FOGALMAK, DEFINÍCIÓK

Az SI rendszer alapmennyiségei. Síkszög, térszög. Prefixumok.

Adatok: fénysebesség, Föld sugara, Nap-Föld távolság, Föld-Hold távolság, a Föld és a Hold keringési és forgási ideje.

Fogalmak, definíciók: kinematika, dinamika, tömegpont, helyvektor, pálya, út, elmozdulás, vonatkoztatási rendszer, sebesség, gyorsulás, homogén, stacionárius, determinisztikus, inerciarendszer, erő, tömeg, mozgásegyenlet, szögsebesség, szöggyorsulás, körfrekvencia, frekvencia, amplitúdó.

<u>Tömegpont kinematikája</u>
Tömegpont mozgásának leírása: helyvektor, vonatkoztatási rendszer, pálya, út, elmozdulás.
Sebesség, gyorsulás. A helyvektor, a sebességvektor és a gyorsulásvektor iránya, nagysága.
Egyenesvonalú mozgás; egyenletes mozgás, egyenletesen változó mozgás.
Körmozgás. Egyenletes és egyenletesen változó körmozgás. Szögsebesség, szöggyorsulás. A gyorsulás tangenciális és centripetális komponense.
Harmonikus rezgőmozgás. Periódusidő, frekvencia, körfrekvencia, amplitúdó. Rezgések összetétele.

<u>Tömegpont dinamikájának alapjai</u>
A mechanika axiómái. Inerciarendszer.
Erő, erőtér. Tömeg. Dinamikai és sztatikai erő- és tömegmérés.
Mozgásegyenlet. Kezdeti feltételek.
Erőtörvények: földi nehézségi erőtér, általános gravitációs erő, súrlódási erők, kényszererők.
Mozgás homogén erőtérben, hajítások.
A „g” értékének függése a földrajzi szélességi foktól, és a földfelszín feletti magasságtól.

Koordinátarendszerek (Descartes-koordinátarendszer, síkbeli polárkoordináta-rendszer).
Vektor komponensei, abszolút értéke. Műveletek vektorokkal. Egységvektor. Skalárszorzat, vektoriális szorzat. Egységvektor deriváltja.
Időfüggő mennyiség megváltozása. Átlagos változási sebesség, (pillanatnyi) változási sebesség.
Differenciálás, integrálás; a differenciálás és integrálás grafikus jelentése: iránytangens, görbe alatti terület. Hatvány, szinusz/koszinusz függvény, konstansszoros, összeg, szorzat, összetett függvény differenciálása.

KÉRDÉSEK, FELADATOK RÉGI ZÁRTHELYIKBŐL:

Az alábbi állítások közül melyek azok,
- amelyek általános esetben érvényesek;
- amelyek soha nem igazak;
- amelyek csak egyes speciális esetekben érvényesek (mikor)?

<1> A gyorsulás y koordinátája egyenlő a sebesség y koordinátájának idő szerinti deriváltjával.
<2> Polárkoordináta-rendszerben egy adott pontban az $\mathbf{e_r}$ és $\mathbf{e_\varphi}$ egységvektorok által bezárt szög függ a pont helyétől.
<3> A gyorsulás idő szerinti deriváltja egyenlő a helyvektor idő szerinti integráljával.
<4> Ha két test sebességvektora minden időben megegyezik, akkor megegyezik a helyvektoruk is.
<5> Ferde hajításnál a vízszintes sebességkomponens állandó.
<6> Ferde hajításnál a függőleges sebességkomponens állandó.
<7> Csak egy inerciarendszer létezik.
<8> Ha inerciarendszerben egy test sebessége állandó, akkor nem hathat rá erő.

