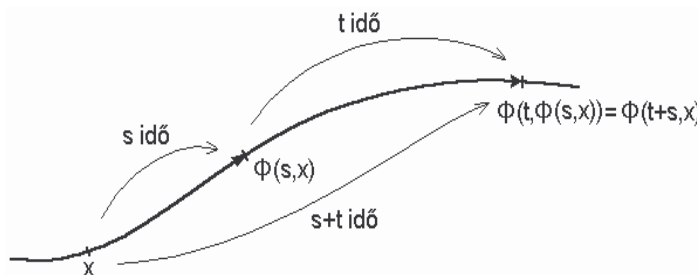


9. DINAMIKAI RENDSZEREK

Különböző folyamatok leírására különböző tudományterületeken állítanak fel olyan modelleket, amelyek nemlineáris közönséges autonóm differenciálegyenlet-rendszerre vezetnek. Ezek a differenciálegyenlet-rendszerek nemlinearitásukból eredően analitikusan legtöbbször nem megoldhatók, ugyanakkor a megoldások igen bonyolultak is lehetnek, és jellegük is (pl. monoton-e vagy sem) érzékenyen függhet a differenciálegyenlet-rendszerben foglalt paraméterek értékeitől. Numerikus módszerekkel (adott paraméterértékeket és kezdeti értékeket választva) előállíthatunk egyes megoldásokat, de ezzel nem kapunk képet sem a megoldások összes lehetséges típusáról, sem az egyes megoldások stabilitásáról. Ebben segít viszont a **dinamikai rendszerek** -más néven **nemlineáris dinamika**- tudománya, amely azt vizsgálja, milyen típusú megoldások lépnek fel különböző paramétertartományokban, és ezek hogyan alakulnak át egymásba.

A matematikai definíció szerint dinamikai rendszernek nevezik a $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ leképezést, ami megadja, hogy az x_0 kezdeti állapot t idő múlva mely x állapotba megy át, vagyis $(t, x_0) \mapsto x$, ha

- a leképezés folytonosan differenciálható;
- rögzített t -re a leképezés kölcsönösen egyértelmű és az inverz is folytonosan differenciálható;
- a leképezés csoporttulajdonsággal bír, azaz $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t+s, x)$:



A definíció szerint tehát dinamikai rendszerek a térben és időben folytonos, determinisztikus rendszerek (lényegében azok a rendszerek, amelyek autonóm differenciálegyenlet-rendszerrel adhatók meg). A dinamikai rendszerek alapvető tulajdonsága, hogy a rendszer egy adott időpontbeli állapota meghatározza a rendszer bármely más időpontbeli állapotát, a teljes jövőjét és múltját (ez a sajátság a determinisztikusság).

Szokás dinamikai rendszernek nevezni a térben és/vagy időben nem folytonos, hanem diszkrét rendszereket is. Ilyen értelemben dinamikai rendszerek a biológiában a sejtek kapcsolatát modellező **sejtautomaták** is. A sejtautomata modellek esetében a sejtér diszkrét sejtekből áll, melyek állapota valamilyen szabály szerint szinkronizáltan változik. Adott szabály esetén a különböző kiindulási állapotok határozzák meg a sejtér időbeli fejlődését, vagyis, hogy a sejtek kihálnak-e vagy élni fognak. Bizonyos esetekben hosszú távon kialakulhatnak látványos álló vagy haladó, periodikusan váltakozó mintázatok is.

A diszkrét dinamikai rendszerek másik típusa az angolul **map**-eknek nevezett leképezések, melyek térben homogén, időben diszkrét módon változó rendszerek leírására alkalmasak; ezek elsőrendű differenciaegyenletekkel adhatók meg.

