2. MECHANIKA

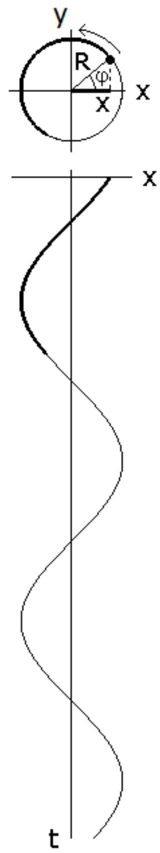
A mérés célja

Periodikus mozgásokkal a mindennapi életben gyakran találkozunk, és korábbi tanulmányainkban is foglalkoztunk velük. Ennek a gyakorlatnak célja egyrészt az, hogy ezeket a mozgásokat kísérletileg tanulmányozva még több közvetlen tapasztalatot szerezzünk róluk, másrészt hogy az elméletben bevezetett modellek (ideális rugó, inga) gyakorlati alkalmazhatóságát vizsgáljuk.

Elméleti bevezető

1. Rezgőmozgás

1.1. A harmonikus rezgőmozgás



Tudjuk, hogy a harmonikus rezgőmozgás az egyenletes körmozgás vetületének fogható fel. Ez kinematikai szempontból teljesen kielégítő magyarázat, hiszen tulajdonképpen csak annyit mond, hogy az R sugarú körön ω szögsebességgel mozgó tömegpont mozgásának x tengelyre vett $x(t) = R\cdot\cos(\omega\cdot t + \varphi_0)$ vetületét harmonikus rezgőmozgásnak nevezzük:

$x(t) = A\cdot\cos(\omega\cdot t + \varphi_0)$, ahol

A az *amplitúdó* (a maximális kitérés),

$\varphi = \omega\cdot t + \varphi_0$ a *fázis*,

ω a harmonikus rezgőmozgás *körfrekvenciája*,

φ_0 a *fázisállandó*, más néven *kezdőfázis.*

A körfrekvencia és a ν *frekvencia*, ill. T *periódusidő* összefüggése:

$\omega = 2\pi\cdot\nu = 2\pi / T$.

A harmonikus rezgőmozgást végző test sebessége

$v(t) = -A\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t + \varphi_0)$,

gyorsulása

$a(t) = -A\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t + \varphi_0) = -\omega^2\cdot x(t)$.

Belátható, hogy egy ideális rugó végéhez rögzített, mozgásba hozott tömegpont harmonikus rezgőmozgást végez.

Ideális rugó erőtörvénye (Hooke-törvény):

$F = -k\cdot x$, ahol

k a rugóállandó,

x a rugó *megnyúlása, deformációja,* azaz a rugó *nyugalmi hosszától* mért eltérés. Az x deformáció a rugó megnyúlása esetén pozitív, rövidülése esetén pedig negatív. A visszahúzó erő nagysága egy ideális rugónál arányos annak deformációjával, és azzal ellentétes irányú.

Írjuk fel a vízszintes helyzetű rugó végéhez rögzített m tömegű test mozgásegyenletét (súrlódásmentes esetben):

$m\cdot\ddot{x} = -k\cdot x$

alakítsuk át:

$\ddot{x} = -(k/m)\cdot x$

és hasonlítsuk össze a harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulásával:

$\ddot{x} = -\omega^2\cdot x$.

Így látható, hogy a rugóerő valóban harmonikus rezgőmozgást hoz létre, aminek

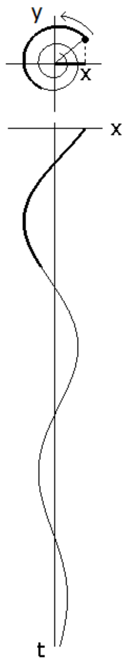
körfrekvenciája $\omega = \sqrt{k/m}$,

periódusideje $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

A rezgőmozgás A amplitúdóját és φ_0 kezdőfázisát pedig az ún. kezdeti feltételek – azaz az x_0 kezdeti kitérés és v_0 kezdősebesség – szabják meg:

$$\varphi_0 = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{v_0}{\omega\cdot x_0}\right), \quad A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + {x_0}^2} \ .$$

