvonalai

Legyen

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$$

egy vektortér. Az \mathbf{a} vektor koordinátaival kifejezhető, ezért az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektortér egyenértékűen megadható az

$$a_x = a_x(\mathbf{r}) = a_x(x, y, z)$$

$$a_y = a_y(\mathbf{r}) = a_y(x, y, z)$$

$$a_z = a_z(\mathbf{r}) = a_z(x, y, z)$$

három skalártérrel, ill. három darab háromváltozós függvénnyel.

A vektortér szemléltetésére bevezetjük a **vektorvonalak** fogalmát. A vektorvonalak érintője bármely pontban egyező irányú az ahhoz a ponthoz tartozó függvényérték irányával.

A fizikában előforduló két legfontosabb vektortér: az erőter -ekkor az \mathbf{a} vektor térerősséget jelent-, és az áramlási tér -ekkor az \mathbf{a} vektor az áramló folyadék sebességét jelenti. Az erőter vektorvonalait erővonalaknak, az áramlási tér vektorvonalait áramvonalaknak nevezzük.

Szokás a vektortér függő változójának $|\mathbf{a}|$ abszolút értékét a vektorvonalak sűrűségével jellemezni oly módon, hogy a vektorvonalakra merőleges egységnyi felületen éppen annyi vektorvonal haladjon át, amennyi a függő változó abszolút értéke (ld. később a fluxust).

3.5. Vektorterek integráljai

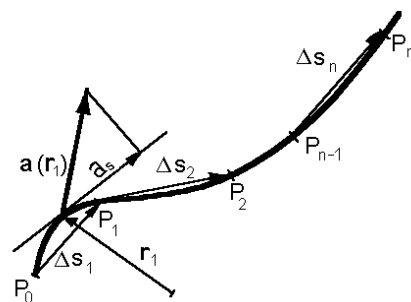
3.5.1. Vonalintegrál

Legyen g egy irányított térgörbe, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ pedig egy vektortér. Osszuk fel a g görbét n részre, az osztópontok legyenek P_0, P_1, \dots, P_n . Jelöljük a $P_{i-1}P_i$ vektort $\Delta \mathbf{s}_i$ -vel, a $P_{i-1}P_i$ görbeív valamely közbenső pontjának helyvektorát \mathbf{r}_i -vel. Képezzük a

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{s}_i$$

integrálközelítő összeget. Ennek az összegnek a "végtelenül finomodó beosztásra vonatkozó határértéke" a **vonallintegrál**:

$$\lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta \mathbf{s}_i = \int_g \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_g a_s ds,$$



ahol ds jelöli az ívhosszelemet, a_s pedig az \mathbf{a} vektornak a görbe érintője irányába eső vetületét.

Descartes-féle koordinátarendszerben a vonallintegrál egy közönséges egyváltozós határozott integrállá alakítható át. Legyen adott a g görbe paraméteres alakban (a paraméter lehet pl. az ívhossz vagy az idő):

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad z = z(\tau), \quad \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$$

Ekkor a vonallintegrál a következőképpen alakítható át:

$$\int_g \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_g (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ a_x[x(\tau), y(\tau), z(\tau)] \frac{dx(\tau)}{d\tau} + a_y[x(\tau), y(\tau), z(\tau)] \frac{dy(\tau)}{d\tau} + a_z[x(\tau), y(\tau), z(\tau)] \frac{dz(\tau)}{d\tau} \right\} d\tau$$

3.5.2. Felületi integrál

Legyen A egy felület, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ pedig egy vektortér. Osszuk be az A felületet n részre, a részek területei: $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$. Mindegyik részfelületen válasszunk ki egy pontot, melyek helyvektorai: $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$. A felület normálisa az \mathbf{r} pontban legyen $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Képezzük a

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i) \Delta A_i$$

integrálközelítő összeget. Ennek az összegnek a "végtelenül finomodó beosztásra vonatkozó határértéke" a **felületi integrál**:

$$\lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i) \Delta A_i = \int_A \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A} = \int_A a_n dA \equiv \Phi_a, \quad \text{ahol}$$

$$a_n = \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r})$$

az \mathbf{a} vektor normális irányú komponense. Az $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektortérnek az A felületre vett felületi integrálját az \mathbf{a} **fluxusának** nevezzük. A vektorvonalak sűrűségének szokásos megválasztása esetén a fluxus éppen egyenlő az A felületen áthaladó vektorvonalak számával.