A dinamikai rendszerek elméletében alapvető fogalom az állapotter, fázistér fogalma. A **fázistér** a rendszert meghatározó független állapotváltozók (fázisváltozók) által kifeszített tér, amely pl. pontmechanikában hat dimenziós (három hely- és három sebességkoordináta); adott mennyiségű ideális gáz esetén két dimenziós (pl. a p - V sík); reakciókinetikában a reakcióban résztvevő komponensek koncentrációit megadó (tehát a komponensek számával megegyező dimenziós) tér. A *fázistérben a rendszer adott időpontbeli állapota (fázisa) egyetlen ponttal (egy vektorral) adható meg.* A rendszer állapota az időben előre-hátra egyértelműen követhető, a fázispont egy görbe -az ún. **trajektória**- mentén mozog. A fázistér használatának az a nagy előnye, hogy azon több kiindulási állapotnak megfelelő folyamatot is ábrázolhatunk együtt, és végülis az összes lehetséges megoldást egy "képbe" sűrítjük. Az egész fázistér mozgását fázisfolyamnak nevezik, amit a **fáziskép**, **fázisportré** ábrázol.

A fázisportré jellegét meghatározza, hogy a rendszer konzervatív, expozív vagy disszipatív-e.

Konzervatív rendszer esetében a trajektóriák legtöbbje zárt görbe, mivel ekkor létezik egy megmaradó, "konzerválódó" mennyiség, amely egy-egy trajektória mentén állandó. A megmaradó mennyiség létéből következik, hogy a rendszer viselkedésének jellege hosszú távon nem változik.

Explozív rendszer fázissterében majdnem minden vagy minden trajektória "elmegy a végtelenbe".

Valódi fizikai, kémiai stb. rendszer esetében persze a "robbanás", az explózió valahol megáll, hiszen nem áll rendelkezésre pl. végtelen anyagmennyiség vagy nem érhető el végtelen nagy sebesség.

Modellek lehetnek expozívak vagy konzervatívak, de a valóságban szigorú értelemben minden rendszer **disszipatív**. Ezek fázissterében –úgy tűnik– mindig van egy vagy több halmaz –ún. **attraktor**–, amely "vonzza" a trajektóriákat. A fázisster kevés pontját kivéve tetszőlegesen választott kiindulási pontból egy átmeneti, tranziens szakasz után a rendszer előbb-utóbb valamelyik attraktorba jut és azontúl ott marad. Az állandósult viselkedés jellegét az attraktor típusa határozza meg. A legfontosabb attraktortípusok a pont-, a periodikus és a kaotikus attraktorok.

A **pontattraktor** a fázissternek olyan pontja, amelyet elérve a fázispont tovább már nem mozog, belőle trajektóriák nem indulnak ki (**egyensúlyi pont, stabil stacionárius pont**).

A **periodikus attraktor** (stabil **határciklus**) egy zárt görbe a fázissterben, amelyen a fázispont minden periódusban körbejár. A rendszer egyszerű vagy összetett szabályos oszcillációkat végez.

Kaotikus (különös) **attraktor** a fázissternek olyan részhalmaza, amelyen belül a mozgás nem ismétli önmagát, "kaotikus". A rendszer szabálytalan görbét ír le, amely hasonlíthat ugyan oszcillációra, de nem jelölhető ki rajta egy pontosan ismétlődő szakasz. Nagyon közeli pontokból induló megoldások egymástól exponenciálisan távolodhatnak, így bármilyen közel is veszünk fel két kiindulópontot, azok nem maradnak egymás közelében (de mindkettő az attraktoron belül marad). Ugyanakkor ez a kaotikus viselkedés determinisztikus: azonos kiindulási állapotból indulva mindig azonos megoldást kapunk. Kísérleteknél azonban a kiindulási pontok és a paraméterek tökéletes azonossága nem biztosítható, így látszólag más lesz a megoldás. Kaotikus attraktor csak akkor fordulhat elő, ha a fázisster legalább három dimenziós.

Ha a rendszert kitérítjük addigi állapotából, kimozdítjuk az attraktorból, visszatér oda, mert az attraktorok stabilisak, vonzzák a trajektóriákat. Előfordul azonban az is, hogy egy rendszernek több attraktora van egyszerre; ekkor mindegyik attraktornak megvan a saját vonzási medencéje.

Az attraktorok száma és típusa egy adott dinamikai rendszernek függhet a rendszerben szereplő **paraméterek** értékeitől is. A paraméterek értékének változtatásakor az attraktorok számában és/vagy típusában bekövetkező változást **bifurkációnak** nevezik. A kritikus bifurkációs paraméterértéket átlépve a rendszer viselkedése hirtelen jellegében megváltozik.