1.2. Csillapított rezgőmozgás



A csillapított rezgőmozgás esetén a szokásos rugóerő mellett egy a sebességgel arányos, de azzal ellentétes irányú súrlódási erő is fellép, így a mozgásegyenlet:

$$m\cdot\ddot{x} = -k\cdot x - c\cdot\dot{x}.$$

Ennek megoldása felfogható egy olyan egyenletes körmozgás vetületeként, ahol a szögsebesség állandó, de a körmozgás R sugara folyamatosan csökken, méghozzá exponenciálisan: $R = R_0 \cdot e^{-\beta\cdot t}$.

A csillapított rezgőmozgás egyenlete tehát a következő alakú:

$$x(t) = A_0\cdot e^{-\beta\cdot t}\cdot\cos(\omega_{cs}\cdot t + \varphi_0).$$

Látható, hogy az amplitúdó exponenciálisan csökken:

$$A = A_0\cdot e^{-\beta\cdot t},$$

ahol a β csillapítási tényezőt a test tömege és a súrlódási erőben szereplő c konstans határozzák meg: $\beta = c/(2m)$.

A csillapított rezgőmozgás ω_{cs} körfrekvenciája kisebb (periódusideje nagyobb), mint az ugyanazon rugóval és testtel létrehozott csillapítatlan rezgőmozgásé, méghozzá

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2},$$

ahol $\omega^2 = k/m$ a csillapítatlan rezgőmozgás körfrekvenciája.

A_0 és φ_0 értékét a kezdeti feltételek (azaz x_0 és v_0) határozzák meg.

Ha a csillapítás igen nagy (ha $\beta \geq \omega$), akkor a mozgás *aperiodikussá* válik. Az ilyen aperiodikus mozgásokkal azonban itt nem foglalkozunk, mivel a kísérleteinkben a csillapítás ennél jóval kisebb.

1.3. Rugó függőleges pozícióban

Eddig a harmonikus és csillapított rezgőmozgás tárgyalásánál nem vettük figyelembe a gravitáció hatását, a függőleges elrendezésnél azonban számolni kell azzal is.

Nézzünk egy függőleges helyzetű rugóra felfüggesztett tömegpontot. Jelölje y az m tömegpont helyzetét a felfüggesztési ponttól mérve, és l_0 a rugó nyugalmi hosszát; ekkor az m tömeg mozgásegyenlete a csillapítást is figyelembe véve az alábbi alakú lesz:

$$m\cdot\ddot{y} = -k\cdot(y-l_0) + mg - c\cdot\dot{y}.$$

A rendszer egyensúlyi pontja az a pont, ahová helyezve a tömegpont ott is marad, amennyiben nincsen sebessége; ez a pont az, ahol a rugóerő és a nehézségi erő kompenzálja egymást, így a tömegpontnak ott nincs gyorsulása:

$$0 = -k\cdot(y_E-l_0) + mg ,$$

amiből az egyensúlyi pont y_E koordinátája:

$$y_E = l_0 + mg/k.$$

Ha bevezetünk egy új x változót, amely azt mutatja meg, hogy a tömegpont milyen távol van ettől az egyensúlyi ponttól:

$$x = y - y_E = y - (l_0 + mg/k)$$

és átírjuk erre a mozgásegyenletet, felhasználva, hogy az új és régi változó időderiváltjai megegyeznek (hiszen l_0 és mg/k időtől független állandók), akkor az új mozgásegyenlet a megszokott

$m\cdot\ddot{x} = -k\cdot x - c\cdot\dot{x}$ alakot ölti.

Tehát a nehézségi erő módosítja ugyan az egyensúlyi helyzetet, de más hatása nincs a harmonikus rezgőmozgásra.