Ha a felület normálvektorának \mathbf{n} helyett $-\mathbf{n}$ -et választjuk, akkor a felületi integrál előjelet vált.

Bizonyos speciális esetekben az egyik irány kitüntetett irány:

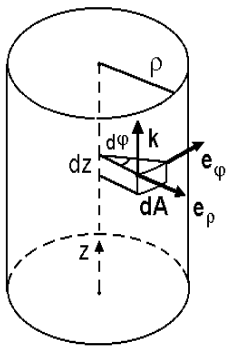
- 1./ zárt felület esetében mindig a "külső" (kifelé mutató) normálist választjuk;
- 2./ ha a felületet egy irányított zárt görbe határolja, akkor a felület normálisát úgy választjuk meg, hogy az a görbe körüljárási irányával jobbcsavart alkosson.

Lerögzítve a felület normálisának irányát, a felületen a zárt görbét mindig olyan körüljárással vesszük fel, hogy a normális iránya azzal jobbcsavart alkosson.

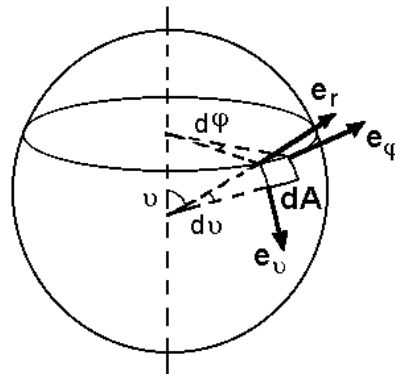
Ezek a konvenciók különösen olyan azonosságok alkalmazásánál fontosak, ahol egyidejűleg többféle integrál fordul elő (ld. később Gauss-Osztrogradszkij-tétel, Stokes-tétel).

A felületi integrál általában kétszeres integrállal számítható ki. Az integrál kiszámításához szükséges, hogy a dA felületelemet a koordinátákkal és a koordináta-differenciálokkal fejezzük ki.

Henger-, ill. gömbfelület esetében a dA felületelemet célszerű úgy megválasztani, hogy élei az \mathbf{e}_φ , \mathbf{k} , ill. az \mathbf{e}_φ , \mathbf{e}_ν bázisvektorok irányába mutassanak.



$$dA = \rho d\varphi dz$$



$$dA = r^2 \sin \nu d\nu d\varphi$$

3.5.3. Vektorértékű vonal- és felületi integrál

Ha a vonalintegrál integrálközelítő összegében a skaláris szorzást vektoriális szorzásra cseréljük ki, akkor a

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}(\mathbf{r}_i) \times \Delta \mathbf{s}_i$$

integrálközelítő összeget kapjuk, melynek határértéke az

$$\int_g \mathbf{a} \times d\mathbf{r}$$

vektorértékű vonalintegrál.

Hasonlóan a

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}(\mathbf{r}_i) \times \mathbf{n}(\mathbf{r}_i) \Delta A_i$$

integrálközelítő összeg határértéke az

$$\int_A \mathbf{a} \times d\mathbf{A}$$

vektorértékű felületi integrál.