A fázisster egy pontján csak egy görbe mehet át a dinamikai rendszerek definíciójából következően (a determinisztikusság miatt). Ennek megfelelően a fázisportré körülbelüli rekonstruálása történhet az **iránymező** megrajzolásával: a fázissterben bizonyos sűrűséggel felvett pontokba a deriváltakkal megadott kis vektorokat rajzolhatunk, amelyek a megoldásgörbéknek (a trajektóriáknak) érintői.

A továbbiakban **autonóm differenciálegyenlet-rendszerekkel** megadható dinamikai rendszerekről lesz szó. Autonóm, azaz a jobboldal az időtől expliciten nem függ (ezzel kapcsolatos a definícióban a csoporttulajdonság). A differenciálegyenlet-rendszert írjuk

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \text{ alakba,} \quad \text{ahol } \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{a pont az idő szerinti differenciálást jelöli.} \quad (1)$$

A *differenciálegyenletek kvalitatív elmélete* segítségével információkat nyerhetünk a megoldások menetéről a megoldások ismerete nélkül is, pl. arról, hány pontattraktora van a rendszernek, van-e másféle attraktora, mekkora az egyes attraktorok vonzási tartománya, vannak-e végtelenbe menő megoldások,...

A differenciálegyenlet-rendszer vizsgálatánál első lépés szokott lenni az **egyensúlyi** vagy más néven **stacionárius pontok** meghatározása az $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}$ algebrai egyenletrendszer megoldásával. Mivel ezekben a pontokban $\dot{\underline{x}} = \underline{0}$, ezeket kiindulási pontként választva a rendszer "örökké" abban a pontban marad. Ha viszont kis zavarás, perturbáció kicsit kimozdítja a rendszert abból a pontból, akkor a rendszer vagy visszatér oda – ekkor a stacionárius pont stabilis (pontattraktor), vagy nem – ekkor a stacionárius pont nem stabilis.

A következő lépés a stacionárius pontok **stabilitásának vizsgálata**. A továbbiakban először megvizsgáljuk a *lineáris* differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontjának stabilitását. *Nemlineáris* rendszerek stabilitásvizsgálatát is a lineáris rendszerekre vezethetjük vissza, ha a differenciálegyenlet-rendszert linearizáljuk a stacionárius pontok környezetében.

Lineáris differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontjának stabilitásvizsgálata

Egy lineáris, autonóm, állandó együtthatós differenciálegyenlet ill. -rendszer mindig megoldható.

Egydimenziós esetben például az $\dot{x} = kx$ differenciálegyenlet $x(0) = x_0$ kezdeti értékhez tartozó megoldása $x(t) = x_0 \cdot e^{kt}$. A stacionárius pont, az $x = 0$ pont $k < 0$ esetén stabilis (ekkor az exponenciális tag időben csökken, bármely $x_0 \neq 0$ pontból az origóba tart), $k \geq 0$ esetén nem stabilis.

Magasabb dimenziós $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x}$ lineáris rendszer megoldása tipikus esetben $\underline{s}_i e^{\lambda_i t}$ tagok lineáris kombinációjaként áll elő, ahol λ_i az $\underline{A}$ mátrix i -edik sajátértéke, $\underline{s}_i$ a hozzá tartozó sajátvektor. A stacionárius pont típusának meghatározásához ilyenkor tehát az $\underline{A}$ mátrix sajátértékeit kell kiszámolni. Stabilis akkor és csak akkor lesz a stacionárius pont, ha az összes sajátérték negatív. Ha a sajátértékek komplex számok, akkor a valós rész előjelét kell vizsgálni.

Nézzük részletesen a kétdimenziós esetet (magasabb dimenziós lineáris rendszernél a stabilitásvizsgálat hasonló módszerrel történik):

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad (2a)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad (2b)$$

Stacionárius pontja (mint minden lineáris rendszeré) az origó.