Vegyük észre, hogy a rugó l_0 hossza nem játszik közvetlen szerepet a rezgőmozgásban. Közvetett szerepe azonban van, mert pl. az ugyanolyan minőségű, de $2l_0$ hosszúságú rugó rugóállandója fele akkora lesz, mint az l_0 hosszúságú rugóé. Rugók toldása, azaz a rugók soros kapcsolása esetén a rugóállandók reciprokának összege adja az eredő rugóállandó reciprokát, rugók párhuzamos kapcsolása esetén a rugóállandók összege adja az eredő rugóállandót.

2. Matematikai inga

A matematikai inga egy egyik végén rögzített L hosszúságú súlytalan, nyújthatatlan fonálból és a másik végéhez erősített m tömegű tömegpontból áll. A tömegpont általánosan a felfüggesztési pont körüli L sugarú gömbön mozoghat, és mozgása elég bonyolult lehet. Két speciális esetet szokás vizsgálni, amikor a mozgása könnyen leírható: a síkingát és a kúpingát.

2.1. Síkinga

A tömegpont ebben az esetben egy állandó, függőleges síkban mozog.
Jelölje α a fonálnak a függőlegessel bezárt szögét. A test mozgásegyenlete:

$$m \cdot L \cdot \ddot{\alpha} = - m \cdot g \cdot \sin\alpha,$$

amit egyszerűsítés után az alábbi alakba írhatunk:

$$\ddot{\alpha} = - (g/L) \cdot \sin\alpha.$$

Ezt a nemlineáris differenciálegyenletet nehéz megoldani. Alkalmazhatjuk azonban a

$\sin\alpha \approx \alpha$ közelítést,

ami 5°-nál csak 0,05% eltérést okoz, 22°-nál azonban már 1%-ot, 90°-nál pedig 18% eltérést.
Így a csillapítatlan rezgőmozgás mozgásegyenletéhez hasonló egyenlethez jutunk:

$\ddot{\alpha} = - \omega^2 \cdot \alpha,$ aholis $\omega^2 = g/L,$

azaz az inga olyan lengéseket végez, ahol az α az időnek harmonikus függvénye:

$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ (ahol φ_0 a fázisállandó),

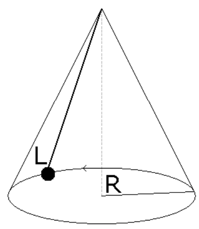
és a periódusidő $T = 2\pi\sqrt{L/g}$,
feltéve, hogy a maximális kitérés elég kicsi ahhoz, hogy a $\sin\alpha \approx \alpha$ közelítés alkalmazható.

2.2. Kúpinga

A tömegpont ebben az esetben vízszintes síkban mozog egy R sugarú körön, ennek megfelelően a fonál egy kúpfelületet súrol.
Levezethető, hogy a kúpinga keringési ideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{L^2 - R^2}}{g}}\ , ,$$

ahol L az inga hossza, R pedig a kör sugara, melyen a tömegpont kering.



3. Torziós inga

Ha egy torziós szálhoz rögzítünk egy merev testet és azt forgásba hozzuk (a szálra merőlegesen), akkor a torziós szál a test forgó mozgását ahhoz hasonlóan lassítja, ill. gyorsítja, mint ahogy egy rugó a végéhez rögzített test rezgőmozgását. Így a test a szálra merőleges síkban ide-oda forog, a nyugalmi helyzetétől mért α szögelfordulás az időben harmonikusan változik.
A torziós szál által kifejtett forgatónyomaték (amely vissza akarja állítani az elcsavarás előtti állapotot) nagysága arányos a szögelfordulással, és ellentétes irányú azzal, azaz

$$M = - D \cdot \alpha\ ,$$

ahol D egy, a torziós szálat jellemző arányossági tényező (számértékileg az 1 radián szögelforduláshoz tartozó forgatónyomaték), melynek neve direkciós vagy irányító nyomaték.
A test mozgásegyenletéhez írjuk fel az impulzusmomentum tételét:

$M = \Theta \cdot \beta$, ahol
M a forgatónyomaték,
Θ a test tehetetlenségi nyomatéka a torziós szálra mint tengelyre vonatkoztatva,
β pedig a szöggyorsulás: $\beta = \ddot{\alpha}$.