3.5.4. Vektortér térfogati integrálja

Legyen $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ egy vektortér, V pedig a tér egy tartománya. Osszuk be a V tartományt n részre, melyek térfogatai: $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. Minden résztartományból válasszunk ki egy pontot, melyek helyvektorai: $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$. Képezzük a

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{a}(\mathbf{r}_i) \Delta V_i$$

integrálközelítő összeget. Ennek az összegnek a "végtelenül finomodó beosztásra vonatkozó határértéke" a

$$\int_V \mathbf{a}(\mathbf{r}) dV$$

térfogati integrál.

Henger, ill. gömb esetén célszerű a dV térfogatelemet téglatestnek választani, melynek élei a henger-, ill. polárkoordináta-rendszer bázisvektorai irányába mutatnak; ekkor:

$$\text{hengernél: } dV = dA \, d\rho = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz,$$

$$\text{gömbnél: } dV = dA \, dr = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi.$$

3.5.5. Az integrálok tulajdonságai

A fentebb tárgyalt integrálokra is érvényesek a közös integrálszámítás fontosabb szabályai:

- összeg tagonként integrálható;
- konstans az integráljel elé kiemelhető;
- egymásba nem nyúló tartományok (intervallumok, felületek) egyesítésére vett integrál egyenlő a résztartományokra vett integrálok összegével.

3.6. Rotáció

Legyen $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ egy vektortér, S pedig egy, az \mathbf{r} ponton átmenő sík, melynek normálvektora \mathbf{n} . Az S síkon vegyünk fel egy irányított zárt g görbét úgy, hogy az \mathbf{r} pont a görbe belsejébe essen. Az

$$\frac{1}{\Delta A} \oint_g \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

mennyiség határértékét, miközben a (rögzített) S síkban lévő g görbe a (rögzített) \mathbf{r} pontra zsugorodik, jelöljük b_n -nel:

$$b_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_g \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r},$$

ahol ΔA jelöli a g görbe által körülzárt területet. Az \mathbf{r} pontot továbbra is rögzítve, de az S síkot (így az \mathbf{n} normálvektort is) változtatva, minden \mathbf{n} -hez kapunk egy b_n értéket. Kimutatható, hogy az így kapott b_n értékek egy vektornak az \mathbf{n} irányú komponensei; ezt a vektort az \mathbf{a} vektor **rotációjának** nevezzük az \mathbf{r} pontban:

$$(\mathit{rota}) \cdot \mathbf{n} = (\mathit{rota})_n = \mathit{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_g \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

Kimutatható, hogy Descartes-koordinátákban

$$\mathit{rot}_x \mathbf{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$$

A másik két koordinátát ciklikus permutációval kapjuk:

$$\mathit{rot}_y \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}$$

$$\mathit{rot}_z \mathbf{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

A $\oint_g \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$ mennyiséget a vektortérnek a g görbén vett **cirkulációjának** nevezzük. Ez a

mennyiség a vektortér vektorvonalainak csavarodásával függ össze. A cirkulációnak és a bezárt felületnek a hányadosát, ami a rotáció definíciójában szerepel, átlagos felületi örvénysűrűségnek nevezzük. Ha az \mathbf{a} vektortér áramlási tér, akkor a rotáció az áramlás forgó, örvénylő jellegével függ össze.

3.7. Divergencia

Az $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ vektortér fluxusa egy zárt A felületen megadja az A felület belsejéből kijövő vektorvonalak számát (ez természetesen úgy értendő, hogy a felületbe bemenő vektorvonalak negatív előjellel jönnek számításba). Ezt a mennyiséget az \mathbf{a} vektortér **forrásának** nevezzük az A felület által körülzárt ΔV térfogatú tartományban. Ha \mathbf{a} az egységnyi sűrűségű inkompresszibilis folyadék sebessége, akkor az \mathbf{a} forrása számértékben egyenlő a ΔV térfogattól időegység alatt kiáramló folyadék térfogatával - ez indokolja a "forrás" elnevezést.