Az $\underline{A}$ mátrix sajátértékeit a $\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$ egyenlet (ún. karakterisztikus polinom) megoldásával kapjuk meg.

$$\underline{A} - \lambda \underline{E} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \quad (4)$$

Mivel $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det \underline{A}$ és $a_{11} + a_{22} = \text{tr } \underline{A}$ ("tr $\underline{A}$ " az $\underline{A}$ mátrix nyoma, trace-e), (5)
a karakterisztikus polinomot átírhatjuk

$$\lambda^2 - \text{tr } \underline{A} \cdot \lambda + \det \underline{A} = 0 \quad (6)$$

alakba. Ezt az egyenletet megoldva a sajátértékek:

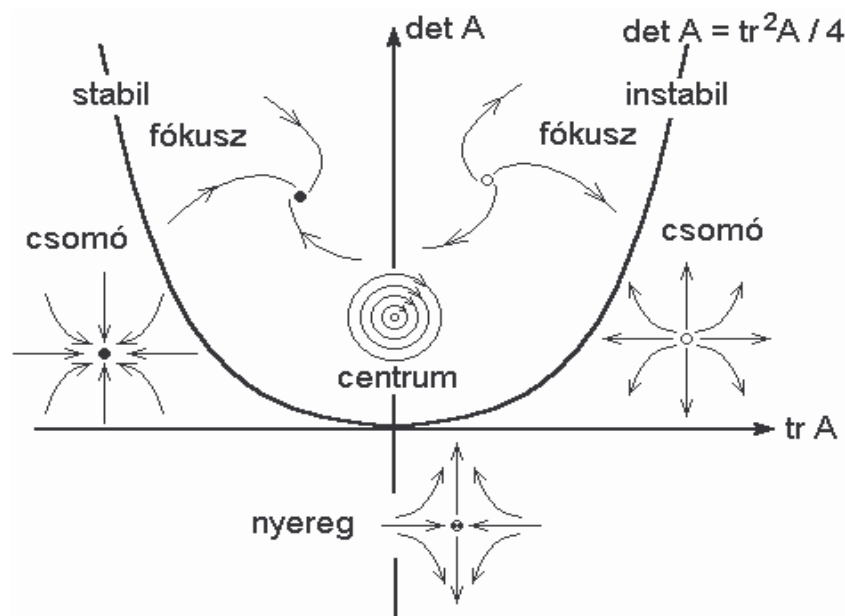
$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr } \underline{A}}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{tr}^2 \underline{A}}{4} - \det \underline{A}} \quad (7)$$

A stabilitás szempontjából ezek előjele a döntő (komplex sajátértékek esetén a valós rész előjele).

A sajátértékek kiszámolása nélkül is megtudhatjuk, milyen típusú a stacionárius pont, elég kiszámolni az $\underline{A}$ mátrix determinánsát és nyomát, és megvizsgálni az alábbi feltételeket:

A következő esetek lehetségesek:

A sajátértékek ...	... helye a $\text{tr } A - \det A$ síkon	A stacionárius pont típusa
$\lambda_1 \lambda_2 < 0$, az egyik sajátérték pozitív, a másik negatív	$\det A < 0$	nyereg
$\text{Re } \lambda_1 > 0$ és $\text{Re } \lambda_2 > 0$ mindkét sajátérték (valós része) pozitív	$\det A > 0$ és $\text{tr } A > 0$	instabil (csomó vagy fókusz)
$\text{Re } \lambda_1 < 0$ és $\text{Re } \lambda_2 < 0$ mindkét sajátérték (valós része) negatív	$\det A > 0$ és $\text{tr } A < 0$	stabil (csomó vagy fókusz)
λ_1 és λ_2 valósak	$\det A < (\text{tr } A)^2 / 4$	csomó (stabil vagy instabil)
λ_1 és λ_2 komplex konjugáltak	$\det A > (\text{tr } A)^2 / 4$	fókusz (stabil vagy instabil)
λ_1 és λ_2 valósak, de legalább az egyik zérus	$\det A = 0$	nyeregcsomó
λ_1 és λ_2 komplex konjugáltak, a valós részük zérus	$\det A > 0$ és $\text{tr } A = 0$	centrum
λ_1 és λ_2 valósak, és $\lambda_1 = \lambda_2$	$\det A = (\text{tr } A)^2 / 4$	egytengetlyű csomó