Ha az impulzusmomentum-tételbe beírjuk a fenti „nyomatéktörvényt” (ami az erőtörvény analógja), akkor megkapjuk a torziós inga mozgásegyenletét:

$$\Theta \cdot \ddot{\alpha} = - D \cdot \alpha\ .$$

Ez a differenciálegyenlet a $D/\Theta = \omega^2$ jelöléssel az ismert alakba írható:

$$\ddot{\alpha} = - \omega^2 \cdot \alpha,$$

aminek az α szögre nézve a megoldása analóg a síkingáéval:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0).$$

Itt az α_0 és a φ_0 értékét a kezdőállapot határozza meg,

$\omega = \sqrt{D/\Theta}$,

a periódusidő pedig $T = 2\pi \cdot \sqrt{\Theta/D}$.

Mérések

1.0. Rugóállandó meghatározása különböző terhelések alkalmazásával

Eszközök:

- állvány, mm-es leolvasásra alkalmas skálával
- rugó
- anyacsavarok mint ismert tömegek
- PVC rúd, amire a tömegeket tesszük
- ismeretlen tömeg
- elektronikus mérleg

Mérési feladatok:

Mérjük meg a PVC rúd tömegét a mérlegen.

1.0.1. Különböző terhelések mellett olvassuk le a rugó legalsó pontjának a pozícióját:

Végezzük el a mérést először a PVC rúd nélkül, azután az üres PVC rúddal, majd 1, 2, 3, … anyacsavarral terhelve, amíg a skála engedi! (Szükség esetén – ha a rugó gyengébb vagy erősebb – módosítsunk az anyacsavarok számán!)

1.0.2. Tegyük a PVC rúdra az ismeretlen tömeget (és szükség esetén néhány anyacsavart is), és olvassuk le a rugó legalsó pontjának pozícióját!

Kiértékelés:

1.0.1. Készítsük el a rugó kalibrációs diagramját, azaz ábrázoljuk a rugó legalsó pontjának pozícióját az anyacsavarszám függvényében!

Számoljuk ki a rugóállandót: először fejezzük ki az egyensúlyi egyenletből a rugó végének pozícióját a terhelő anyacsavarok számának függvényében, majd számítsuk ki az egyenes meredekségét a legkisebb négyzetek módszerével (a lineáris regresszió képletei megtalálhatók a honlapon), és számoljuk ki abból a rugó ’k’ rugóállandóját!

1.0.2. A kalibrációs diagram alapján határozzuk meg az ismeretlen tömeget!

1.0.3. Szorgalmi feladat: Becsüljük meg a tömegmérés hibáját abból kiindulva, hogy a leolvasás hibája 1 mm!

1.1. Harmonikus rezgőmozgás vizsgálata

Eszközök:

- állvány
- rugó
- anyacsavarok
- PVC rúd, amire a tömegeket tesszük
- ismeretlen tömeg
- stopper

Mérési feladatok:

1.1.1. Rakjunk a PVC rúdra 4, majd 7, majd 10 anyacsavart (illetve a rugó terhelhetőségének megfelelő számú anyacsavart), hozzuk rezgésbe a rugót, és mérjük meg 10 rezgés idejét!

1.1.2. Szorgalmi feladat: Végezzük el az 1.1.1. mérést az ismeretlen tömeggel is!

1.2. Szorgalmi feladat: Mérjük meg két különböző terhelésnél is, hogy kb. mennyi idő alatt csökken a felére a rezgés amplitúdója!

Kiértékelés:

1.1.1. Számoljuk ki a rugóállandót a 4, 7, ill. 10 csavarral mért rezgőmozgás periódusidejéből, és hasonlítsuk össze ezeket az értékeket az 1.0.1 mérésben kiszámolt értékkel!

