

4. LOGIKAI ÁRAMKÖRÖK

A **gyakorlat célja**, hogy a hallgatók megismerkedjenek a logikai algebra elemeivel, és képesek legyenek egyszerű logikai függvények realizálására integrált áramkörök (IC-k) felhasználásával.

Számítógépekben, műszerekben, vezérlő automatákban alapvető szerep jut az olyan áramköröknek, melyek valamilyen logikai összefüggést fejeznek ki. Ezeknek a logikai áramköröknek az építőkövei az úgynevezett kapuáramkörök. A kapuáramköröknek két állapota lehetséges, egy nyitott és egy zárt állapot, mely állapotok a *logikai igennek* illetve *nemnek* felelnek meg. A legegyszerűbb áramköri elem, melynek két állapota lehet, az egyállású kapcsoló, mely bekapcsolva vezeti az áramot, kikapcsolva pedig nem.

A logikai áramkörök tervezésénél az a célunk, hogy bizonyos események bekövetkezésénél az áramkör meghatározott módon vezéreljen valamilyen eszközt. Például a lift induljon felfelé, ha a liftben megnyomtak egy magasabb emeletnek megfelelő gombot, vagy ha a lift egy emeleten áll és egy felsőbb emeleten megnyomták a hívógombot, de ne induljon, ha az ajtó nyitva van, stb. Itt bizonyos lehetséges események bekövetkezéséről vagy be nem következéséről van szó és ezekre az eseménykombinációkra adott válaszról (esetünkben: hogy a lift elindul felfelé vagy lefelé, vagy nem mozdul).

Az eseményeket, melyek bekövetkeznek vagy nem, a bekövetkezésükre utaló állításokat, ítéleteket, melyek igaznak vagy hamisnak bizonyulnak, *logikai változóknak* tekinthetjük, olyan változóknak, melyeknek két lehetséges értéke van, 1 és 0. A logikai változó értéke 1, ha az esemény bekövetkezik, ha az állítás igaz, és 0 az ellenkező esetben. Lehet a szóban forgó eseményeket kapcsolókkal is szemléltetni - a kapcsoló bekapcsolása jelenti az esemény bekövetkezését, a kikapcsolt állapot pedig, hogy az esemény nem következett be.

Az ilyen kétállapotú elemek halmazán értelmezhetünk műveleteket, sőt egész algebrát (Boole-algebra), összeadással és szorzással, nulla "0" és egység "E" elemmel, inverzzel. Boole-algebra a halmazalgebra is, ahol az összeadás a halmazok egyesítése, a szorzás a halmazok metszete, az inverz a komplementerhalmaz, egység az univerzum (a mindent magába foglaló halmaz) és a zéró elem az üres halmaz. Az igaz vagy hamis állításokra vonatkozó algebrát *logikai algebrának* nevezzük. Ha események alkotják az alaphalmazt, eseményalgebráról beszélünk, ha pedig kapcsolók az alaphalmaz elemei, kapcsolóalgebráról. A logikai algebra összefüggései jól szemléltethetők a halmazelméletben megismert Venn-diagrammokkal.

A logikai algebra

Jelöljük **A, B, C, ..., Y** -nal annak a halmaznak az elemeit, melyen a *Boole-algebrát* értelmezzük. Legyenek ezek az elemek most események, illetve az események bekövetkezésére vagy tényállásokra utaló állítások, melyek igazak és hamisak lehetnek, ennek megfelelően a hozzájuk rendelt logikai változó értéke 1 vagy 0. Az elemekre értelmezett műveletek eredménye is az eredeti halmaz eleme, egy esemény illetve állítás, mely megint csak igaz vagy hamis lehet, tehát a megfelelő logikai változó 1 vagy 0 értéket vehet fel.

A Boole-algebrában két alapl műveletet értelmezzünk:

1. Az összeadás illetve "VAGY" kapcsolat:

$$Y = A + B$$

eredménye az az esemény, mely bekövetkezik, ha vagy A, vagy B bekövetkezik, vagyis igaz, ha akár A, akár B igaz.

Az összeadás kommutatív és asszociatív:

$$\mathbf{A + B = B + A, \quad A + (B + C) = (A + B) + C.} \quad (1)$$

Az összeadásnál értelmezhetünk nulla-elemet (**0**) a következőképpen:

$$\mathbf{A + 0 = A,} \quad (2)$$

a "0" elem az abszolút lehetetlen eseményt jelenti.

