2. MECHANIKA

A mérés célja

A gyakorlat célja egyrészt a korábbi tanulmányainkban megismert és a mindennapi életben gyakran tapasztalt periodikus mozgások kísérleti tanulmányozása, másrészt az elméletben bevezetett modellek (ideális rugó; inga) gyakorlati alkalmazhatóságának vizsgálata.

1. Rezgőmozgás

1.1. Harmonikus rezgőmozgás

Harmonikus rezgőmozgást végző test kitérése az idő függvényében:

$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$, ahol

A az amplitúdó (a maximális kitérés),

$\varphi = \omega t + \varphi_0$ a fázis,

ω a harmonikus rezgőmozgás körfrekvenciája,

φ_0 a fázisállandó, más néven kezdőfázis.

A körfrekvencia és a ν frekvencia, ill. T periódusidő összefüggése:

$$\omega = 2\pi \cdot \nu = 2\pi / T \; .$$

Belátható, hogy egy ideális rugó végéhez rögzített, mozgásba hozott tömegpont harmonikus rezgőmozgást végez.

Ideális rugó erőtörvénye (Hooke-törvény):

$F = -k \cdot x$, ahol

k a rugóállandó,

x a rugó megnyúlása, deformációja, azaz a rugó nyugalmi hosszától mért eltérés (megnyúlás esetén pozitív, rövidülés esetén pedig negatív).

Vízszintes helyzetű rugó végéhez rögzített m tömegű test mozgásegyenlete (súrlódásmentes esetben):

$$m\ddot{x} = -k \cdot x \; .$$

Mivel deriválással látható, hogy a harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulása

$a = \ddot{x} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_0\right) = -\omega^2 \cdot x$ a kitéréssel arányos és vele ellentétes előjelű,

és a fenti mozgásegyenlet m-mel való osztással hasonló alakra hozható:

$$\ddot{x} = -(k/m) \cdot x \; ,$$

így látható, hogy a rugóerő valóban harmonikus rezgőmozgást hoz létre, aminek

körfrekvenciája $\omega = \sqrt{k/m}$,

periódusideje $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

A rezgőmozgás A amplitúdóját és φ_0 kezdőfázisát a kezdeti feltételek – azaz az x_0 kezdeti kitérés és v_0 kezdősebesség – szabják meg:

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + {x_0}^2} \; ; \quad \varphi_0 = arc\ tg\left(-\frac{v_0}{\omega \cdot x_0}\right) .$$

1.2. Csillapított rezgőmozgás

Csillapított rezgőmozgás esetén a szokásos rugóerő mellett egy, a sebességgel arányos, de azzal ellentétes irányú fékező erő is fellép, így a mozgásegyenlet (vízszintes helyzetben):

$$m\ddot{x} = -k \cdot x - c \cdot \dot{x} \; .$$

A $\beta = c/(2m)$ mennyiséget csillapítási tényezőnek nevezzük.

Kis csillapítás esetén, azaz ha $\beta < \omega$ (ahol $\omega = \sqrt{k/m}$, az azonos tömeggel és rugóval létrehozott csillapítatlan rezgőmozgás körfrekvenciája), az egyenlet megoldása a következő alakú:

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_{cs} t + \varphi_0).$$

Ilyenkor az amplitúdó exponenciálisan csökken:

$$A = A_0 \cdot e^{-\beta t}.$$

A csillapított rezgőmozgás ω_{cs} körfrekvenciája kisebb (periódusideje nagyobb), mint az ugyanazon rugóval és testtel létrehozott csillapítatlan rezgőmozgásé, méghozzá

$$\omega_{cs} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}\ .$$

A_0 és φ_0 értékét a kezdeti feltételek (x_0 és v_0) határozzák meg.

Ha a csillapítás igen nagy (ha $\beta \geq \omega$), akkor a mozgás *aperiodikussá* válik. Az ilyen aperiodikus mozgásokkal azonban itt nem foglalkozunk, mivel a kísérleteinkben a csillapítás ennél jóval kisebb.

1.3. Rugó függőleges pozícióban

Eddig a harmonikus és csillapított rezgőmozgás tárgyalásánál nem vettük figyelembe a gravitáció hatását, a függőleges elrendezésnél azonban számolni kell azzal is.