A forrásnak és a térfogatnak a hányadosát **átlagos forrassűrűség**nek nevezzük. Az átlagos forrassűrűség határértékét, amint a ΔV térfogat egy (rögzített) \mathbf{r} pontra zsugorodik, az \mathbf{a} vektortér \mathbf{r} pontbeli **forrassűrűség**ének vagy **divergenciájának** nevezzük:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_A \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A}$$

Kimutatható, hogy Descartes-koordinátákban

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

3.8. Stokes-tétel

A zárt görbe menti és a felületi integrálok között állapít meg összefüggést Stokes tétele (rotáció-tétel):

$$\oint_g \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_A \operatorname{rota} \cdot d\mathbf{A}$$

ahol A a g irányított zárt görbe által határolt felület.

A Stokes-tétel bizonyítása a következő gondolatmeneten alapul: osszuk be az A felületet olyan kis felületrészekre, amelyeken az átlagos felületi örvénysűrűség már jól megközelíti a rotáció értékét, azaz

$$\Delta A_i \operatorname{rota}_{n_i} \mathbf{a} \approx \oint_{g_i} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

ahol g_i az i -edik részfelületet, a ΔA_i területű, \mathbf{n}_i normálisú felületet határoló zárt görbe.

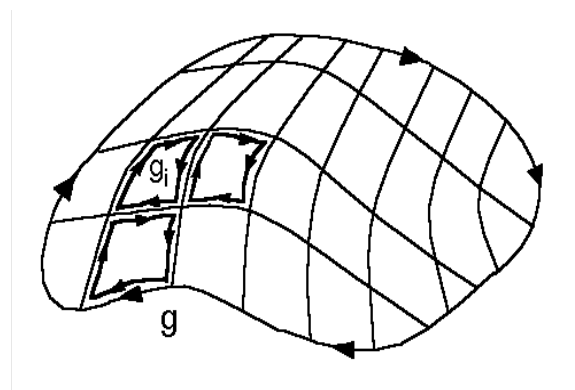
Összegezve:

$$\sum_{i=1}^n \Delta A_i \operatorname{rota}_{n_i} \mathbf{a} \approx \sum_{i=1}^n \oint_{g_i} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \quad (\star)$$

Figyeljük meg, hogy a görbe menti integráloknál a "belső" szakaszok járuléka két szomszédos görbénél szerepelnek ellentétes előjellel (ábra), ezért az összegezésnél kiesnek. Marad tehát

$$\sum_{i=1}^n \oint_{g_i} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint_g \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

míg (\star) bal oldalán a $\int_A \operatorname{rota} \cdot d\mathbf{A}$ integrál közelítő összege szerepel, így a (\star) összefüggésből határértékben következik a Stokes-tétel.



3.9. Vektortér örvénymentességének feltételei

Örvénymentesnek nevezzük az \mathbf{a} vektorteret, ha rotációja nulla. Az örvénymentes vektorterek főbb sajátosságai:

a./ $rot \mathbf{a} = \mathbf{0}$

b./ A vektortér egy φ **skalárpotenciál**ból származtatható: $\mathbf{a} = grad \varphi$

c./ A vektortér vonalintegrálja minden olyan görbére egyenlő, melyek kezdő- és végpontja megegyezik; azaz a vonalintegrál független az úttól, csak a kezdő- és végponttól függ.

d./ A vektortérnek bármely zárt görbére vett vonalintegrálja nulla.

Ha a vektortér a fenti tulajdonságok bármelyikével rendelkezik, akkor rendelkezik a többivel is. Az a./ és d./ tulajdonságok egyenértékűségét a Stokes-tételből közvetlenül láthatjuk. A c./ tulajdonságot a következőképpen láthatjuk be: Legyen g_1 és g_2 két olyan görbe, amelynek kezdőpontja P_1 , végpontja P_2 . A g_2 görbe irányítását megfordítva egy g zárt görbét kapunk, amelyre:

$$\oint_g \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{g_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} - \int_{g_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

Ezért d./-ből következik c./ és viszont.