2. A szorzás illetve "ÉS" kapcsolat:

$$\mathbf{Y = A B}$$

eredménye az az esemény, mely csak akkor következik be, ha **A** és **B** is bekövetkezik, csak akkor igaz, ha **A** és **B** is igaz.

A szorzás szintén kommutatív és asszociatív:

$$\mathbf{A B = B A, \quad A (B C) = (A B) C.} \quad (3)$$

A szorzásnál értelmezhetünk egységelemet ("E"):

$$\mathbf{A E = A.} \quad (4)$$

E a biztosan bekövetkező esemény, illetve a mindig igaz állítás.

Az egység- és zéroelemre fennáll, hogy tetszőleges **A** elem esetén

$$\mathbf{A 0 = 0, \quad A + E = E.} \quad (5)$$

Fennáll továbbá, hogy

$$\mathbf{A + A = A, \quad A A = A.} \quad (6)$$

A szorzás és összeadás kétféleképpen is disztributív; tetszőleges **A, B, C** elemeknél

$$\mathbf{A (B + C) = A B + A C, \quad A + B C = (A + B) (A + C).} \quad (7)$$

Minden **A** elemhez létezik az elem inverze, $\bar{A}$, amit az **A** elem negáltjának, tagadásának nevezünk.

$$\mathbf{A \bar{A} = 0,} \quad (8)$$

$$\mathbf{A + \bar{A} = E.} \quad (9)$$

Egy elem negáltjának negáltja az eredeti elem:

$$\mathbf{\bar{\bar{A}} = A, \quad \text{valamint} \quad \bar{E} = 0 \quad \text{és} \quad \bar{0} = E.} \quad (10)$$

A fentiekből következik, hogy

$$\mathbf{A + AB = A, \quad \text{valamint} \quad A + \bar{A}B = A + B.} \quad (11)$$

Az összeg és szorzat negáltjára fennáll a Morgan-szabály:

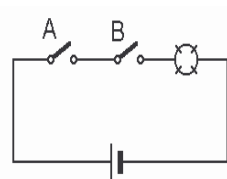
$$\begin{aligned} \overline{A + B + C + \dots} &= \bar{A} \bar{B} \bar{C} + \dots = \bar{A} \bar{B} \bar{C} + \dots = \bar{A} \bar{B} \bar{C} \dots, \\ \overline{ABC\dots} &= \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \dots = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

A logikai műveleteket jellemezhetjük azzal a táblázattal, mely a változók lehetséges értékeihez megadja az eredmény értékét. Ez az úgynevezett "igazságtáblázat".

Az alpműveletek igazságtáblázata:

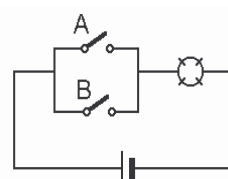
inverz, tagadás, negálás		összeadás, "VAGY" kapcsolat			szorzás, "ÉS" kapcsolat		
A	Y = $\bar{A}$	A	B	Y = A + B	A	B	Y = A B
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0
		0	1	1	0	1	0
		0	0	0	0	0	0

A tagadást, összeadást, szorzást szemléltethetjük kapcsolókkal. Legyen az **A** esemény az "A" kapcsoló bekapcsolása, a **B** esemény a "B" kapcsoló bekapcsolása, az **Y** esemény pedig egy lámpa kigyulladás. Az összeadás párhuzamosan kötött kapcsolóknak, a szorzás pedig a kapcsolók sorba kötésének felel meg:



$$Y = A B$$

a lámpa csak akkor ég,
ha mindkét kapcsoló "BE" állásban van.

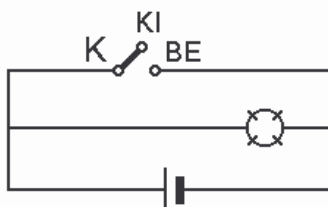


$$Y = A + B$$

a lámpa ég,
ha bármelyik kapcsoló "BE" állásban van.