Szorgalmi feladatok:

1.1.2. A mért periódusidőből számoljuk ki az ismeretlen tömeget!

1.2. Magyarázzuk meg az eredményt! Melyik terhelésnél csillapodik gyorsabban, miért?

2.1. Matematikai inga - síkinga

Eszközök:

- állvány
- damilra kötött anyacsavar
- mérőszalag
- stopper

Mérési feladatok:

2.1.1. Mérjük meg az inga periódusidejét kis kitérések esetén. 10 periódus idejét mérjük! Ismételjük meg a mérést ötször azonos (kis) kitéréssel.

Mérjük meg az inga hosszát!

2.1.2. Mérjük meg a periódusidőt 3 különböző kitéréssel indítva az ingát! Itt is 10 periódus idejét mérjük, de mindegyiket csak egyszer.

Kiértékelés:

2.1.1. Számoljuk ki a periódusidőt (T), és a periódusidő hibáját (ΔT) 95%-os konfidenciaszinten!

A periódusidőből számítsuk ki a g értékét!

Számoljuk ki, mekkora Δg hibával tudjuk meghatározni g értékét! A hosszmérés hibáját becsüljük meg, mennyi lehetett esetünkben.

Ellenőrizzük, hogy a $g = 9{,}81\ m/s^2$ érték beleesik-e az általunk kiszámolt $g \pm \Delta g$ intervallumba; ha nem, keressünk rá elfogadható magyarázatot!

2.1.2. Írjuk le, mit tapasztaltunk! Hogyan változik a periódusidő a maximális kitérés függvényében?

2.2. Matematika inga - kúpinga

Eszközök:

- damilra kötött anyacsavar
- stopper
- mérőszalag

Mérési feladat:

2.2.1. Vizsgáljuk meg kísérletileg, miért okoz problémát, hogy pontosan egy kúpfelületen mozogjon a kötél! A kísérletet két hallgató végezze: az egyik tartsa az ingát, a másik próbálja meg megfelelő mozgásba hozni.

2.2.2. Mérjük meg a kúpinga keringési idejét „kis”, ill. „nagy” sugarú körön! Ismét két hallgató végezze a mérést: az egyik pörgesse a kúpingát, a másik pedig végezze az időmérést! Mindkét esetben a 10 kör megtételéhez szükséges időt mérjük meg.

Kiértékelés:
2.2.1. Írjuk le röviden a megfigyeléseket!
2.2.2. Számoljuk ki a „kis”, ill. „nagy” kör sugarát!

3. Torziós inga

Eszközök:
- állvány
- rugó
- hengeres műanyag doboz
- textilbakelit korongok
- stopper
- mérőszalag
- elektronikus mérleg

Mérési feladatok:
3.1. Mérjük meg a rugóból és annak végéhez erősített hengeres műanyag dobozból álló torziós inga periódusidejét! Itt a hosszabb periódusidő miatt elég 1 periódus idejét mérni.
Ezután erősítsünk egy textilbakelit korongot a doboz aljához, és mérjük meg így is a periódusidőt! Mérjük meg a korong tömegét elektronikus mérleggel, a sugarát pedig mérőszalaggal.
3.2. Szorgalmi feladat: Erősítsünk egy másik, eltérő sugarú korongot is a doboz aljára és mérjük meg azzal is a periódusidőt, majd – ha a rugó elég erős – mérjük meg a periódusidőt úgy is, hogy mindkét korong a doboz aljára van rögzítve.

Kiértékelés:
3.1. Számoljuk ki a korong tehetetlenségi nyomatékát (a korong adataiból)!
Számítsuk ki a doboznak a forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát a két mért periódusidőből! (Itt felhasználjuk, hogy a tehetetlenségi nyomaték additív mennyiség. A torziós szál direkciós állandóját nem szükséges kiszámolni.)
3.2. Szorgalmi feladat: Számítsuk ki a doboz tehetetlenségi nyomatékát a 4 (ill. 3) mért periódusidő alapján görbeillesztéssel!

Kérdések, gyakorló feladatok

Minimumkérdések a beugró zh-ban:
- periódusidő, frekvencia, körfrekvencia, amplitúdó
- lineáris rugalmas erő, rugóállandó
- rezgőmozgás periódusideje
- matematikai inga periódusideje
- a mérések felsorolása, elve, a szükséges eszközök és alkalmazandó képletek.