Az m tömegpontot l_0 nyugalmi hosszúságú rugóra függesztve a rugó y hosszára felírt differenciálegyenlet (a csillapítást is figyelembe véve):

$$m\ddot{y} = -k \cdot (y - l_0) + mg - c \cdot \dot{y}.$$

Az y_E egyensúlyi helyzetben $\ddot{y} = \dot{y} = 0$, tehát $-k \cdot (y_E - l_0) + mg = 0$, amiből

$$y_E = l_0 + mg/k.$$

Ha bevezetjük az x változót, amely a tömegpont távolságát ettől az egyensúlyi ponttól méri:

$$x = y - y_E = y - (l_0 + mg/k)$$

és átírjuk erre a mozgásegyenletet (felhasználva, hogy $\ddot{x} = \ddot{y}$ és $\dot{x} = \dot{y}$), akkor a függőleges helyzetnél az egyensúlyi megnyúlástól mért távolságra felírt mozgásegyenlet a vízszintes helyzetű rugóra felírt

$$m\ddot{x} = -k \cdot x - c \cdot \dot{x}$$ alakot ölti.

Tehát a nehézségi erő módosítja ugyan az egyensúlyi helyzetet, de más hatása nincs a harmonikus rezgőmozgásra.

1.4. Rugók soros és párhuzamos kapcsolása

Vegyük észre, hogy a rugó l_0 hossza nem játszik közvetlen szerepet a rezgőmozgásban. Közvetett szerepe azonban van, mert pl. az ugyanolyan minőségű, de $2l_0$ hosszúságú rugó rugóállandója fele akkora lesz, mint az l_0 hosszúságú rugóé. Rugók toldása, azaz a rugók soros kapcsolása esetén a rugóállandók reciprokának összege adja az eredő rugóállandó reciprokát, rugók párhuzamos kapcsolása esetén a rugóállandók összege adja az eredő rugóállandót.

2. Matematikai inga

A matematikai inga egy egyik végén rögzített L hosszúságú súlytalan, nyújthatatlan fonálból és a másik végéhez erősített m tömegű tömegpontból áll. A tömegpont általánosan a felfüggesztési pont körüli L sugarú gömbön mozoghat, és mozgása elég bonyolult lehet. Két speciális esetet szokás vizsgálni, amikor a mozgása könnyen leírható: a síkingát és a kúpingát.

2.1. Síkinga

A tömegpont ebben az esetben egy állandó, függőleges síkban mozog.

Jelölje α a fonálnak a függőlegessel bezárt szögét. A test mozgásegyenlete:

$$m \cdot L \cdot \ddot{\alpha} = -mg \cdot sin\alpha\ ,$$

amit egyszerűsítés után az alábbi alakba írhatunk:

$$\ddot{\alpha} = -(g/L) \cdot sin\alpha\ .$$

Ezt a nemlineáris differenciálegyenletet nehéz megoldani. Alkalmazhatjuk azonban a

$$sin\alpha \approx \alpha$$ közelítést,

ami 5°-nál csak 0,05% eltérést okoz, 22°-nál azonban már 1%-ot, 90°-nál pedig 18% eltérést.

Így a csillapítatlan rezgőmozgás mozgásegyenletéhez hasonló egyenlethez jutunk:

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2 \cdot \alpha\ , \quad \text{ahol is } \omega^2 = g/L\ ,$$

azaz az inga olyan lengéseket végez, ahol az α az időnek harmonikus függvénye:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)\ .$$

Az α_0 maximális kitérés és a φ_0 fázisállandó értékét a kezdőállapot határozza meg.
A periódusidő az $\omega^2 = g/L$ egyenletből $\omega = 2\pi/T$ felhasználásával:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ ,$$

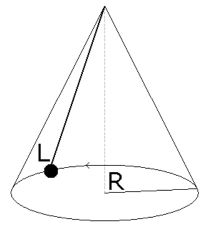
feltéve, hogy a maximális kitérés elég kicsi ahhoz, hogy a $\sin\alpha \approx \alpha$ közelítés alkalmazható.