1. ábra. Logikai szorzás és összeadás kapcsolókkal

A negálást megvalósíthatjuk a fogyasztóval párhuzamosan kötött kapcsolóval. A lámpa ég (**Y** igaz), ha a **K** kapcsoló "KI" állásban van és nem ég a kapcsoló bekapcsolt állapotában:



2. ábra. Tagadás megvalósítása kapcsolóval

A logikai változók halmazán értelmezhetünk függvényeket. Ezeket a függvényeket megadhatjuk a fenti alapvető műveletek kombinációjával, vagy megadhatjuk az igazságtáblázattal.

$$Y = f(A, B, C, \dots),$$

ahol az **A, B, C,...** független változók és az **Y** függvényérték is logikai változók.

Legyen például

$$Y = A B + B \bar{C} + \bar{B} + C,$$

ennek a függvénynek az igazságtáblázata:

(egy igazságtáblázatnak mindig 2^n sora van, ahol n a független változók száma)

A	B	C	$Y = A B + B \bar{C} + \bar{B} + C$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Egy függvény *standard alakját* úgy kapjuk meg az igazságtáblázatból, hogy összeadjuk a függvény összes változójának vagy negáltjának az olyan szorzatait, melyekre a függvény értéke "igaz".

A fenti függvény standard alakja:

$$Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC$$

A standard alakot az (1)–(11) azonosságok felhasználásával egyszerűbb függvényalakra hozhatjuk:

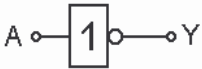
$$Y = \bar{A}\bar{C}(\bar{B} + B) + A\bar{C}(\bar{B} + B) + AB(\bar{C} + C) = \bar{A}\bar{C} + A\bar{C} + AB = \bar{C}(\bar{A} + A) + AB = AB + \bar{C}$$

Figyeljük meg, hogy a fenti átalakítás során az $AB\bar{C}$ tagot kétszer is felhasználtuk. A (6) azonosság szerint ugyanis $A = A + A$, vagyis **egy tagot tetszőlegesen sokszor felhasználhatunk!**

A kapuáramkörök

A legegyszerűbb logikai műveleteket elektromos kapcsolásokkal -úgynevezett kapuáramkörökkel- reprezentálhatjuk. A kapuáramkörök bemenetei felelnek meg az **A**, **B**, ... független változóknak és a kimenet az **Y** "eredménynek". A logikai változók "0" értékének a bemeneteken és a kimeneten néhány tized V-os, az "1" értéknek néhány V-os feszültség felel meg. A kapuáramkörök kombinálásával tetszőleges logikai függvényt valósíthatunk meg. A kapuáramkörök fajtái, elnevezésük és jelölésük a 3. ábrán látható.

A kapuáramköröket félvezető diódákból és tranzisztorokból építik fel, és leginkább integrált áramkörökként (IC) forgalmazzák. Az IC-kben az egész kapuáramkört egyetlen szilícium szeleten ("chip") alakítják ki. Az IC-k közös tokban több azonos kapuáramkört is tartalmaznak, a közös tápfeszültség-vezeték, az egyes áramkörök be- és kimenete az IC lábaihoz csatlakozik. Az IC-k általában 5 V tápfeszültséget igényelnek. Technológiai okokból AND és OR kapuk helyett inkább NAND és NOR kapukat gyártanak.

kapu elnevezése	függvény	jelölés
NOT (inverter)	$Y = \bar{A}$	
AND (és)	$Y = A \cdot B$	
OR (vagy)	$Y = A + B$	
NAND	$Y = \overline{A \cdot B}$	
NOR	$Y = \overline{A + B}$	

