

REZGŐMOZGÁS

lineáris rugalmas erő, harmonikus rezgőmozgás, amplitúdó, fázis, kezdőfázis, frekvencia, körfrekvencia, csillapítás, gerjesztés, rezonancia

IMPULZUS, impulzus-tétel, erőlkés, impulzus-megmaradás, rugalmatlan és rugalmas ütközés

MUNKA – mint az erő és a helyvektor skaláris szorzata

Adjuk meg képletben és ábrázoljuk grafikonon annak a harmonikus rezgőmozgásnak a kitérését az idő függvényében, amelyiknek amplitúdója $A = 0,2$ m, frekvenciája 20 Hz, és a $t = 0$ időben a pont kitérése 0,1 m, és ekkor az egyensúlyi helyzet ($x=0$) felé mozog!

Mo.

$$T = 1 / \nu = 1 / 20 = 0,05 \text{ s}$$

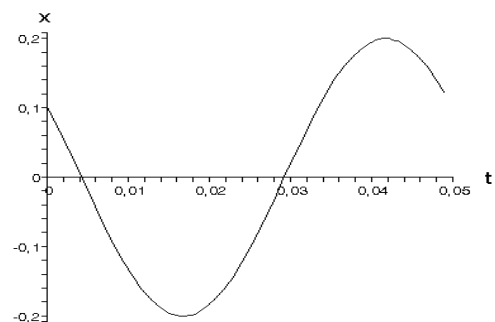
$$\omega = 2\pi\nu = 40\pi (\approx 125,7) \text{ s}^{-1}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) = 0,2 \cos(40\pi t + \varphi_0)$$

$$x(0) = 0,2 \cos \varphi_0 = 0,1 \Rightarrow \cos \varphi_0 = 0,5, \varphi_0 = \pi/3$$

$$x(t) = 0,2 \cos(40\pi t + \pi/3) \text{ [m]}$$

$$v(t) = \dot{x} = -8\pi \sin(40\pi t + \pi/3) \text{ [m/s]}$$



Egy tömegpont harmonikus rezgőmozgást végez az x tengely mentén:

$$x(t) = x^* \cdot \cos(\omega t + \pi), \text{ ahol } x^* = -2 \text{ m}, \omega = 2\pi/5 \text{ s}^{-1}$$

a) Ábrázoljuk a test x koordinátáját a $[0, T]$ időintervallumban!

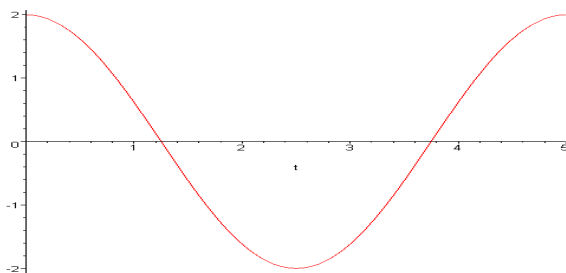
(Mennyi a T periódusidő? Mekkora az A amplitúdó? Honnan indul a test a $t = 0$ s-ban?)

b) Mennyi a sebesség átlagértéke egy teljes periódusra?

c) Mennyi a sebesség nagyságának átlagértéke egy teljes periódusra?

Mo.

$$\mathbf{a)} T = 2\pi / \omega = 5 \text{ s}, \quad A = |x^*| = 2 \text{ m}, \quad x(0) = -2 \cdot \cos(\omega \cdot 0 + \pi) = 2 \text{ m}$$



b) Mivel egy teljes periódus alatt a tömegpont visszatér a kiindulási helyzetébe, az elmozdulás zérus, vagyis a sebesség átlagértéke zérus.

c) Egy teljes periódus alatt a tömegpont kétszer megy ki a szélső helyzetébe és megy vissza az origóba, azaz a megtett út 4-szerese az amplitúdónak, a sebesség nagyságának átlaga $v_{\text{átl}} = 4A / T$, azaz $v_{\text{átl}} = 4 \cdot 2 / 5 = 1,6 \text{ m/s}$.

m tömegű golyót erősítünk k rugóállandójú rugóra. Az egyik végén rögzített rugó az x tengelyen van, egyensúlyi helyzete legyen az origó. A golyót $t=0$ időben v_0 kezdősebességgel meglökjük a $-x$ tengely irányába, ezután az harmonikus rezgőmozgást végezzük.

a) Határozzuk meg és ábrázoljuk x -et az idő függvényében!

b) Határozzuk meg a gyorsulás átlagértékét az első félperiódusban!

c) Milyen összefüggés van a gyorsulás és x között? Ebből határozzuk meg az x kitérés átlagértékét az első félperiódusban!