2.2. Kúpinga

A tömegpont ebben az esetben vízszintes síkban mozog egy R sugarú körön, ennek megfelelően a fonál egy kúpfelületet súrol.
Levezethető, hogy a kúpinga keringési ideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{L^2-R^2}}{g}}\ ,$$

ahol L az inga hossza, R pedig a kör sugara, melyen a tömegpont kering.



3. Torziós inga

Ha egy torziós szálhoz rögzítünk egy merev testet és azt forgásba hozzuk (a szálra merőleges síkban), akkor a torziós szál a test forgó mozgását ahhoz hasonlóan lassítja, ill. gyorsítja, mint ahogy egy rugó a végéhez rögzített test rezgőmozgását. Így a test a szálra merőleges síkban ide-oda forog, a nyugalmi helyzetétől mért α szögelfordulás az időben harmonikusan változik.
A torziós szál által kifejtett forgatónyomaték (amely vissza akarja állítani az elcsavarás előtti állapotot) nagysága arányos a szögelfordulással, és ellentétes irányú azzal, azaz

$$M = -D \cdot \alpha,$$

ahol D egy, a torziós szálat jellemző arányossági tényező (számértékileg az 1 radián szögelforduláshoz tartozó forgatónyomaték), melynek neve direkciós vagy irányító nyomaték.
A test mozgásegyenletéhez írjuk fel az impulzusmomentum tételét:

$M = \Theta \cdot \beta$, ahol

M a forgatónyomaték,

Θ a test tehetetlenségi nyomatéka a torziós szálra mint tengelyre vonatkoztatva,

β pedig a szöggyorsulás: $\beta = \ddot{\alpha}$.

Ha az impulzusmomentum-tételbe beírjuk a fenti „nyomatéktörvényt” (ami az erőtörvény analogonja), akkor megkapjuk a torziós inga mozgásegyenletét:

$$\Theta \cdot \ddot{\alpha} = -D \cdot \alpha\ .$$

Ez a differenciálegyenlet a $D/\Theta = \omega^2$ jelöléssel az ismert alakba írható:

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2 \cdot \alpha\ ,$$

aminek a megoldása analóg a síkingáéval:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)\ .$$

Az α_0 és a φ_0 értékét a kezdőállapot határozza meg,
a periódusidő pedig kifejezhető a $D/\Theta = \omega^2$ egyenletből:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D}}\ .$$

Mérések

1.0. Rugóállandó meghatározása különböző terhelések alkalmazásával

Eszközök:

- állvány, mm-es leolvasásra alkalmas skálával
- rugó
- anyacsavarok mint ismert tömegek
- PVC rúd, amire a tömegeket tesszük
- ismeretlen tömeg
- elektronikus mérleg

Mérési feladatok:

Mérjük meg a PVC rúd tömegét a mérlegen.

1.0.1. Különböző terhelések mellett olvassuk le a rugó legalsó pontjának a pozícióját:

Végezzük el a mérést először a PVC rúd nélkül, azután az üres PVC rúddal, majd 1, 2, 3, … anyacsavarral terhelve, amíg a skála engedi! (Szükség esetén – ha a rugó gyengébb vagy erősebb – módosítsunk az anyacsavarok számán!)

1.0.2. Tegyük a PVC rúdra az ismeretlen tömeget (és szükség esetén néhány anyacsavart is), és olvassuk le a rugó legalsó pontjának pozícióját!

Kiértékelés:

1.0.1. Készítsük el a rugó kalibrációs diagramját, azaz ábrázoljuk a rugó legalsó pontjának pozícióját az anyacsavarszám függvényében!

Számoljuk ki a rugóállandót: először fejezzük ki az egyensúlyi egyenletből a rugó végének pozícióját a terhelő anyacsavarok számának függvényében, majd számítsuk ki az egyenes meredekségét a legkisebb négyzetek módszerével (a lineáris regresszió képletei megtalálhatók a honlapon), és számoljuk ki abból a rugó k rugóállandóját!