Megoldás:
<1> Igaz; Descartes-koordinátarendszerben ugyanis $\mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j} + v_z(t)\mathbf{k}$,
$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}_x\mathbf{i} + \dot{v}_y\mathbf{j} + \dot{v}_z\mathbf{k} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, azaz $a_y = \dot{v}_y$
<2> Nem igaz; az $\mathbf{e_r}$ és $\mathbf{e_\varphi}$ egységvektorok által bezárt szög mindig derékszög
<3> Nem igaz; a *helyvektor* deriváltja egyenlő a *gyorsulás* integráljával (megfelelő kezdeti feltételekkel)
<4> Csak abban a speciális esetben igaz, ha tudjuk, hogy egy időben megegyezett a helyvektoruk – ekkor igaz, hogy bármely más időben is megegyezik (megfelelő kiindulási feltétel esetén igaz)
<5> Igaz, mert vízszintes irányban a gyorsulás zérus. (((feltéve, hogy a közegellenállás elhanyagolható)))
<6> Nem igaz, a g gyorsulás miatt a sebesség $v_z = v_{z0} - gt$. (((Illetve lehet igaz, ha figyelembe vesszük a közegellenállást, akkor kialakulhat egy stacionárius sebesség)))
<7> Nem igaz; egy inerciarendszerhez képest egyenes vonalú egyenletes transzlációt végző vonatkozatási rendszer is inerciarendszer (azaz végtelen sok inerciarendszer létezik)
<8> Nem igaz; az erők eredője zérus

Igaz-e, hogy
<1> az út-idő görbének lehet vízszintes érintője? Ha igen, mit jelent az?
<2> görbe vonalú mozgásnál a sebesség nagysága mindig változik?
<3> a Földön a nehézségi gyorsulás értéke a sarkokon nagyobb, mint az Egyenlítőn?
Minden válaszhoz indoklást is kérünk!

Megoldás:
<1> IGEN, ekkor a sebesség zérus
<2> NEM IGAZ, a sebesség nagysága lehet állandó (az iránya változik, és így a sebességvektor is)
<3> IGAZ, (a sarkokon 9,823 m/s^2, az Egyenlítőn 9,789 m/s^2), egyrészt a Föld lapult alakja, másrészt a centripetális erő miatt

---

Az alábbi állításokról döntse el, hogy lehet-e igaz! Indokolja!
<1> Egy tömegpont sebességvektora időben változik, de ugyanakkor a sebességének nagysága állandó.
<2> Egy tömegpont sebességének nagysága időben változik, de ugyanakkor a sebességvektora állandó.
<3> Egy tömegpont átlagsebessége a [0; 20 s] időintervallumban nem zérus, de a [0; 60 s] időintervallumban zérus.
<4> Egy tömegpont átlagsebessége a [0; 60 s] időintervallumban zérus, de a [0; 20 s] időintervallumban nem zérus.
<5> Tömegpont mozog az x tengely mentén. A sebessége pozitív és a gyorsulása negatív.
<6> Tömegpont mozog az x tengely mentén. A sebessége negatív és a gyorsulása pozitív.

Megoldás:
<1> **Igaz** lehet, ha a vektor iránya változik.
<2> **Nem lehet igaz**. Két vektor akkor egyenlő, ha nagyságuk és irányuk megegyezik.
<3-4> Ez a két kérdés ugyanaz. Mivel az átlagsebesség az elmozdulásvektor és az eltelt idő hányadosa, **igaz** lehet az állítás, ha a [20; 60 s] intervallumban a tömegpont visszatér a kiindulópontba, ahol t = 0-ban volt.
<5-6> Ezekre a kérdésekre bármi lehet **igaz**. A gyorsulás a sebesség deriváltja, de nincs semmi megkötés arra, hogy ha az egyik pozitív/negatív, milyen kell legyen a másik előjele. (Az viszont itt mindkét esetben igaz, hogy a sebesség abszolút értéke csökken.)

Írja le Newton II. axiómáját! Definiálja a benne szereplő mennyiségeket!

Írjon fel 3 példát erőtörvényre! Írja le, melyik mire, mikor érvényes!
Az egyikhez írja fel a mozgásegyenletet is!