Végül tegyük fel, hogy

$$rot \mathbf{a} = \mathbf{0}, \text{ azaz } \frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z}, \text{ stb.}$$

Jelöljük $\varphi(\mathbf{r})$ -rel az alábbi módon definiált skalárteret:

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^x a_x(x, 0, 0) dx + \int_0^y a_y(x, y, 0) dy + \int_0^z a_z(x, y, z) dz, \text{ azaz}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_g \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

ahol g egy koordinátatengelyekkel párhuzamos élekből álló töröttvonal, melynek kezdőpontja az origó, végpontja az (x, y, z) pont.

Bebizonyítható, hogy ha $rot \mathbf{a} = \mathbf{0}$, akkor $grad \varphi = \mathbf{a}$, azaz az a./ sajátosságából következik a b./ sajátosság; ugyanakkor b./-ből is következik a./, mert

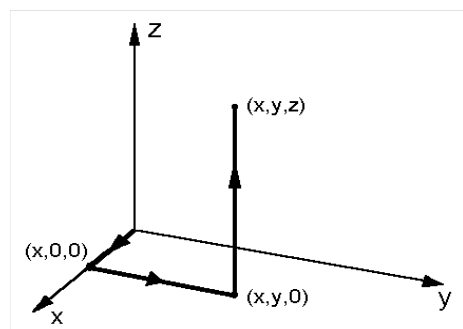
$$rot grad \varphi = 0 \text{ bármely } \varphi(\mathbf{r})\text{-re.}$$

A c./ tulajdonság miatt

$$\varphi = \int_{g_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r},$$

ahol g_1 az origóban kezdődő és az \mathbf{r} pontban végződő tetszőleges görbe. Ha φ_0 kielégíti az $\mathbf{a} = grad \varphi_0$ egyenletet, akkor minden olyan φ skalártér is kielégíti, amelyik a $\varphi_0(\mathbf{r})$ -től csak konstansban tér el ($\varphi = \varphi_0 + c$), mert

$$grad \varphi = grad(\varphi_0 + c) = grad \varphi_0 + grad c = grad \varphi_0 = \mathbf{a}$$



Adott örvénymentes térhez tehát a potenciált csak egy önkényesen választható additív állandó erejéig határozhatjuk meg, emiatt a g görbéről szükségtelen kikötni, hogy az origóban kezdődjön.

3.10. Gauss-Osztrogradszkij-tétel

A zárt felületi és térfogati integrálok között állapít meg összefüggést a Gauss-Osztrogradszkij-tétel (Gauss-tétel, divergencia-tétel):

$$\int_A \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV$$

ahol A a V térfogatot határoló zárt felület.

A Gauss-tétel bizonyítása teljesen analóg a Stokes-tételével. A V térfogatot kis részekre osztva, a divergencia definíciójából kapjuk, hogy közelítőleg

$$\int_{A_i} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A}_i \approx \Delta V_i \operatorname{div} \mathbf{a} \quad i = 1, \dots, n$$

ahol A_i a ΔV_i térfogatot határoló zárt felület. Összegezésnél a "belső" felületek járuléka eltűnnek, és határértékben adódik a Gauss-tétel.

3.11. Vektortér forrásmentességének feltétele

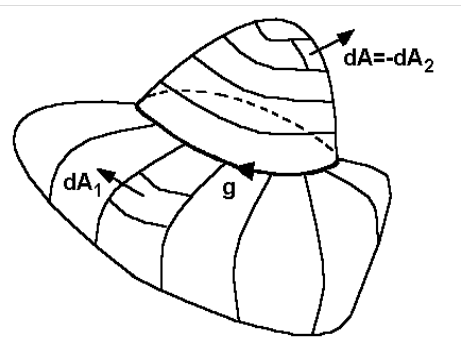
A forrásmentes vektorterek főbb sajátságai:

- $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$
- A vektortér **vektorpotenciál**ból származtatható, azaz van olyan \mathbf{b} vektortér, amelyre $\operatorname{rot} \mathbf{b} = \mathbf{a}$
- A vektortér felületi integrálja egyenlő az olyan felületekre, amelyeket ugyanaz a g irányított zárt görbe határol.
- A vektortér fluxusa bármely zárt felületen zérus.