1.0.2. A kalibrációs diagram alapján határozzuk meg az ismeretlen tömeget!

1.0.3. Szorgalmi feladat: Becsüljük meg a tömegmérés hibáját abból kiindulva, hogy a leolvasás hibája 1 mm!

1.1. Harmonikus rezgőmozgás vizsgálata

Eszközök:

- állvány
- rugó
- anyacsavarok
- PVC rúd, amire a tömegeket tesszük
- ismeretlen tömeg
- stopper

Mérési feladatok:

1.1.1. Hozzuk rezgésbe a rugót három különböző terheléssel, pl. 4, majd 7, majd 10 anyacsavarral terhelve – illetve a rugó terhelhetőségének megfelelően válasszunk három különböző terhelést, amivel stabil rezgést tudunk létrehozni. Mérjük meg 10 rezgés idejét mindhárom esetben!

1.1.2. Szorgalmi feladat: Végezzük el az 1.1.1. mérést az ismeretlen tömeggel is! (Szükség esetén az ismeretlen tömeg mellé tegyünk néhány anyacsavart is.)

1.2. Szorgalmi feladat: Mérjük meg két különböző terhelésnél is, hogy kb. mennyi idő alatt csökken a felére a rezgés amplitúdója!

Kiértékelés:

1.1.1. Számoljuk ki a rugóállandót a három különböző terheléssel mért rezgőmozgás periódusidejéből, és hasonlítsuk össze ezeket az értékeket az 1.0.1 mérésben kiszámolt értékkel!

Szorgalmi feladatok:

1.1.2. A mért periódusidőből számoljuk ki az ismeretlen tömeget!

1.2. Magyarázzuk meg az eredményt! Melyik terhelésnél csillapodik gyorsabban, miért?

2.1. Matematikai inga - síkinga

Eszközök:

- állvány
- damilra kötött anyacsavar
- mérőszalag
- stopper

Mérési feladatok:

2.1.1. Hozzuk lengésbe az ingát kis kitéréssel, és mérjük meg 10 periódus idejét! Ismételjük meg a mérést ötször (azonos, kis kitéréssel).

Mérjük meg az inga hosszát!

2.1.2. Mérjük meg a periódusidőt háromszor, úgy, hogy egyre nagyobb kitéréssel indítjuk az ingát! Itt is 10 periódus idejét mérjük, de mindegyiket csak egyszer.

Kiértékelés:

2.1.1. Számoljuk ki a periódusidőt (T), és a periódusidő hibáját (ΔT) 95%-os konfidenciaszinten!

A periódusidőből számítsuk ki a g értékét!

Számoljuk ki a Gauss-féle hibaterjedést alkalmazva, hogy mekkora Δg hibával tudjuk meghatározni g értékét! A hosszmérés hibáját becsüljük meg, mennyi lehetett esetünkben.

Ellenőrizzük, hogy a g = 9,81 m/s^2 érték beleesik-e az általunk kiszámolt $g \pm \Delta g$ intervallumba; ha nem, keressünk rá elfogadható magyarázatot!

2.1.2. Írjuk le, mit tapasztaltunk! Hogyan változik a periódusidő a maximális kitérés függvényében?

2.2. Matematika inga - kúpinga

Eszközök:

- damilra kötött anyacsavar
- stopper
- mérőszalag

Mérési feladat:

2.2.1. Vizsgáljuk meg kísérletileg, miért okoz problémát, hogy pontosan egy kúpfelületen mozogjon a kötél! A kísérletet két hallgató végezze: az egyik tartsa az ingát, a másik próbálja meg megfelelő mozgásba hozni.

2.2.2. Mérjük meg a kúpinga keringési idejét „kis”, ill. „nagy” sugarú körön! Ismét két hallgató végezze a mérést: az egyik pörgesse a kúpingát, a másik pedig végezze az időmérést! Mindkét esetben a 10 kör megtételéhez szükséges időt mérjük meg.

Kiértékelés:

2.2.1. Írjuk le röviden a megfigyeléseket!