Megoldás:
Az erőtörvények azt adják meg, hogy mitől, hogyan függ az erő egy adott kölcsönhatás esetén.
Példák:
– Földi nehézségi erőtér $\mathbf{G} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{k}$
A Földfelszín közelében lévő testekre hat. Iránya függőleges, a Föld középpontja felé mutat; g a gravitációs gyorsulás.
– Általános gravitációs erőtörvény $\mathbf{F} = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$
Bármely két test között fellépő vonzóerő. m_1, m_2 a testek tömege, **r** az egyik testtől a másik felé mutató vektor, γ univerzális fizikai állandó (gravitációs állandó).
– Csúszási súrlódási erő $F = \mu N$
Ha egy test egy szilárd felületen mozog, akkor rá a mozgásiránnyal ellentétes csúszási súrlódási erő hat; μ a csúszási súrlódási tényező, N a nyomóerő.
– Tapadási súrlódási erő
Az az erő, amelyet a felület fejt ki a (felülethez képest nyugalomban lévő) testre, ha a testet más erő mozgásba kívánja hozni. A tapadási súrlódási erő maximális értéke $F_{kr} = \mu_t N$.
– Gördülő ellenállás $F = \mu_g N$
Henger, gömb, kerekek gördülésénél fellépő fékező erő.

– <u>Lineáris rugalmas erőtörvény</u>
Egyik végén rögzített rugó a rugó megnyúlásával arányos erőt fejt ki: $F = -k(\ell-\ell_0)$
ℓ a rugó hossza, ℓ_0 a rugó hossza megnyújtatlan állapotban, k a rugóállandó.
(Rugalmas: az erő csak a pillanatnyi kitéréstől függ, lineáris: az erő arányos a kitéréssel.)
– <u>Közegellenállási erő</u>
Folyadékban vagy gázban mozgó szilárd testre ható, a sebességével ellentétes irányú fékező erő.
Kis sebességnél a sebességgel $\mathbf{F} = -k\,\mathbf{v}$,
nagyobb sebességnél a sebesség négyzetével arányos: $\mathbf{F} = -k\,v\,\mathbf{v}$

<u>Mozgásegyenlet:</u> (a II. axiómába behelyettesítjük az aktuális erőtörvényt, és a gyorsulást a helyvektor második deriváltjaként írjuk fel)
pl. $m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{k}$

Adjuk meg a következő mennyiségeket:
a) A Föld sugara mm-ben:
b) m = 20 g, a = 6480 km/h^2. Adjuk meg a testre ható erő nagyságát N-ban!
c) A Föld keringési ideje percben:

Megoldás: a) $6{,}37\cdot10^9$ mm
b) $a = 6480\ \text{km/h}^2 = 6480\cdot\dfrac{1000\,\text{m}}{(3600\,\text{s})^2} = 0{,}5\ \text{m/s}^2$, $F = ma = 0{,}02\cdot0{,}5 =$ **0,01 N**
c) $365\cdot24\cdot60 \approx$ **$5{,}26\cdot10^5$ min**

Az E épület liftje induláskor 0,5 s alatt gyorsít fel (állandó nagyságú gyorsulással) az 1,5 m/s-os állandó sebességére, fékezéskor ugyancsak 0,5 s alatt fékez le álló helyzetbe. A lift az 1. emeletről megy le a földszintre, ehhez a liftnek 4,5 m-t kell ereszkednie.
Ábrázoljuk (megfelelően beskálázott koordinátarendszerekben) az idő függvényében
- a lift gyorsulását,
- a lift sebességét,
- a lift által megtett utat!