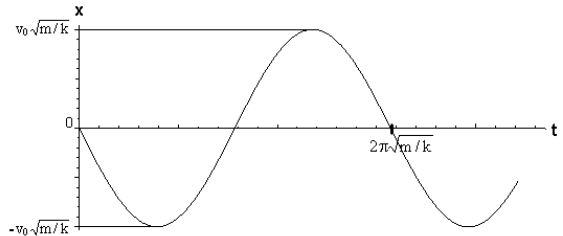
Mo.

a) m tömegű test k rugóállandójú rugón $\omega = \sqrt{k/m}$ körfrekvenciájú harmonikus rezgést végezzük

$x = -A \sin \omega t$, $v = \dot{x} = -A\omega \cos \omega t$,

$v(0) = -A\omega \cos 0 = -A\omega = -v_0 \Rightarrow A = v_0/\omega = v_0 \sqrt{m/k}$

tehát $x = -v_0 \sqrt{m/k} \sin \sqrt{k/m} t$



b) $a = \dot{v}$, átlagértéke $\bar{a} = \frac{1}{T/2} \cdot \int_0^{T/2} a dt = \frac{1}{T/2} \cdot [v]_0^{T/2} = \frac{1}{T/2} \cdot (v(T/2) - v(0)) = \frac{v_0 - (-v_0)}{T/2} = \frac{4v_0}{T}$

c) $a = \ddot{x} = A\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x \Rightarrow \bar{x} = -\frac{\bar{a}}{\omega^2} = -\frac{4v_0}{T\omega^2} = -\frac{4v_0 m}{Tk}$

Vízszintes, súrlódásmentes síkon egy rugó végére $m = 1$ kg tömegű golyót rögzítettünk. A rugó másik vége rögzítve van. A rugó 20 cm-re való kihúzásához 5 N erőre van szükség.

a) A golyót elengedve mekkora lesz a rezgésidő?

b) Mekkora a golyó sebessége a nyugalmi helyzeten való áthaladáskor?

Függőlegesen felfüggetünk egy $l_0 = 46$ cm hosszú, $k = 16$ N/m rugóállandójú rugót, a végére akasztunk egy $m = 0,2$ kg tömegű testet, majd meghúzzuk úgy, hogy a test a rugó felső rögzítési pontjától 64 cm-re legyen és ott elengedjük a testet. Mekkora lesz a létrejövő rezgés periódusideje, amplitúdója, és a test maximális sebessége?

Egy m tömegű golyóra a földi nehézségi erőn kívül egy rugó is hat. A rugó nyugalmi hossza l_0 , egyik végpontja az \mathbf{r}_1 pontban van rögzítve, a rugó másik végének helyvektora, ahol a tömegpontnak tekintett golyó van, \mathbf{r} .

Írjuk fel a golyó mozgásegyenletét!

Mo.

A golyóra hat a nehézségi erő és a rugóerő:

$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{F}_{\text{rugó}}$, ahol

$\mathbf{G} = m \mathbf{g} = -mg \mathbf{k}$,

a rugóerő nagysága $F_{\text{rugó}} = -k \Delta l = -k(l_0 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|)$, iránya $\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|}$, tehát

$\mathbf{F}_{\text{rugó}} = -k(l_0 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|) \cdot \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|}$.

A mozgásegyenlet $m \ddot{\mathbf{r}} = -mg \mathbf{k} - k(l_0 - |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|) \cdot \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|}$

A 8-as úton 108 km/h sebességgel megy egy 8 tonnás kamion, mögötte 18 m-rel szintén 108 km/h sebességgel egy 1 tonnás személyautó. A kamionos meglát egy űzet és elkezd fékezni. Az út nedves, a kamion csúszni kezd és $\mu = 0,9$ -es súrlódási együtthatóval fékeződik. Az autó vezetője elbóbiskolt, nem fékezik.

a) Mennyi idő alatt éri utol az autó a kamiont?

b) Mekkora ekkor a kamion sebessége?

Az autó a kamionnal tökéletesen rugalmatlanul ütközik.

c) Mennyi lesz az összetapadt roncs sebessége az ütközés után?

d) Mennyi az autó impulzusának változása az ütközés során? Mennyi a kamioné?

Mennyi az autó + kamion rendszer teljes impulzusának változása?

e) Mennyi az autó mozgási energiájának változása az ütközés során? Mennyi a kamioné?

Mennyi az autó + kamion rendszer teljes mozgási energiájának változása?