<u>Az alábbi kérdések, feladatok, illetve ehhez hasonlóak várhatóak még a beugró zh-ban:</u>

Rövid elméleti kérdések:
Igaz-e, hogy*
- egy pontos rugós erőmérő rugójának a hossza bizonyos határokon belül arányos a rá ható erővel?
- egy körmozgás vetülete egy olyan síkra, amely merőleges a kör síkjára, mindig harmonikus rezgőmozgásnak tekinthető?
- egy harmonikus rezgőmozgás periódusideje független a rezgés amplitúdójától?
- a rugóállandót kétszeresére növelve, a rugó végén lévő tömegpont tömegét pedig felére csökkentve harmonikus rezgőmozgás esetén a periódusidő is a felére csökken?
- ingamozgásnál a periódusidő ~~erősen~~ függ a kitéréstől?
- ingamozgásnál a periódusidő egyenesen arányos az inga hosszával?
- harmonikus rezgőmozgásnál a rezgésidő az amplitúdó négyzetgyökével egyenesen arányos?
- ha van két egyforma hosszú és egyforma k_1 rugóállandójú rugónk és az egyiket a másik végéhez toldjuk, akkor az így kapott rugó k rugóállandója az egyes rugókénak kétszerese lesz ($k = 2\,k_1$)?
- kúpinga periódusideje csak a kötélnek a függőlegessel bezárt szögétől függ, a kötél hosszától nem?

**A válaszokhoz indoklást is kérünk!*

Számolási feladatok:

1. Egy rugós erőmérőre anyacsavarokat helyezve azt tapasztaljuk, hogy az első két anyacsavar hatására még nem következik be megnyúlás, és csak 4 anyacsavaros terhelés után tekinthető lineárisnak a terhelő tömeg – megnyúlás diagram. Innentől az erőmérő rugóállandója 5 N/m.
4 anyacsavaros terhelésnél a rugó végének pozíciója 4,4 cm. Most ráfüggesztünk a mérlegünkre egy Túró Rudit is (a 4 anyacsavar mellé) és azt tapasztaljuk, hogy a rugó végének pozíciója 10,3 cm-re változott.
a) Mennyi a Túró Rudi tömege?
b) A 4 anyacsavar és a rugó végén levő tartószerkezet tömege együttesen 60 g.
Mennyi a rezgésideje ennek a rendszernek,
és mennyire nő meg ez a Túró Rudi hatására?
Megoldás:
a) $m_{\text{TúróRudi}} \cdot g = k \cdot \Delta\ell \quad \Rightarrow \quad m_{\text{TúróRudi}} = k \cdot \Delta\ell \,/\, g = 5 \cdot (10{,}3\text{–}4{,}4)\cdot 10^{-2} / 9{,}81 = 0{,}03\ \text{kg} = 3\ \text{dkg}$
b) $T = 2\pi\sqrt{m/k} \qquad m_{\text{4 anyacsavar+tartó}} = 0{,}06\ \text{kg} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 0{,}688\ \text{s}$
$m_{\text{4 anyacsavar+tartó+TúróRudi}} = 0{,}09\ \text{kg} \quad \Rightarrow \quad T_2 = 0{,}843\ \text{s}$

2. Egy $\ell_0 = 22$ cm hosszú, $k = 4{,}2$ N/m rugóállandójú rugóra m tömegű testet akasztunk, meghúzzuk lefelé $\Delta\ell = 12$ cm-t, elengedjük, és megmérjük 10 rezgés idejét: $t_{10} = 8$ s.
a) Mekkora a rugó végére akasztott test tömege?
b) Mennyi lenne 10 rezgés ideje, ha kétszer akkora tömeget akasztanánk a rugó végére?
(A rugót kezdetben ugyanannyival húzzuk ki.)