2.2.2. Számoljuk ki a „kis”, ill. „nagy” kör sugarát!

3. Torziós inga

Eszközök:

- állvány
- rugó
- hengeres műanyag doboz
- textilbakelit korongok
- stopper
- mérőszalag
- elektronikus mérleg

Mérési feladatok:

3.1. Mérjük meg a rugóból és annak végéhez erősített hengeres műanyag dobozból álló torziós inga periódusidejét! Itt a hosszabb periódusidő miatt elég 1 periódus idejét mérni.
Ezután erősítsünk egy textilbakelit korongot a doboz aljához, és mérjük meg így is a periódusidőt!
Mérjük meg a korong tömegét elektronikus mérleggel, a sugarát pedig mérőszalaggal.
3.2. Szorgalmi feladat: Erősítsünk egy másik, eltérő sugarú korongot is a doboz aljára és mérjük meg azzal is a periódusidőt, majd – ha a rugó elég erős – mérjük meg a periódusidőt úgy is, hogy mindkét korong a doboz aljára van rögzítve.

Kiértékelés:

3.1. Számoljuk ki a korong tehetetlenségi nyomatékát (a korong adataiból)!
Számítsuk ki a doboznak a forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát a két mért periódusidőből! (Itt felhasználjuk, hogy a tehetetlenségi nyomaték additív mennyiség. A torziós szál *D* direkciós nyomatékát nem szükséges kiszámolni.)
3.2. Szorgalmi feladat: Számítsuk ki a doboz tehetetlenségi nyomatékát a 4 (ill. 3) mért periódusidő alapján görbeillesztéssel!

Kérdések, gyakorló feladatok

Minimumkérdések a beugró zh-ban:
- a mérések felsorolása, elve, a szükséges eszközök és alkalmazandó képletek;
- frekvencia, körfrekvencia, amplitúdó;
- lineáris rugalmas erő, rugóállandó;
- rugó végéhez rögzített csillapítatlan rezgőmozgást végző test periódusideje;
- síkinga periódusideje;
- a képletekben szereplő mennyiségek mértékegysége.

Az alábbi kérdések, feladatok, illetve ehhez hasonlóak várhatóak még a beugró zh-ban:

Rövid elméleti kérdések:
- egy pontos rugós erőmérő rugójának a hossza bizonyos határokon belül arányos a rá ható erővel?
- a rugóállandót kétszeresére növelve, a rugó végén lévő tömegpont tömegét pedig felére csökkentve harmonikus rezgőmozgás esetén a periódusidő is a felére csökken?
- síkinga periódusideje függ a kitéréstől?
- síkinga periódusideje egyenesen arányos az inga hosszával?
- harmonikus rezgőmozgásnál a periódusidő az amplitúdó négyzetgyökével egyenesen arányos?
- ha van két egyforma hosszú és egyforma k_1 rugóállandójú rugónk és az egyiket a másik végéhez toldjuk, akkor az így kapott rugó k rugóállandója az egyes rugókénak kétszerese lesz ($k = 2\,k_1$)?
- kúpinga periódusideje a kötélnek a függőlegessel bezárt szögét növelve nő?
- egy harmonikus rezgőmozgás periódusideje független a rezgés amplitúdójától?

**A válaszokhoz indoklást is kérünk!*

Számolási feladatok:

1. Egy rugós erőmérő rugóállandója 5,0 N/m. A rugómérőt 6 anyacsavarral terhelve a rugó végének pozíciója 6,2 cm. Most ráfüggesztünk a mérlegünkre egy Túró Rudit is (a 6 anyacsavar mellé) és azt tapasztaljuk, hogy a rugó végének pozíciója 12,1 cm-re változott.
a) Mennyi a Túró Rudi tömege?
b) A 6 anyacsavar és a rugó végén levő tartószerkezet tömege együttesen 60 g.
Mennyi a rezgésideje ennek a rendszernek,
és mennyire nő meg ez a Túró Rudi hatására?