Megoldás:
$a = \Delta v / \Delta t = 1{,}5 / 0{,}5 = 3\ \text{m/s}^2$
az út
- a gyorsuló részen:
$s_1(t) = \frac{1}{2} a t^2 = 1{,}5\, t^2$, $\Delta t_1 = 0{,}5$ s-nál az addig megtett út $s_{1v} = 0{,}375$ m
- a lassuló részen
$s_3(t) = s_{2v} + vt - \frac{1}{2} at^2 = s_{2v} + 1{,}5t - 1{,}5t^2$,
$\Delta t_3 = 0{,}5$ s alatt a lassulva megtett út $s_{3v} = s_{2v} + 0{,}375$ [m]
- az állandó sebességű részen $s_{2v} = 4{,}5 - 2\cdot0{,}375 = 3{,}75$ m-t kell megtennie,
az ehhez szükséges idő $\Delta t_2 = s_{2v} / v = 3{,}75/1{,}5 = 2{,}5$ s
és itt az út-idő függvény $s_2(t) = s_{1v} + vt = 0{,}375 + 1{,}5\,t$

Egy tömegpont harmonikus rezgőmozgást végez az x tengely mentén:

A/ $x(t) = x^* \cdot \cos(\omega \cdot t + \pi)$, ahol $x^* = -2$ m, $\omega = 2\pi/5\ s^{-1}$

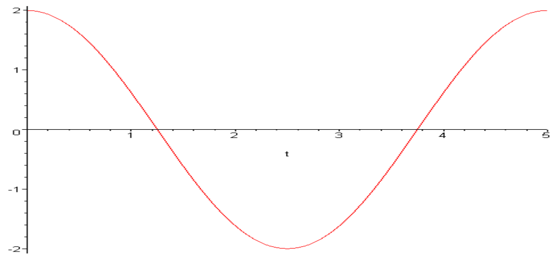
B/ $x(t) = x^* \cdot \cos(\omega \cdot t - \pi/2)$, ahol $x^* = -2{,}4$ m, $\omega = \pi/2\ s^{-1}$

a) Ábrázoljuk a test x koordinátáját a [0, T] időintervallumban!
(Mennyi a T periódusidő? Mekkora az A amplitúdó? Honnan indul a test a t = 0 s-ban?)
b) Mennyi a sebesség átlagértéke egy teljes periódusra?
c) Mennyi a sebesség nagyságának átlagértéke egy teljes periódusra?

Megoldás:
a)

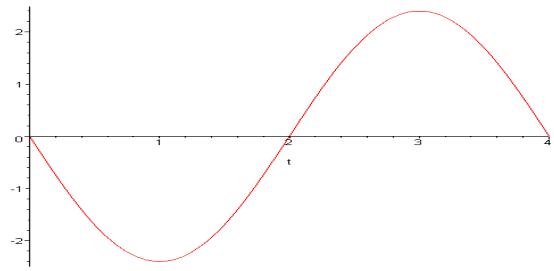
A/ $T = 2\pi / \omega = 5$ s, $A = |x^*| = 2$ m,

$x(0) = -2 \cdot \cos(\omega \cdot 0 + \pi) =$ □ 2 □m



B/ $T = 2\pi / \omega = 4$ s, $A = |x^*| = 2{,}4$ m,

$x(0) = -2{,}4 \cdot \cos(\omega \cdot 0 - \pi/2) =$ □ 0



b) Mivel egy teljes periódus alatt a tömegpont visszatér a kiindulási helyzetébe, az elmozdulás zérus, vagyis a sebesség átlagértéke zérus.

c) Egy teljes periódus alatt a tömegpont kétszer megy ki a szélső helyzetébe és megy vissza az origóba, azaz a megtett út 4-szerese az amplitúdónak, a sebesség nagyságának átlaga $v_{átl} = 4A / T$, azaz A/ $v_{átl} = 4 \cdot 2/5 = 1{,}6$ m/s , B/ $v_{átl} = 4 \cdot 2{,}4/4 = 2{,}4$ m/s .

---

50 m/s kezdősebességgel függőlegesen felfelé hajítunk egy követ. Ugyanakkor egy 50 m magas toronyból szabadeséssel leesik egy másik kő.
a) Melyik pillanatban vannak azonos magasságban?
b) Mekkora ekkor az egyik ill. másik sebessége?