Nemlineáris differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontjainak stabilitásvizsgálata

Általában az $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ differenciálegyenlet-rendszer nem megoldható, de az $\underline{x}_0$ stacionárius pontokat az $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}$ algebrai egyenletrendszer megoldásával meg tudjuk határozni. Írjuk fel az $\underline{x}_0$ stacionárius ponttól való eltérésre, $\underline{y} = \underline{x} - \underline{x}_0$ -ra vonatkozó differenciálegyenlet-rendszert! Mivel $\dot{\underline{x}}_0 = \underline{0}$, ezért $\dot{\underline{y}} = \dot{\underline{x}}$, az új differenciálegyenlet-rendszer formailag megegyezik az eredetivel: $\dot{\underline{y}} = \underline{f}(\underline{y})$.

Hasonlóképpen megegyezik a stacionárius pontjuk körüli Taylor-soruk is:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \approx \underline{f}(\underline{x}_0) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + \dots \quad \text{ill.}$$

$$\dot{\underline{y}} = \underline{f}(\underline{y}) \approx \underline{f}(\underline{0}) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{y}} \cdot \underline{y} + \dots \quad (\text{Az } \underline{y}\text{-ra vonatkozó differenciálegyenlet-rendszer stacionárius pontja az origó.})$$

Mivel $\underline{x}_0$ stacionárius pont, ezért az első tag zérus, és $\underline{x}_0$ környezetében jó közelítés a lineáris tag, a magasabb rendű tagokat pedig elhanyagolhatjuk. A stacionárius pont körüli linearizált egyenletrendszer alkalmas arra, hogy meghatározzuk az adott stacionárius pont stabilitását, típusát.

A $\partial f / \partial \underline{y} = \partial f / \partial \underline{x} = \mathbf{J}$ mátrixot **Jacobi-mátrix**nak hívják.

Kétdimenziós rendszer Jacobi-mátrixa, ha $\dot{x} = f(x,y)$, $\dot{y} = g(x,y)$:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

A $\mathbf{J}$ mátrixba sorra behelyettesítjük a stacionárius pontok koordinátáit, és a kapott mátrix alapján (a lineáris esethez hasonlóan) elvégezzük a stabilitásvizsgálatot. (Megjegyezzük, hogy ha $\mathbf{J}$ -nek van zérus valósrésű sajátértéke, akkor ez a vizsgálat nem elegendő.)

Kinetikai differenciálegyenlet-rendszer felírása a mechanizmus alapján

Tekintsük a következő reakciót:



A, B, ... a reakcióban résztvevő komponensek,

$\alpha, \beta, \dots$ a reagensek, $\alpha', \beta', \dots$ a termékek sztöchiometriai együtthatói,

k_i a reakciósebességi együttható.

Tömeghatáskinetikát feltételezve a reakció sebessége:

$$v_i = k_i [A]^\alpha [B]^\beta \dots \quad (10)$$

Az egyes komponensek koncentrációváltozásának sebességét leíró differenciálegyenlet a reakciósebességből úgy számolható, hogy azt megszorozzuk annyival, amennyivel nő az adott komponens sztöchiometriai együtthatója a reakcióban (azaz amennyi *keletkezik* belőle az adott reakcióban). Pl. az A komponensre

$$\frac{d[A]}{dt} = [\dot{A}] = (\alpha' - \alpha) \cdot v_i = (\alpha' - \alpha) \cdot k_i [A]^\alpha [B]^\beta \dots \quad (11)$$

Ha egy komponens több reakcióban is részt vesz, akkor az egyes reakciókra vonatkozó tagokat összegezni kell:

$$\frac{d[A]}{dt} = \sum_{i=1}^r (\alpha' - \alpha) \cdot v_i, \quad \text{ahol } r \text{ a reakciók száma.} \quad (12)$$

A gyakorlat célja az, hogy a hallgatók megismerjék a dinamikai rendszerek alapfogalmait, elsajátítsák a lineáris stabilitásvizsgálat alapjait és megismerkedjenek egy olyan programmal, amely kétdimenziós differenciálegyenlet-rendszerek numerikus megoldásával képes a fázissík megrajzolására.