Megoldás:
a) $m_{\text{TúróRudi}} \cdot g = k \cdot \Delta\ell \;\Rightarrow\; m_{\text{TúróRudi}} = k \cdot \Delta\ell \,/\, g = 5{,}0 \cdot (12{,}1\text{–}6{,}2)\cdot 10^{-2} / 9{,}81 = 0{,}030 \text{ kg} = 3{,}0 \text{ dkg}$
b) $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ $\quad m_{\text{6 anyacsavar + tartó}} = 0{,}06 \text{ kg} \;\Rightarrow\; T_1 = 0{,}688 \text{ s}$
$m_{\text{6 anyacsavar + tartó + TúróRudi}} = 0{,}09 \text{ kg} \;\Rightarrow\; T_2 = 0{,}843 \text{ s}$

2. Kísérleteinkhez egyforma k erőállandójú súlytalan rugók és m tömegű csavarok állnak a rendelkezésünkre. Ha egy rugó végére 1 db csavart helyezünk, akkor a mért rezgésidő T.
a) Hányszorosa ennek a T időnek egy olyan rendszer periódusideje, amelyben N darab csavart teszünk a rugó végére?
b) 2 rugót párhuzamosan kötünk egyetlen csavarra (a csavart két rugóval függesztjük fel). Mekkora lesz így a rezgés periódusideje? Indokoljuk a választ!
c) N darab rugót összekötünk úgy, hogy az egyik rugó végét a másik rugó elejébe akasztjuk, azaz egy "rugó lánc" jön így létre. E lánc végére egyetlen csavart teszünk. Mennyivel hosszabb vagy rövidebb ennek a rendszernek a periódusideje, mint az egy rugót és egy csavart tartalmazó rendszeré?

Megoldás:
a) Mivel $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, N db esetén $\sqrt{N}$-szeresére nő.
b) A két párhuzamosan kötött rugót egy kétszer akkora rugóállandójú rugónak tekinthetjük, így a periódusidő $\sqrt{2}$-ed részére csökken.
c) Az N db egymás után kötött rugót egy olyan rugónak tekinthetjük, melynek rugóállandója N-ed része egy rugóénak, így a periódusidő $\sqrt{N}$-szeresére nő.

3. Kúpinga hossza 1 m, a függőlegessel bezárt szöge 60°. Mekkora a körpályán keringő test tömege, ha a fonálerő 10 N? ($g = 9{,}81\ m/s^2$)
Megoldás:
RAJZ (mg és $F_{fonál}$ eredője vízszintes) → $mg / F_{fonál} = \cos 60°$ ⇒ $m = 0{,}5097$ kg.

4. Egy $\ell_0 = 22$ cm hosszú, $k = 4{,}2$ N/m rugóállandójú rugóra m tömegű testet akasztunk, meghúzzuk lefelé $\Delta\ell = 12$ cm-t, elengedjük, és megmérjük 10 rezgés idejét: $t_{10} = 8$ s.
a) Mekkora a rugó végére akasztott test tömege?
b) Mennyi lenne 10 rezgés ideje, ha kétszer akkora tömeget akasztanánk a rugó végére? (A rugót kezdetben ugyanannyival húzzuk ki.)
Eredmény: **a)** $m = 0{,}0681$ kg; **b)** $t_{10,\,2m} = 11{,}31$ s

5. Mechanika mérésen matematikai inga periódusidejéből számolják ki a hallgatók a nehézségi gyorsulás értékét. Az inga hossza $L = 36$ cm, a mért periódusidők
1,24 s 1,24 s 1,25 s 1,22 s 1,24 s 1,25 s
Adjuk meg a periódusidőt és hibáját 90%-os konfidenciaszinten!
Eredmény: $T = (\,1{,}2367 \pm 0{,}0085\,)$ s

6. Neil Armstrong a Hold felszínén egy $L = 26{,}0$ cm hosszú matematikai inga periódusidejét 2,50 s-nak mérte. Mekkora nehézségi gyorsulás számítható ebből?
Eredmény: $g_{Hold} = 1{,}64\ m/s^2$

7. Kísérleteinkhez egyforma k erőállandójú súlytalan rugók és m tömegű csavarok állnak a rendelkezésünkre. Ha egy rugó végére 1 db csavart helyezünk, akkor a mért rezgésidő T. Hányszorosa ennek a T időnek egy olyan rendszer periódusideje, amelyben 8 darab csavart helyezünk 2 párhuzamosan kötött rugó végére (a 8 csavart két rugóval függesztjük fel)?
Eredmény: $T' = 2\,T$