3. ábra. A kapuáramkörök jelölése

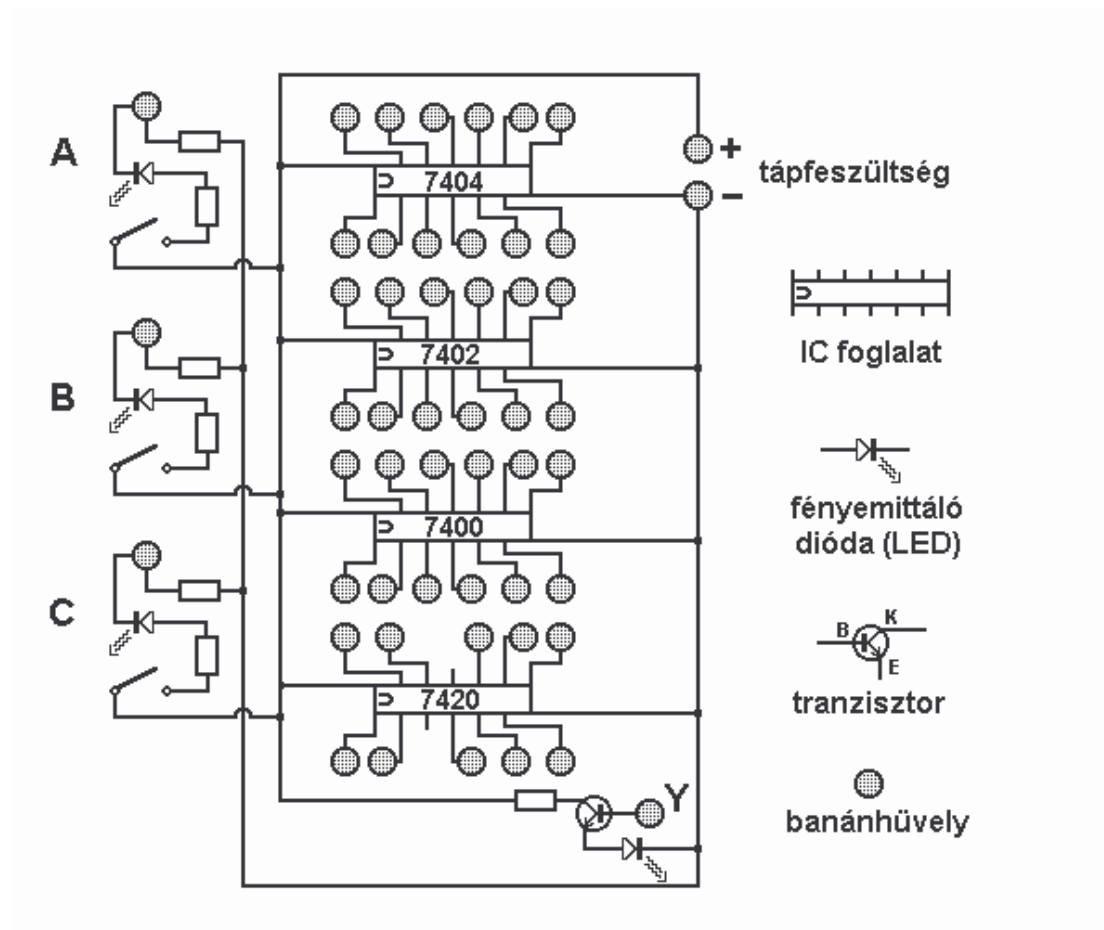
Mérés

Eszközök:

- kapuáramkörök (7402, 7420, 7400 és 7404 számú integrált áramkörök)
- panel a logikai áramkör realizálásához
- közös egyenfeszültségű tápegység elosztóval
- mérőszinórok