Az elvégzendő feladat:

Egy egyszerű, kétváltozós reakciókinetikai rendszer stacionárius pontjainak meghatározása és azok stabilitásának vizsgálata (a lentebb kidolgozott 3. példához hasonló módon), továbbá a fáziskép rekonstruálása a *PhasePictor* nevű differenciálegyenlet-rendszer megoldó program segítségével.

1. A reakciómechanizmus alapján írjuk fel a kinetikai differenciálegyenlet-rendszert (9)-(12) szerint:

$$\dot{x} = f(x,y), \quad \dot{y} = g(x,y)$$

A differenciálegyenlet-rendszer egy paramétert tartalmaz, melynek értékét tekintsük most állandónak.

2. Keressük meg a stacionárius pontokat az

$$f(x,y) = 0, \quad g(x,y) = 0$$

algebrai egyenletrendszer megoldásával.

3. Állítsuk elő a rendszer Jacobi-mátrixát (ld. (8)).

4. Sorra helyettesítsük be a stacionárius pontok koordinátáit a Jacobi-mátrixba.

5. Számoljuk ki az így kapott mátrixok determinánsát és nyomát (ld. (5)).

6. A determináns és nyom alapján (a 4. oldalon található táblázat vagy az ábra segítségével) határozzuk meg sorra az egyes stacionárius pontok típusát!

7. Írjuk be a differenciálegyenlet-rendszerünket a [PhasePictor](#) nevű programba.

8. Rajzoljuk meg a differenciálegyenlet-rendszerünk fázisportréját: rajzoltassunk iránymezőt, majd – különböző kezdeti feltételeket megadva – rajzoltassunk meg jellemző trajektóriákat. (A programhoz tartozó [használati útmutató](#) letölthető a honlapunkról.) Keressük meg a fázissíkon a stacionárius pontokat, és vessük össze stabilitásukat a lineáris stabilitásvizsgálat alapján meghatározott típusukkal.

Szorgalmi feladat:

Vizsgáljuk meg, hogyan változik a stacionárius pontok jellege, ha a rendszerben levő paramétert bifurkációs paraméternek tekintjük! Azaz: milyen paraméterértékeknél változik egy-egy stacionárius pont jellege, milyen paramétertartományokban milyen típusúak az egyes stacionárius pontok.

Megoldott feladatok:

1. Adott egy kétváltozós lineáris rendszer **A** együttható-mátrixa.

Határozzuk meg, hogy a "p" paraméter értékét változtatva hogyan változik a stacionárius pont típusa!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & 9 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:	$\text{tr } \mathbf{A} = p-2;$	$\text{tr } \mathbf{A} = 0,$ ha	$p_1 = 2$
	$\det \mathbf{A} = -2p+9;$	$\det \mathbf{A} = 0,$ ha	$p_2 = 4,5$
		$(\text{tr } \mathbf{A})^2 = 4 \det \mathbf{A},$ ha	$p^2+4p+32=0 \Rightarrow p_3 = 4, p_4 = -8$
tehát ha	$p < -8$	stabilis csomó	
	$-8 < p < 2$	stabilis fókusz	
	$2 < p < 4$	instabil fókusz	
	$4 < p < 4,5$	instabil csomó	
	$p > 4,5$	nyereg	

2. Határozzuk meg az alábbi rendszer stacionárius pontjait és linearizálás után állapítsuk meg azok jellegét!

$$\dot{x} = x + y$$

$$\dot{y} = (y + 2x)(y + 1)(y + 2x + 1)$$

Megoldás:

A stacionárius pontok koordinátái: $x_1 = 0, y_1 = 0$
 $x_2 = 1, y_2 = -1$
 $x_3 = -1, y_3 = 1$

A Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2(y+1)(2y+4x+1) & (y+2x)(y+2x+1) + (y+1)(y+2x) + (y+1)(y+2x+1) \end{bmatrix}$$

Az (x_1, y_1) pontban

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det \mathbf{J}_1 = -1$, tehát a $(0,0)$ pont **nyereg**.