Megoldás:
a) Fölfelé mutató z tengelyt használva a feldobott kő z koordinátája
$z_1 = 50 \cdot t - ½gt^2$, a leesőé $z_2 = 50 - ½gt^2$.
$z_1 = z_2$: $50 \cdot t - ½gt^2 = 50 - ½gt^2 \Rightarrow t =$ **1 s.**
b) $v = v_0 - gt$: $v_1 = 50 - 10 \cdot 1 =$ **40 m/s**, $v_2 = -10 \cdot 1 =$ **-10 m/s**.

7920 m magasságban állandó, 960 km/h vízszintes sebességgel haladó repülőgépről leesett az egyik ajtó. Szupermen is azon a repülőgépen utazott, de éppen aludt. 10 s-ig tartott, amíg felébresztették és elmondták neki, mi történt. Ekkor azonnal (0 s alatt) odaszaladt az ajtó helyén tátongó lyukhoz és …
a) … függőlegesen lefelé v_0 kezdősebességgel elrugaszkodva utánaugrott az ajtónak. Mekkora kezdősebességgel ugrott ki Szupermen, ha 3 s alatt érte utol az ajtót?
b) … zérus kezdősebességgel, de különleges képességeit felhasználva állandó nagyságú, függőleges gyorsulással indult az ajtó után (ez a gyorsulás hozzáadódik a nehézségi erőből eredő gyorsulásához). Legalább mekkorának kellett lenni ennek a gyorsulásnak, hogy még a levegőben elérje az ajtót?
A g értékét vegyük 9,9 m/s^2-nek.
A légellenállást hanyagoljuk el!

Megoldás:
Ha a légellenállást elhanyagolhatjuk, akkor a leesett ajtóra nem hat vízszintes irányú erő, megtartja a repülőgép sebességével megegyező vízszintes sebességkomponensét, mindig a repülőgép alatt lesz.
A feladat megoldásához elég a z koordinátát felírni.
a) 10+3 s alatt az ajtó s = ½ ·9,9·13^2 = 836,55 m -t zuhant. Szupermen t_S = 3 s alatt v_0 kezdősebességről indulva tesz meg ekkora utat:
$s = v_0 t_S + ½ g\cdot t_S^2 \;\Rightarrow\; v_0 = (s - ½ g\cdot t_S^2) / t_S = 264$ m/s.
b) Az ajtó h = 7920 m magasságból $t_a = \sqrt{2h/g}$ = 40 s alatt ér földet. Ennél 10 s -mal kevesebb idő alatt kell Szupermennek földet érnie, ha még a levegőben el akarja kapni az ajtót. $s = ½ (g+a)t^2$
$\Rightarrow\; a = 2s/t^2 - g \quad 2\cdot7920/(40-10)^2 - 9{,}9 = 7{,}7$ m/s^2 **.**

Egy fekete autó 84 km/h sebességről 120 km/h sebességre gyorsít fel 4 s alatt állandó gyorsulással, egy fehér autó pedig 48 km/h-ról 84 km/h-ra ugyancsak 4 s alatt szintén állandó gyorsulással
A: egyenes úton, **B**: R = 150 m sugarú köríven.
A két autó tömege egyenlő.
Igaz-e, hogy
a) a fekete autó gyorsulása nagyobb?
b) a fekete autó nagyobb utat tesz meg eközben?

Megoldás:
a) **A**: nem **B**: igen
Egyenes úton a fekete és a fehér autó gyorsulása megegyezik, mert a sebességváltozás és az eltelt megegyezik (tehát nem igaz, hogy a fekete autó gyorsulása nagyobb)
Köríven viszont a fenti gyorsulás még csak az *érintőirányú* (*tangenciális*) gyorsuláskomponens (ami a sebesség nagyságának változását okozza), itt viszont figyelembe kell venni a (sebességvektor irányának változását okozó) *centripetális* gyorsuláskomponenst is, ami v^2-tel arányos, tehát a fekete autónál nagyobb. Az eredő gyorsulás $a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2}$, tehát köríven igaz, hogy a fekete autó gyorsulása nagyobb.
b) **A**: igen **B**: igen
A megtett út $s = v_0 t + ½at^2$. A kezdősebességet, v_0-at kivéve minden megegyezik, tehát az az autó, amelyik nagyobb sebességről indult, nagyobb utat tesz meg, akár egyenesen, akár köríven halad.