Mo.

a) $v_0 = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$, $a = -\mu g = -9 \text{ m/s}^2$

$$x_{\text{kamion}} = D + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 18 + 30t - 4,5t^2, \quad x_{\text{autó}} = v_0 t = 30t$$

$$x_{\text{kamion}} = x_{\text{autó}} : 18 + 30t - 4,5t^2 = 30t \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

b) $v_{\text{kamion}} = v_0 + at = 30 - 9 \cdot 2 = 12 \text{ m/s}$

c) $I_{\text{kamion}} + I_{\text{autó}} = I_{\text{roncs}} : m_{\text{kamion}} v_{\text{kamion}} + m_{\text{autó}} v_{\text{autó}} = (m_{\text{kamion}} + m_{\text{autó}}) v_{\text{roncs}}$

$$8000 \cdot 12 + 1000 \cdot 30 = 9000 \cdot v_{\text{roncs}} \Rightarrow v_{\text{roncs}} = 14 \text{ m/s}$$

d) $\Delta I_{\text{kamion}} = m_{\text{kamion}} (v_{\text{roncs}} - v_{\text{kamion}}) = 8000 \cdot (14 - 12) = 16000 \text{ kgm/s}$

$$\Delta I_{\text{autó}} = m_{\text{autó}} (v_{\text{roncs}} - v_{\text{autó}}) = 1000 \cdot (14 - 30) = -16000 \text{ kgm/s}$$

$$\Delta I_{\text{kamion}} + \Delta I_{\text{autó}} = 0, \text{ ezt használtuk ki a c) részben}$$

e) $\Delta E_{\text{kin,autó}} = \frac{1}{2} m_{\text{autó}} (v_{\text{roncs}}^2 - v_{\text{autó}}^2) = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (14^2 - 30^2) = -352 \text{ kJ}$

$$\Delta E_{\text{kin,kamion}} = \frac{1}{2} m_{\text{kamion}} (v_{\text{roncs}}^2 - v_{\text{kamion}}^2) = \frac{1}{2} \cdot 8000 \cdot (14^2 - 12^2) = 208 \text{ kJ}$$

$$\Delta E_{\text{kin,autó}} + \Delta E_{\text{kin,kamion}} = -144 \text{ kJ}$$

Jancsi és Juliska meglátják egymást a jégpályán. Nagyon megörülnek egymásnak, elkezdenek egymás felé csúszni, majd összeütközés után összekapaszkodnak, nem eresztik el egymást - vagyis ütközésük tökéletesen rugalmatlan ütközésnek tekinthető. Jancsi 50 kg-os, Juliska 40 kg-os. Az ütközés előtt Jancsi sebessége 3 m/s, Juliska sebessége 4 m/s volt. Az ütközésük 0,05 s-ig tartott.

a) Mennyi lesz a közös sebességük?

b) Mennyi Juliska impulzusának változása?

c) Mekkora erő hatott Juliskára, ha feltesszük, hogy ütközéskor a köztük ható erő állandó volt?

d) Hány 'g' gyorsulást jelentett ez Jancsinak?

Mo.

a) ütközés előtti impulzusuk $I_0 = m_{\text{Jancsi}} \cdot v_{\text{Jancsi}} + m_{\text{Juliska}} \cdot v_{\text{Juliska}}$

$$= 50 \cdot 3 + 40 \cdot (-4) = -10 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}, \text{ ha Jancsi sebességét vesszük pozitívnak}$$

[vagy $= 50 \cdot (-3) + 40 \cdot 4 = 10 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$, ha Juliska sebességét vesszük pozitívnak];

ütközés utáni impulzusuk $I_1 = (m_{\text{Jancsi}} + m_{\text{Juliska}}) \cdot u$ (u a közös sebességük)

$$\text{és } I_1 = I_0, \text{ tehát } u = -10 / (50 + 40) = -1/9 \approx -0,11 \text{ m/s.}$$

b) Juliska impulzusának változása $\Delta I_{\text{Juliska}} = m_{\text{Juliska}} \cdot (u - v_{\text{Juliska}}) = 40 \cdot (-0,11 - (-4)) \approx 155,6 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$

[Jancsié pedig $\Delta I_{\text{Jancsi}} = m_{\text{Jancsi}} \cdot (u - v_{\text{Jancsi}}) = 50 \cdot (-0,11 - 3) \approx -155,6 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$,

a két impulzusváltozás összege tényleg zérus.]

c) $\Delta I_{\text{Juliska}} = F \cdot \Delta t \rightarrow F = \Delta I_{\text{Juliska}} / \Delta t = 155,6 / 0,05 \approx 3111 \text{ N}$.

d) Jancsira ugyanekkora erő hatott (ellentétes irányba), így $F = m_{\text{Jancsi}} \cdot a_{\text{Jancsi}}$

$$\rightarrow a_{\text{Jancsi}} = 3111 / 50 \approx 62,22 \text{ m/s}^2, \text{ ez } \approx 6,3g \text{ gyorsulás.}$$