centripetális gyorsulás
matematikai inga, síkinga, kúpinga (ld. a 2011-es zh-t)
neminercia-rendszerek, tehetetlenségi erők: transzlációs, centrifugális, Coriolis erő (, Euler erő)

Körpályán egyenletesen lassuló mozgással mozgó anyagi pont egy félkör megtétele közben elveszti sebességének felét. Hol áll meg?

Mo:

$\beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \text{konst.} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \dot{\varphi} = \omega_0 - \beta t, \quad \varphi = \omega_0 t - \beta / 2 \cdot t^2$

először t_1 idő alatt a sebessége a felére csökken: $\omega(t_1) = \omega_0 - \beta t_1 = \omega_0/2$ (1)
és megtesz egy félkört, azaz $\varphi(t_1) = \omega_0 t_1 - \beta/2 \cdot t_1^2 = \pi$ (2)
majd t_2 idő alatt a sebessége $\omega_0/2$-ről nullára csökken: $\omega(t_2) = \omega_0/2 - \beta t_2 = 0$ (3)
(1)-ből $t_1 = \omega_0/(2\beta)$, (3)-ból $t_2 = t_1$, (2)-ből $\beta = 3/(8\pi) \cdot \omega_0^2$, amivel $\varphi(t_2) = \omega_0/2 \cdot t_2 - \beta/2 \cdot t_2^2 = \pi/3$,
azaz még egy hatod kört tesz meg.

Egy 5 kg tömegű tömegpont 20 m sugarú körpályán mozog.
a) Mekkora erő hat rá akkor, amikor a sebessége 15 m/s, szöggyorsulása pedig $0{,}8/s^2$?
b) Milyen irányú az erő?

Mo.

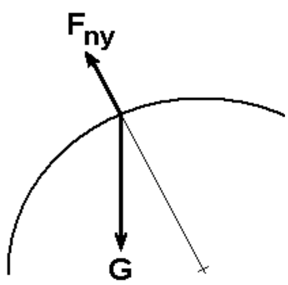
a) a tangenciális gyorsulás $a_t = r\,\beta = 20 \cdot 0{,}8 = 16$ m/s^2,
a centripetális gyorsulás $a_{cp} = v^2/r = 15^2/20 = 11{,}25$ m/s^2,
eredőjük $a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2} \approx 19{,}56$ m/s^2,
az erő nagysága $F = ma \approx 97{,}8$ N.
b) az erő iránya: az érintővel $\varphi = \text{arc tg}\,(11{,}25/16) \approx 35^o$-os szöget zár be.

Egy R sugarú félgömb peremétől súrlódásmentesen legördülő m tömegű golyó mekkora erővel nyomja a félgömb fenekét?

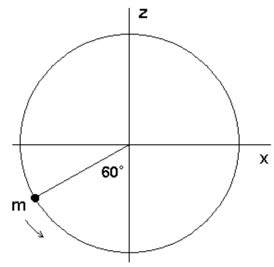
Mo:

A körpálya alsó pontján a körpálya közepe felé, azaz függőlegesen felfelé mutató centripetális erő a félgömbre merőleges, függőlegesen felfelé mutató nyomóerő és a függőlegesen lefelé mutató nehézségi erő eredője: $F_{cp} = F_{ny} - G \quad \Rightarrow \quad F_{ny} = G + F_{cp} = mg + mv^2 / R$
A sebességet kiszámíthatjuk az energia-megmaradásból (a súrlódás elhanyagolható):
$mgR = ½\, mv^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gR$
Tehát $F_{ny} = mg + mv^2 / R = mg + 2\, mg = 3\, mg$

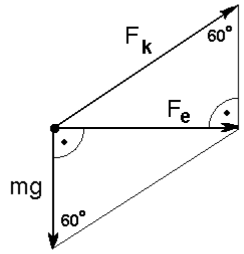
Félgömbről lecsúszó testre az ábrán látható helyzetében a bejelölt nehézségi erőn és nyomóerőn kívül hat egy súrlódási erő is.
a) Szerkesszük meg a súrlódási erőt, ha tudjuk, hogy az adott pontban a test tangenciális gyorsulása zérus!
b) Rajzoljunk meg egy akkora súrlódási erőt is, hogy az adott pontban a test sebessége csökkenjen!