A fenti tulajdonságok bármelyikéből következik a többi. Az a./ és d./ tulajdonságok egyenértékűsége közvetlenül jön a Gauss-tételből. A c./ és d./ tulajdonságok egyenértékűségét könnyen beláthatjuk, ha a g zárt görbére két felületet fektetünk rá. Az A_2 felület irányítását megfordítva egy zárt A felületet kapunk, amelyre

$$\int_A \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A} = \int_{A_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A}_1 - \int_{A_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{A}_2$$

A vektorpotenciálból származtatott vektortér forrásmentes, mert $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{b}$ bármely $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ vektortér esetén zérus. A tétel fordítottjának igazolása és adott forrásmentes vektortérhez tartozó vektorpotenciál megkonstruálása bonyolultabb, ezért ezzel itt nem foglalkozunk.



3.12. Nabla-operátor. Magasabbrendű deriváltak.

Vektoranalitikai azonosságok

A skalár- és vektorterek differenciálásával kapcsolatban szokás bevezetni a nabla-operátort:

$$\vec{\nabla} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

A nabla egy vektoroperátor, amelyet szorozhatunk jobbról skalár- vagy vektortérrel. Ezzel a jelöléssel könnyen megjegyezhetővé válnak a vektoranalitikai azonosságok, mert a vektoroknál tanult szorzás szabályai általában érvényesek maradnak olyan szorzatban, amelynek első tényezője a $\vec{\nabla}$.

Skalártérre alkalmazva a nabla-operátort:

$$\vec{\nabla} \varphi = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \text{grad} \varphi$$

Vektortérrel skalárisan szorozva:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{a} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \text{div} \mathbf{a}$$

és vektoriálisan szorozva:

$$\vec{\nabla} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \text{rot} \mathbf{a}$$

A nabla-operátor önmagával vett skalárszorzatát Laplace-operátornak nevezzük:

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \text{tehát}$$

$$\Delta u = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} u) = \text{div}(\text{grad} u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Megjegyezzük, hogy a nabla-operátort lehetséges definiálni nemcsak Descartes-koordinátákkal, hanem általánosan is. Más koordinátákban az első- és másodrendű deriváltak kifejezése más, ugyanakkor az alábbi vektoranalitikai azonosságok minden koordinátarendszerben érvényesek.

A skalár- és vektorterek differenciálási szabályai származtathatók a közönséges differenciálás szabályaiból, amelyek felhasználásával könnyű igazolni Descartes-féle koordinátákban az alábbi vektoranalitikai azonosságokat:

Összeg differenciálása:

$$\text{grad}(\varphi + \psi) = \text{grad} \varphi + \text{grad} \psi$$

$$\text{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{rot} \mathbf{a} + \text{rot} \mathbf{b}$$

$$\text{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{div} \mathbf{a} + \text{div} \mathbf{b}$$

Szorzat differenciálása:

$$\text{grad}(\varphi \cdot \psi) = \varphi \text{grad} \psi + \psi \text{grad} \varphi$$

$$\text{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \text{rot} \mathbf{a} + \text{grad} \varphi \times \mathbf{a}$$

$$\text{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \text{div} \mathbf{a} + \text{grad} \varphi \cdot \mathbf{a}$$

$$\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \text{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \text{rot} \mathbf{a}$$

Közvetett függvény differenciálása:

$$\frac{d}{dt} \varphi(\mathbf{r}(t)) = \text{grad} \varphi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\text{grad} f(\varphi(\mathbf{r})) = \frac{df}{d\varphi} \cdot \text{grad} \varphi$$

Magasabbrendű deriváltak:

$$\text{div grad} \varphi = \Delta \varphi$$

$$\text{grad div} \mathbf{a} = \text{rot rot} \mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}$$