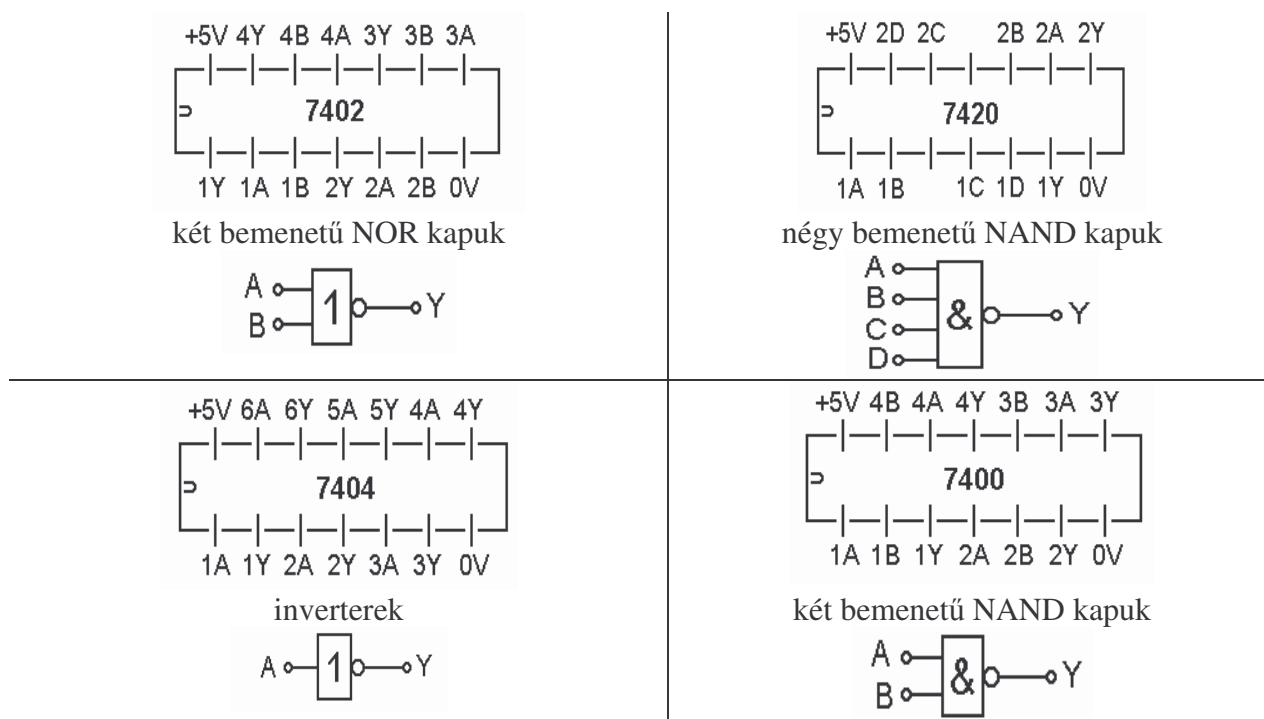
A logikai áramkört a 4. ábrán látható panelon (nyomtatott áramköri lapon) állítjuk össze. A panelon négy IC foglalatot találunk, ezekbe az IC-ket úgy kell behelyezni, hogy az IC-ház tetején látható $\sqsupset$ vagy o jel bal oldalra kerüljön. A kapubemenetekhez és -kimenetekhez az IC-foglalat felett és alatt banánehüvelyek csatlakoznak. Minden IC-hez két tápfeszültség-vezeték is csatlakozik a nyomtatott áramköri lapon (ezekhez nem tartozik banánehüvely). A panel jobb felső sarkában lévő + ill. – jelű banánehüvelyekhez csatlakoztathatjuk az egyenfeszültségű tápegységet.

A *bemenő* jeleket a logikai áramkör számára a panel bal oldalán lévő kapcsolókkal adhatjuk. A kapcsolót a hozzá tartozó banánehüvelyről mérőszinórral csatlakoztatjuk a megfelelő IC-bemenethez. A kapcsoló bekapcsolt állapotát (azt, hogy a megfelelő logikai változó értéke 1) egy lámpa (LED) kigyulladás jelzi. A logikai áramkör *kimenetét* a jobb alsó sarokban levő „Y” jelű banánehüvelyhez csatlakoztatjuk. Ha a kimenőjel logikai "igen"-nek felel meg (a logikai változó értéke 1), a kimenethez csatlakozó LED égni fog.



4. ábra. Panel a logikai áramkör összeállításához

Az egyes IC-k láb kiosztása az 5. ábrán látható. (A 0 V ill. +5 V lábakhoz nincs banánhüvely.)



5. ábra. A kapuáramköröket magába foglaló IC-k felülnézete és láb kiosztása (A, B, C-vel a bemeneteket, Y-nal a kimenetet jelöltük)

A négy bemenetű NAND kapu használható kevesebb bemenettel is.

A mérési feladat

Az oktató által adott feladatnak megfelelő logikai algebrai függvény felírása és megvalósítása NAND, NOR és inverter kapukkal:

1. Meghatározzuk a feladat igazságtáblázatát és ennek alapján ...
2. ... felírjuk a logikai algebrai függvény standard alakját.
3. Egyszerűsítjük és ...
4. ... átalakítjuk úgy, hogy NAND és NOR kapukkal, valamint inverterekkel megvalósítható legyen a feladatnak megfelelő áramkör.
5. Megrajzoljuk a kapcsolási rajzot, és ...
6. ... összeállítjuk a panelon a logikai áramkört.
7. Ellenőriztetjük az oktatóval, és ezután ...
8. ... csatlakoztathatjuk a panelt a tápegységhez.
9. Az igazságtáblázattal összehasonlítva ellenőrizzük, hogy az áramkör valóban a kiadott feladatnak megfelelően működik.