Kötél végére erősített m tömegű testet az (x,z) függőleges síkban pörgetünk R sugarú körpályán. Amikor a test lefelé megy és az ábra szerinti helyzetben, a testre ható eredő erő vízszintes.
(A testre csak a kötélerő és a nehézségi erő hat, a kötél nyújthatatlan, súlytalan.)
a) Mekkora ekkor a kötélerő? (Fejezzük ki a nehézségi erő nagyságával!)
b) Írjuk fel a nehézségi erő, a kötélerő és az eredő erő vektorát!
c) Írjuk fel a gyorsulás sugárirányú és érintőirányú komponensét!
d) A centripetális gyorsulásból határozzuk meg a test sebességét!

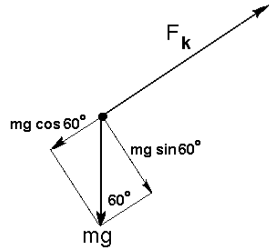


Mo.



a) $\cos 60^o = mg / F_k \quad \Rightarrow \quad F_k = mg / \cos 60^o = 2\ mg$

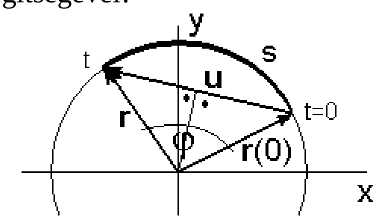
b) $\mathbf{G} = -mg\mathbf{k}$;
az eredő erő nagysága $F_e = mg \cdot \mathrm{tg}\ 60^o = \sqrt{3}mg$,
vektorként $\mathbf{F_e} = \sqrt{3}mg\ \mathbf{i}$;
a kötélerő $\mathbf{F_k} = \sqrt{3}mg\ \mathbf{i} + mg\mathbf{k}$
c) $ma_{cp} = F_k - mg \cos 60^o \quad \Rightarrow \quad a_{cp} = 2\ g - ½\ g = 3/2\ g$
$ma_t = mg \sin 60^o \quad \Rightarrow \quad a_t = g \sin 60^o = \sqrt{3}/2 \cdot g$



d) $a_{cp} = v^2/R \quad \Rightarrow$

$$v = \sqrt{a_{cp} \cdot R} = \sqrt{\frac{3}{2} gR}$$

Egy tömegpont körpályán mozog, melynek középpontja a koordinátarendszer origója. Az elmozdulás a [0,t] időintervallumban **u,** a t időben a helyvektora **r.** Határozzuk meg képletben és vektorábrában a 0 időbeli helyvektort! Jelöljük be a megtett utat, és képletben fejezzük ki **u** és **r** segítségével!
Mo.



$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \Delta\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(t) - \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{u}$
a megtett út $s = r \cdot \varphi$
ahol $\sin \varphi/2 = (u/2)/r$, azaz $s = 2\ r \cdot \arcsin \dfrac{u/2}{r}$

Számítsuk ki a Hold centripetális gyorsulását kétféleképpen:
- a gravitációs erőtörvényt,
- a körmozgás adatait

felhasználva. A Hold pályájának sugara kb. 60-szorosa a Föld sugarának ($R_F \approx 6400$ km), a Hold keringési ideje 27 nap.

Tömegpont mozog görbevonalú pályán. Mit tudunk a sebesség és a gyorsulás vektoráról?
(Definíció, komponensek, irány)

Mo.
a sebesség $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, érintőirányú, nagysága $v = \dot{s}$
a gyorsulás $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$, komponensei:
érintő irányban $a_t = \dot{v} = \ddot{s}$
a simulókör középpontja felé $a_{cp} = v\omega$
a gyorsulás iránya a két komponens eredője

Egy ℓ hosszú kötélre m = 20 g tömegű golyót akasztva kúpingát készítünk. A kötél függőlegessel bezárt szöge 16°, a periódusidő 1,5 s.
a) Milyen hosszú a kötél?
b) Mennyi lenne a lengésidő, ha ugyanezzel a kötéllel és testtel matematikai ingát készítenénk?

Az E épület liftje induláskor 0,5 s alatt gyorsít fel (állandó nagyságú gyorsulással) az 1,5 m/s-os állandó sebességére, fékezéskor ugyancsak 0,5 s alatt fékez le álló helyzetbe. A lift 1. emeletről megy le a földszintre, ehhez a liftnek 4,5 m-t kell ereszkednie.
Ábrázoljuk (megfelelően beskálázott koordinátarendszerekben) az idő függvényében
- a lift gyorsulását,
- a lift sebességét,
- a lift által megtett utat!
A lifttel levisznek egy 200 kg-os kávéautomatát az 1. emeletről a földszintre. Ábrázoljuk az automatára ható nyomóerőt is az idő függvényében!