Az (x_2, y_2) pontban

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

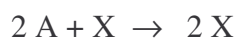
$\det \mathbf{J}_2 = 2$, $\text{tr } \mathbf{J}_2 = 3$, $(\text{tr } \mathbf{J}_2)^2 > 4 \det \mathbf{J}_2$, tehát az $(1,-1)$ pont **instabil csomó**.

Az (x_3, y_3) pontban

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$\det \mathbf{J}_3 = 2$, $\text{tr } \mathbf{J}_3 = -1$, $(\text{tr } \mathbf{J}_3)^2 < 4 \det \mathbf{J}_3$, tehát a $(-1,1)$ pont **stabilis fókusz**.

3. Írjuk fel a reakciósémának megfelelő kinetikai egyenleteket, keressük meg a stacionárius pontokat és határozzuk meg azok típusát!



A sebességi állandók egységnyiek, az 'A' komponens koncentrációja állandó.

Megoldás:

A kinetikai differenciálegyenlet-rendszer:

$$\dot{x} = a^2 x - xy^2 = x(a^2 - y^2)$$

$$\dot{y} = xy^2 - y = y(xy - 1)$$

A stacionárius pontok:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, & y_1 &= 0 \\x_2 &= 1/a, & y_2 &= a \\x_3 &= -1/a, & y_3 &= -a\end{aligned}$$

A Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} a^2 - y^2 & -2xy \\ y^2 & 2xy - 1 \end{bmatrix}$$

Az (x_1, y_1) pontban:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

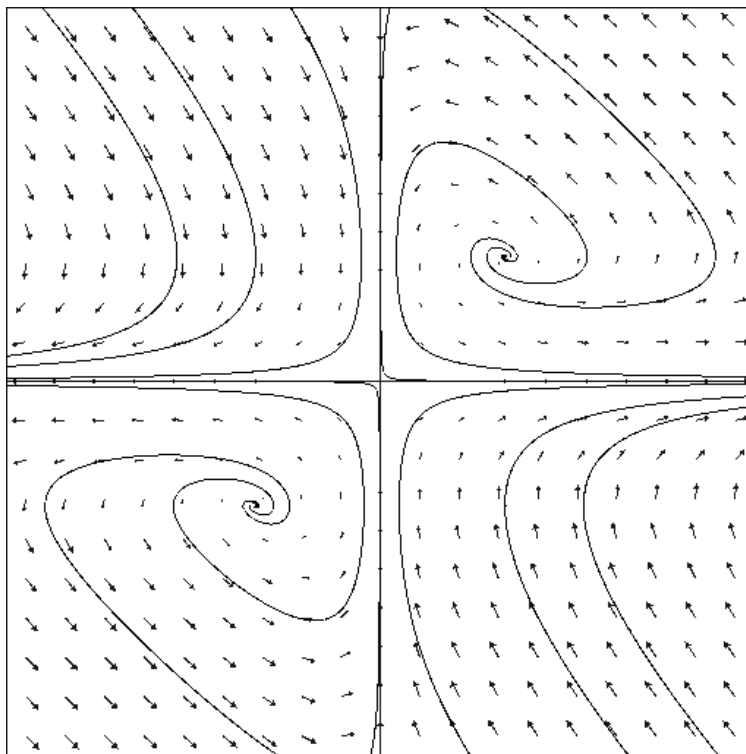
$\det \mathbf{J}_1 = -a^2$, tehát a $(0,0)$ pont **nyeregpont**

Az (x_2, y_2) és az (x_3, y_3) pontokban:

$$\mathbf{J}_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ a^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det \mathbf{J}_{2,3} = 2a^2$, $\text{tr } \mathbf{J}_{2,3} = 1$,

tehát $(1/a, a)$ és $(-1/a, -a)$ **instabil**
fókusz, ha $a^2 > 1/8$
csomó, ha $a^2 < 1/8$



A rendszer fázisportréja $a=1$ esetén.

$x_{\min} = y_{\min} = -3$, $x_{\max} = y_{\max} = 3$.

Az ábra a PhasePictor programmal készült.