3. Kísérleteinkhez egyforma k erőállandójú súlytalan rugók és m tömegű csavarok állnak a rendelkezésünkre. Ha egy rugó végére 1 db csavart helyezünk, akkor a mért rezgésidő T.
a) Hányszorosa ennek a T időnek egy olyan rendszer periódusideje, amelyben N darab csavart teszünk a rugó végére?
b) 2 rugót párhuzamosan kötünk egyetlen csavarra (a csavart két rugóval függesztjük fel). Mekkora lesz így a rezgés periódusideje? Indokoljuk a választ!
c) N darab rugót összekötünk úgy, hogy az egyik rugó végét a másik rugó elejébe akasztjuk, azaz egy "rugó lánc" jön így létre. E lánc végére egyetlen csavart teszünk. Mennyivel hosszabb vagy rövidebb ennek a rendszernek a periódusideje, mint az egy rugót és egy csavart tartalmazó rendszeré?
Megoldás:
a) Mivel $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, N db esetén $\sqrt{N}$-szeresére nő.
b) A két párhuzamosan kötött rugót egy kétszer akkora rugóállandójú rugónak tekinthetjük, így a periódusidő $\sqrt{2}$-ed részére csökken.
c) Az N db egymás után kötött rugót egy olyan rugónak tekinthetjük, melynek rugóállandója N-ed része egy rugóénak, így a periódusidő $\sqrt{N}$-szeresére nő.

4. Egy 81,5 cm hosszú matematikai inga periódusidejét 1,800 másodpercnek mértük 1 ms hibával 95 %-os konfidenciaszint mellett.
a) Mekkora nehézségi gyorsulás számítható ebből?
b) Mekkora hibát okoz a nehézségi gyorsulásban az, hogy a periódusidőt csak 1 ms pontossággal ismerjük? Vajon megmagyarázza ez a mérés hibáját? (Tudjuk ugyanis, hogy amennyiben a mérés Magyarországon történt, akkor az eredménynek 9,81 m/s^2 körüli értéknek kellene lennie.)
Ha nagyobb az eltérés, mint ami az időmérés hibájából várható, akkor vajon mi okozta azt?
Megoldás:
a) $T = 2\pi\sqrt{L/g} \;\Rightarrow\; g = L\cdot(2\pi/T)^2 \approx 9{,}93$ m/s^2
b) Az időmérés pontatlanságából eredő hiba $|\Delta g| = \left|\frac{\partial(4\pi^2 L/T^2)}{\partial T}\cdot\Delta T\right| = 8\pi^2 L/T^3\cdot\Delta T \approx 0{,}011$ m/s^2, ez egy nagyságrenddel kisebb a mért és a valódi érték eltérésénél (9,93–9,81= 0,12 m/s^2); a nagy hibát a hosszmérés pontatlansága okozhatta.

5. Mechanika mérésen matematikai inga periódusidejéből számolják ki a hallgatók a nehézségi gyorsulás értékét. Az inga hossza L = 36 cm, a mért periódusidők
1,24 s 1,24 s 1,25 s 1,22 s 1,24 s 1,25 s
a) Adjuk meg a periódusidőt és hibáját 90 %-os konfidenciaszinten!
b) Adjuk meg az így számított nehézségi gyorsulás értékét
és hibáját 90 %-os konfidenciaszinten, ha a hosszmérés hibája 4 mm!

6. Neil Armstrong a Hold felszínén egy ℓ = 26,0 cm hosszú matematikai inga periódusidejét 2,50 s-nak mérte.
a) Mekkora nehézségi gyorsulás számítható ebből?
b) Mekkora hibával határozható meg így a holdi nehézségi gyorsulás értéke, ha a periódusidő mérésének pontossága 0,01 s, az inga fonalának hosszát pedig 0,5 cm pontossággal ismerjük?

7. Kúpinga hossza 1 m, a függőlegessel bezárt szöge 60°. Mekkora a körpályán keringő test tömege, ha a fonálerő 10 N? (g = 9,81 m/s^2)
Megoldás:
RAJZ (mg és $F_{fonál}$ eredője vízszintes) $\rightarrow$ mg / $F_{fonál}$ = cos 60° $\Rightarrow$ m = 0,51 kg.