5. VÁLTAKOZÓ ÁRAM

A mérés leírása előtt összefoglaljuk a váltóáramú hálózatszámításhoz szükséges alapismereteket.

5.1. VÁLTÓÁRAMÚ HÁLÓZATSZÁMÍTÁS

Ha a feszültség, illetve az áramerősség időfüggése harmonikus, azaz

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U) \quad \text{illetve} \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I) \tag{5.1}$$

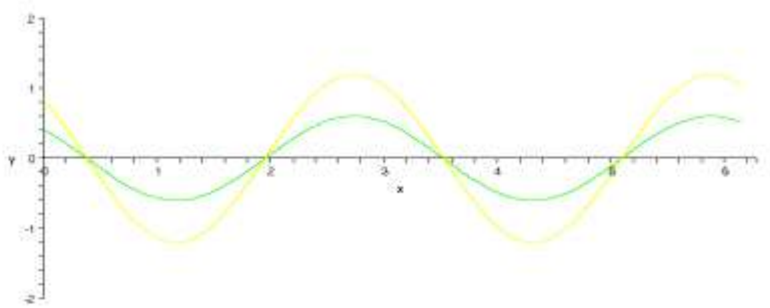
alakú, **váltófeszültségről,** illetve **váltóáramról** beszélünk. Itt

- U_0 ill. I_0 az amplitúdó;
- $\omega t + \varphi_U$ ill. $\omega t + \varphi_I$ a fázis;
- ω a körfrekvencia [s^{-1}];
  - $\omega = 2\pi\nu$, ahol ν a frekvencia [Hz], és $\nu = 1/T$, ahol T a periódusidő;
- φ_U ill. φ_I a fázisállandó vagy kezdőfázis [rad].

5.1.1. Ellenállás, kondenzátor és önindukciós tekercs váltóáramú hálózatban

Egy tetszőleges R **ellenálláson** a feszültség minden pillanatban arányos a pillanatnyi áramerősséggel:

$$U_R(t) = R \cdot I(t) \tag{5.2}$$



5.1. ábra zöld: I(t), sárga: $U_R(t)$

Kondenzátor és önindukciós tekercs esetén azonban nem ilyen egyszerű I(t) és U(t) viszonya.

A **kondenzátor** feszültsége a rajta lévő töltés pillanatnyi értékével arányos:

$$U_C(t) = \frac{1}{C}\cdot Q(t)\,.$$ Itt C a kondenzátor kapacitása, egysége a Farad, [F]

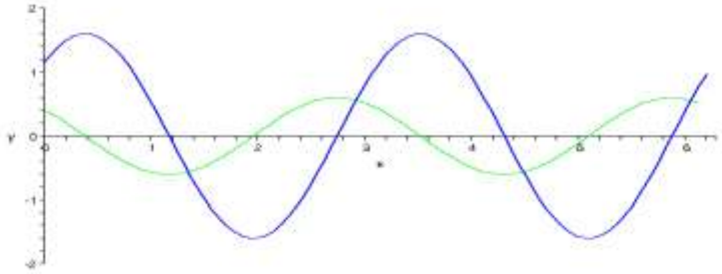
Mivel az áram az adott felületen átmenő töltésmennyiség deriváltja, ezért a töltés átfolyó áram integrálja:

$$U_C(t) = \frac{1}{C}\cdot \int I_C(t)\,dt\;. \tag{5.3}$$

Ha beírjuk az időfüggő áramot $I_C(t) = I_0 \cos \omega t$ alakban és integrálunk, akkor azt kapjuk, hogy az U_C feszültség időfüggése

$$U_C(t) = \frac{1}{C}\int I_0 \cos\omega t\,dt = \frac{I_0}{\omega C}\sin\omega t = \frac{I_0}{\omega C}\cos(\omega t - \pi/2). \tag{5.4}$$

Látható, hogy a feszültség is harmonikus függvénye az időnek, melynek frekvenciája megegyezik az áraméval, de <u>a feszültség π/2 fázissal késik az áramerősséghez képest</u>, és amplitúdója $U_{C,0} = I_0/\omega C$.