Példák

1. A folyosói világítást a folyosó mindkét végén fel tudjuk kapcsolni és le is tudjuk oltani (alternatív kapcsoló). Írjuk ezt le a logikai algebra nyelvén!

Adjuk meg a folyosói világítás áramkörének kapcsolási rajzát! (Használjunk kétállású kapcsolókat). Hogyan valósítanánk meg a kapcsolást kapuáramkörökkel? (NAND és NOR kapukat és invertereket használhatunk).

(A kétállású kapcsoló "KI" állásánál is van a vezeték számára csatlakozási lehetőség, így a kapcsoló két áramkört tud -alternatív módon- be- illetve kikapcsolni.)

Megoldás:

Legyen az **A** esemény az, hogy az "A" kapcsoló fel van kapcsolva, a **B** esemény ugyanez a "B" kapcsolóra, az **Y** esemény pedig hogy "ég a lámpa". Legyen a két kapcsoló alaphelyzetben "LE" állapotban és ekkor a lámpa ne égjen.

Bármelyik kapcsoló felkapcsolásakor a lámpa kigyullad, tehát

$$Y = A \bar{B} + \bar{A} B.$$

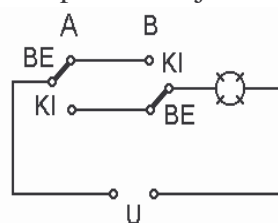
A lámpa elalszik, ha bármelyik kapcsoló állapotát megváltoztatjuk: akár a felkapcsolt kapcsolót lekapcsoljuk vagy a másikat fel, azaz

$$\bar{Y} = A B + \bar{A} \bar{B}$$

A függvény igazságtáblázata:

A	B	Y
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

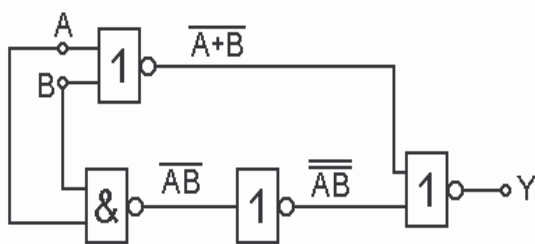
A kapcsolási rajz:



Alakítsuk át úgy a fenti összefüggést, hogy inverterekkel, NAND és NOR kapukkal legyen megvalósítható!

$$Y = A \bar{B} + \bar{A} B = \overline{\overline{A \bar{B} + \bar{A} B}} = \overline{\overline{A \bar{B}} \cdot \overline{\bar{A} B}} = \overline{(\overline{A} + B)(A + \bar{B})} = \overline{\overline{A} B + A \bar{B}} = \overline{\overline{A} B} + \overline{A \bar{B}} = A B + \bar{A} \bar{B}$$

Az átalakításnál a "tagadás tagadásának szabályát" (10) és a Morgan-szabályt (12) alkalmaztuk. A logikai áramkört egy inverterrel, egy NAND és két NOR kapuval valósíthatjuk meg:



2. Egyszerűsítsük a következő logikai kifejezést!

$$Y = CB + C\bar{B}A\bar{C} + \overline{B\bar{A}\bar{C}B} + \overline{CA}B\bar{C} + \bar{B}\bar{C}\bar{A}\bar{B}$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} Y &= BC + A\bar{B}(\bar{C}\bar{C}) + (\bar{B} + \bar{A})(C + \bar{B}) + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \\ &= BC + 0 + \bar{B}C + \bar{A}C + \bar{B} + \bar{A}\bar{B} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \\ &= BC + \bar{B}(C + 1 + \bar{A}) + \bar{A}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \\ &= BC + \bar{A}C + \bar{B} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} \end{aligned}$$

(11) szerint $A + \bar{A}B = A + B$, vagyis a nagy negáltjel alatt $\bar{B} + A\bar{B}\bar{C} = \bar{B} + A\bar{C}$, azaz

$$\begin{aligned} BC + \bar{A}C + \bar{B} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} &= BC + \bar{A}C + \bar{B} + A\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \\ &= BC + (A + \bar{C})\bar{B}(A + C) + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = BC + (A\bar{A} + A\bar{C} + AC + \bar{C}\bar{C})\bar{B} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = \\ &= BC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{C} = BC(1 + A) + \bar{A}\bar{C}(\bar{B} + \bar{B}) = BC + \bar{A}\bar{C} \end{aligned}$$

3. Írjuk fel Y -t mint A , B és C függvényét a következő igazságtáblázatnak megfelelően!