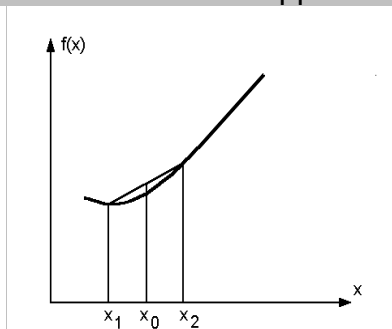
$$\text{rot grad} \varphi = 0$$

$$\text{div rot} \mathbf{a} = 0$$

Ezekben az összefüggésekben φ és ψ skalártereket, \mathbf{a} és \mathbf{b} vektortereket jelölnek, t skalárváltozó, f pedig skalár-skalár függvény.

Homogén vektortér divergenciája ill. rotációja nulla ill. nullvektor; homogén (azaz konstans) skalártér gradiense zérus. Az utóbbi állítás megfordítható: ha egy skalártér gradiense a tér egy összefüggő tartományában zérus, akkor a skalártér ebben a tartományban konstans.

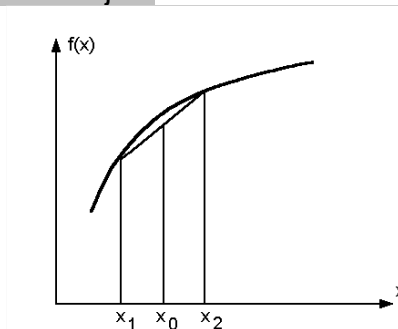
A fentiekben láttuk az első deriváltak ($\nabla \varphi$, $\nabla \cdot \mathbf{a}$, $\nabla \times \mathbf{a}$) "invariáns" (azaz koordinátarendszertől független) jelentését. A Δ Laplace-operátornak is van ilyen jelentése. Emlékeztetőül: ha az f egyváltozós függvény grafikonja alulról konvex (ill. konkáv), akkor az f'' második derivált negatív (ill. pozitív). Ezt a sajátságot többváltozós függvényekre a következőképpen általánosíthatjuk.



konvex függvény

$$f'' > 0$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$



konkáv függvény

$$f'' < 0$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$\Delta\varphi > 0 \Rightarrow$ a kérdéses pontban a φ értéke kisebb, mint a "környezeti átlag". Itt a környezeti átlagot a következőképpen értjük: vegyünk körül az \mathbf{r}_0 pontot egy kis ε sugarú g_ε gömbbel; ekkor a környezeti átlag φ -nek a g_ε felületre vett átlaga:

$$\langle \varphi \rangle_\varepsilon = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{g_\varepsilon} \varphi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{A}$$

A gömbfelület pontjaiban

$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \varphi(\mathbf{r}_0) + \text{grad}\varphi|_{\mathbf{r}_0} \cdot \mathbf{n}\varepsilon \approx \varphi(\mathbf{r}_0) + \text{grad}\varphi|_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}\varepsilon, \quad \text{ezért}$$

$$\langle \varphi \rangle_\varepsilon \approx \varphi(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{4\pi\varepsilon^2} \int_{g_\varepsilon} \text{grad}\varphi \cdot \varepsilon d\mathbf{A}$$

$$\int_{g_\varepsilon} \text{grad}\varphi d\mathbf{A} = \int \text{div grad}\varphi dV \approx \Delta\varphi|_{\mathbf{r}_0} \cdot \frac{4\pi}{3} \varepsilon^3$$

Ezen összefüggésekből

$$\Delta\varphi = 3 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\langle \varphi \rangle_\varepsilon - \varphi}{\varepsilon^2}$$

Tehát ha $\Delta\varphi > 0$, akkor a környezeti átlag -elég kis környezetben- nagyobb, mint a φ pontbeli értéke ($\langle \varphi \rangle_\varepsilon > \varphi$).