5.2. ábra zöld: $I(t)$, kék: $U_C(t)$

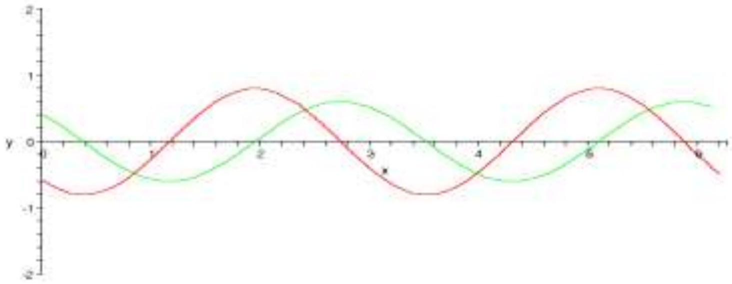
Önindukciós tekercs: Ha a tekercsben folyó áram megváltozik, akkor az általa körülhatárolt területen a mágneses fluxus is megváltozik, és a tekercsben feszültség indukálódik. Ez az indukált feszültség a mágneses fluxus változási sebességével, a fluxus pedig az áramerősséggel arányos:

$$U_L(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = L \cdot \frac{dI_L(t)}{dt}. \tag{5.5}$$

Itt L a tekercs önindukciós együtthatója, egysége a Henry [H]
Váltóáram esetén a tekercsen a feszültség

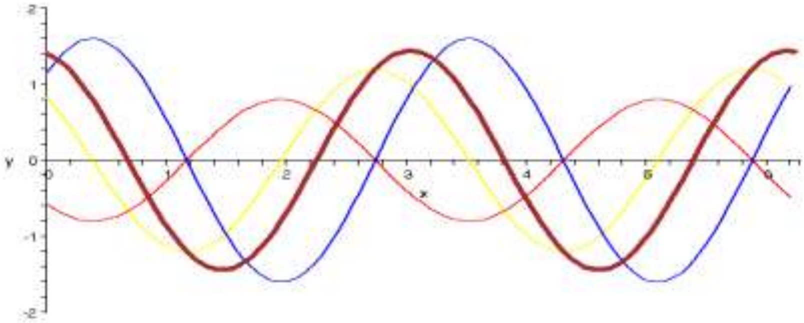
$$U_L(t) \;=\; L \cdot \frac{dI_0 \cos \omega t}{dt} = - I_0\, \omega L \sin \omega t = I_0\, \omega L \cos(\omega t + \pi/2), \tag{5.6}$$

azaz önindukciós tekercsen <u>a feszültség $\pi/2$ fázissal siet az áramerősséghez képest</u>, és amplitúdója $U_{L,0} = I_0\, \omega L$.



5.3. ábra zöld: $I(t)$, piros: $U_L(t)$

Képzeljük el, hogy sorosan kötünk egy ellenállást, egy kondenzátort és egy tekercset. Mivel sorosan vannak kötve, tudjuk, hogy ugyanaz az áram folyik át rajtuk, és a fentiek szerint ismerjük a rajtuk eső feszültségeket is. A három áramköri elemen eső teljes feszültség az egyes feszültségek (U_R, U_C, U_L) összege. Ez az összeadás azonban a fáziskülönbségek miatt nem egyszerű, az eredő feszültség amplitúdója és fázisa elég hosszadalmas számításokkal határozható meg. A következő ábra mutatja a fenti három áramköri elemen eső feszültséget és az összegüket:



5.4. ábra sárga: $U_R(t)$, kék: $U_C(t)$, piros: $U_L(t)$, barna: $U_{RCL}(t)$ eredő feszültség.

Általánosan, mivel mind a kondenzátornál, mind a tekercsnél a feszültség és az áram hányadosa időben változik, ezért az egyenáramú hálózatoknál használt Kirchhoff-törvények (csomóponti és huroktörvény) csak a *pillanatnyi* értékekre alkalmazhatók, az amplitúdókra nem. Az eredő áramok ill. feszültségek amplitúdóját a rész-áramok ill. -feszültségek amplitúdójából csak a *fázisok ismeretében* lehet meghatározni. Formális hasonlóság hozható viszont létre a váltó- és egyenáramú hálózatszámítás között az alábbi módszerrel.

5.1.2. Komplex mennyiségek bevezetése

Egy komplex számot megadhatunk az R valós és az X képzetes részével:

$$\tilde{Z} = R + i\,X \ ,$$

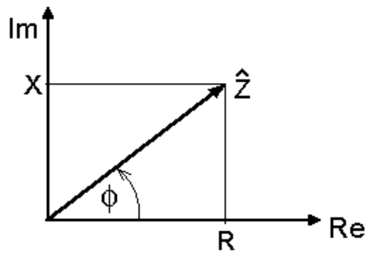
vagy a Z abszolút értékével és a φ fázisával:

$$\tilde{Z} = Z\,e^{i\varphi} \qquad \text{(Euler alak)}$$

A φ fázis a valós tengellyel bezárt szög.

Az ábráról látható, hogy

$$\begin{Bmatrix} Z = \sqrt{R^2 + X^2} \\ tg\varphi = X/R \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} R = Z\cos\varphi \\ X = Z\sin\varphi \end{Bmatrix} ,$$



5.5. ábra

vagyis $\tilde{Z}$ felírható $\tilde{Z} = Z\cos\varphi + i\,Z\sin\varphi$ alakban is.