A	B	C	Y
1	1	1	1
1	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	0

Megoldás:

A táblázatból leolvasható, hogy az Y a következő esetekben teljesül: ha A , B és C is igaz, vagy ha C igaz, de A és B nem, vagy ha A és B igaz, de C nem, vagy ha A nem igaz, de B és C igaz. Ez a mondat a logikai algebra nyelvére lefordítva:

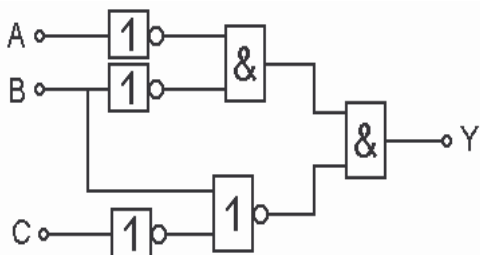
$$Y = ABC + \bar{A}\bar{B}C + AB\bar{C} + \bar{A}BC.$$

Az $Y = Y(A, B, C)$ függvény viszont egyszerűbb alakban is felírható:

$$Y = AB + \bar{A}C.$$

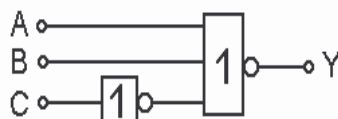
4. Írjuk fel Y -t mint A , B , C függvényét a diagramnak megfelelően! Tervezzük meg ugyanezt a logikai függvényt a lehető legkevesebb kapu felhasználásával!

Megoldás:



$$Y = \bar{A}\bar{B}B + \bar{C} = \bar{A} + \bar{C}$$

A függvény egy inverterrel és egy hárombemenetű NOR kapuval valósítható meg:



Gyakorló feladatok a beugró zh-ra való felkészüléshez

Hozzuk az alábbi logikai függvényeket egyszerűbb alakra, és írjuk fel igazságtáblázatukat! Alakítsuk át úgy, hogy inverterekkel, NAND és NOR kapukkal megvalósíthatók legyenek! Rajzoljuk fel a függvényt reprezentáló logikai áramkört!

a. $Y = \bar{A} C \bar{A} B + B \bar{A} \bar{B} C + \bar{B} C \bar{A} \bar{B} + B \bar{A} \bar{C} B + A \bar{B} \bar{C} A$

b. $Y = B \bar{A} C \bar{A} + \bar{B} \bar{C} \bar{B} \bar{A} + \bar{C} \bar{B} A \bar{C} + \bar{B} \bar{A} C B + C \bar{B} C A$

c. $Y = A \bar{C} B \bar{C} + B C B A + \bar{C} \bar{B} \bar{A} \bar{C} + \bar{C} \bar{A} \bar{B} C + \bar{B} C A \bar{B}$

d. $Y = \bar{B} C A \bar{B} + C \bar{B} A \bar{C} + \bar{A} B \bar{C} A + B C A B + \bar{B} A \bar{B} C$

e. $Y = A \bar{B} \bar{C} B + \bar{B} \bar{C} \bar{B} A + B \bar{C} A B + A B C A + \bar{A} \bar{B} C \bar{B}$

f. $Y = \bar{B} \bar{C} \bar{A} \bar{B} + \bar{B} \bar{A} C B + A \bar{C} A \bar{B} + \bar{A} C A \bar{B} + \bar{B} A \bar{C} \bar{B}$

g. $Y = \bar{A} B \bar{A} \bar{C} + \bar{B} C A \bar{B} + \overline{\bar{C} \bar{B} C A} + \overline{\bar{C} A B \bar{A}} + \bar{B} C \bar{A} \bar{B}$

h. $Y = \bar{A} B A \bar{C} + \bar{A} \bar{B} \bar{C} \bar{B} + \overline{\bar{C} \bar{B} \bar{A} C} + \bar{B} A \bar{C} B + \bar{B} \bar{A} \bar{B} C$