Egy fekete autó egyenes úton, egy fehér autó pedig
R = 40 m sugarú köríven
108 km/h sebességről 126 km/h sebességre gyorsít fel 5 s alatt állandó kerületi gyorsulással.
a) Igaz-e, hogy fehér autó gyorsulása nagyobb?
b) Írjuk fel a fehér autó szögsebességét az idő függvényében!

Megoldás:
a) Igaz, mert a kerületi/tangenciális gyorsulásuk azonos: $v_1 = 108/3{,}6 = 30$ m/s, $v_2 = 126/3{,}6 = 35$ m/s, $a_t = \Delta v/\Delta t = (35–30)/5 = 1$ m/s^2; de a fehér autónak a körpálya miatt centripetális gyorsulása is van, így annak gyorsulása $\sqrt{a_t^{\,2} + a_{cp}^{\,2}} > a_t$

b) $\omega_1 = v_1/R = 30/40 = 0{,}75$ s^{-1}, $\omega_2 = v_2/R = 35/40 = 0{,}875$ s^{-1}, $\beta = \Delta\omega/\Delta t = (0{,}875–0{,}75)/5 = 0{,}025$ s^{-2}, (vagy: $\beta = a_t / R = 1/40 = 0{,}025$ s^{-2}), azaz $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 + \beta t = \mathbf{0{,}75 + 0{,}025\,t}$ **(s^{-1})**

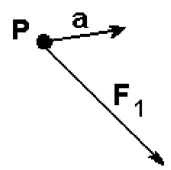
A Szaturnusz sugara 9,5-szerese, tömege 95-szöröse a Földének. Számoljuk ki, hányszorosa a Szaturnusz felszínén mérhető nehézségi gyorsulás értéke a Föld felszínén mérhetőnek! (a centrifugális gyorsulást hanyagoljuk el)

Megoldás:

$$g = \gamma\frac{M}{R^2}, \quad \frac{g_{\text{bolygó}}}{g_{\text{Föld}}} = \frac{\gamma\frac{M_{\text{bolygó}}}{R_{\text{bolygó}}^{\,2}}}{\gamma\frac{M_{\text{Föld}}}{R_{\text{Föld}}^{\,2}}} = \frac{\frac{M_{\text{bolygó}}}{M_{\text{Föld}}}}{\left(\frac{R_{\text{bolygó}}}{R_{\text{Föld}}}\right)^2}, \text{ azaz } \frac{g_{\text{Szaurnusz}}}{g_{\text{Föld}}} = \frac{95}{9{,}5^2} \approx 1{,}05$$

MEGOLDÁS NÉLKÜL:

Egy m tömegű tömegpont gyorsulása **a**.
A tömegpontra két erő hat, az egyik erő (**F₁**) ismert.
Határozzuk meg képletben és szerkesztéssel az ismeretlen másik erőt (**F₂**)!



Egy m = 20 g tömegű test állandó erő hatására mozog az x-y síkban.
A test a $t_1 = 2$ s időben a P_1(10 m, 0 m) pontban van, sebessége a +y tengely irányába mutat és nagysága $v_1 = 10$ m/s.
A test a $t_2 = 6$ s időpontban a P_2(-6 m, 20 m) pontban van, a sebessége a –x tengely irányába mutat és nagysága $v_2 = 8$ m/s.
a) Mekkora az erő nagysága?
b) Mekkora a test sebessége a $t_3 = 8$ s időpontban, és hol lesz a test akkor?