Az Euler alakból kiolvasható, hogy komplex számok szorzásakor az abszolút értékek szorzódnak, és a fázisok összeadódnak.

Elvben feltételezhetjük, hogy a feszültség ill. az áramerősség komplex értékű függvénye az időnek:

$$\tilde{U} = \tilde{U}_0 \cdot e^{i(\omega t + \varphi_U)}, \quad \tilde{I} = \tilde{I}_0 \cdot e^{i(\omega t + \varphi_I)} . \tag{5.7}$$

Bár ennek fizikai értelme nincs, mégis, ha vesszük $\tilde{U}$ ill. $\tilde{I}$ valós részét, az már a közönséges harmonikus időfüggés:

$$\mathrm{Re}\,(\tilde{U}) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U), \quad \mathrm{Re}\,(\tilde{I}) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I) . \tag{5.8}$$

Mindaddig, míg lineáris műveleteket (összeadást, konstanssal való szorzást, differenciálást és integrálást) hajtunk végre a feszültségen és áramokon, ezt elvégezhetjük a komplex függvényalakon, és azután vesszük az eredmény valós részét.

Tételezzük fel tehát, hogy az áramerősség $\tilde{I} = \tilde{I}_0 \cdot e^{i(\omega t + \varphi_I)}$ alakú, és határozzuk meg (5.2), (5.3) és (5.5) mintájára a komplex feszültségeket az egyes áramköri elemeken:

$$\tilde{U}_R = R \cdot \tilde{I}_0\, e^{i(\omega t + \varphi_I)} = R \cdot \tilde{I} \tag{5.9}$$

$$\tilde{U}_C = \frac{1}{C} \int \tilde{I}_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)} dt = \frac{1}{C} \cdot \frac{\tilde{I}_0}{i\omega} e^{i(\omega t + \varphi_I)} = \frac{1}{\omega C i} \cdot \tilde{I} , \tag{5.10}$$

$$\tilde{U}_L = L \cdot \frac{d\tilde{I}_0 e^{i(\omega t + \varphi_I)}}{dt} = L \cdot \tilde{I}_0 \cdot i\omega \cdot e^{i(\omega t + \varphi_I)} = \omega L i \cdot \tilde{I} . \tag{5.11}$$

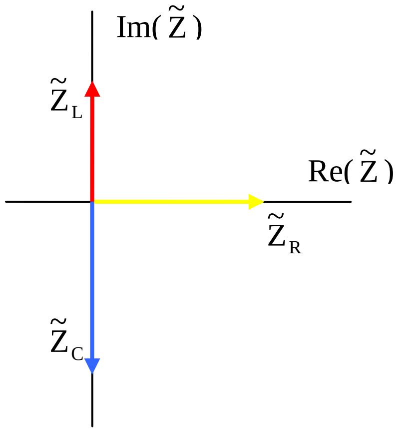
Látható, hogy a komplex alakban már a kondenzátor és a tekercs feszültségének és áramának hányadosa is egy-egy időtől nem függő (viszont komplex) szám. Ezeket a hányadosokat **komplex impedanciáknak** nevezzük, $\tilde{Z}$-vel jelöljük, és velük a komplex feszültség és komplex áram közötti összefüggés az egyenáramú Ohm-törvényhez hasonló alakba írható:

$$\tilde{U} = \tilde{Z} \cdot \tilde{I} . \tag{5.12}$$

Az ellenállás, a kondenzátor és a tekercs impedanciáját a (5.9)–(5.11) képletekből olvashatjuk ki:

$$\tilde{Z}_R = R, \quad \tilde{Z}_C = \frac{1}{\omega C i} = -\frac{1}{\omega C} i, \quad \tilde{Z}_L = \omega L i. \qquad (5.13)$$

Ezeket a komplex impedanciákat mutatja a (5.6) ábra:



5.6. ábra

A komplex mennyiségekkel a váltóáramú hálózatszámítás visszavezethető az egyenáramú hálózatszámításra, a Kirchhoff-törvények érvényesek maradnak a <u>komplex</u> áramokra és feszültségekre.

Ha ellenállásokból, tekercsekből és kondenzátorokból tetszőleges kétpólust építünk, annak a két pólusán is arányos lesz a komplex feszültség a komplex árammal, mert ez az arányosság minden egyes elemen fennáll. Egy kétpólus komplex feszültségének és áramának hányadosát a kétpólus eredő komplex impedanciájának nevezzük, és az egyenáramú hálózatoknál megismert szabályok szerint számolható ki az egyes áramköri elemek komplex impedanciájából, azaz

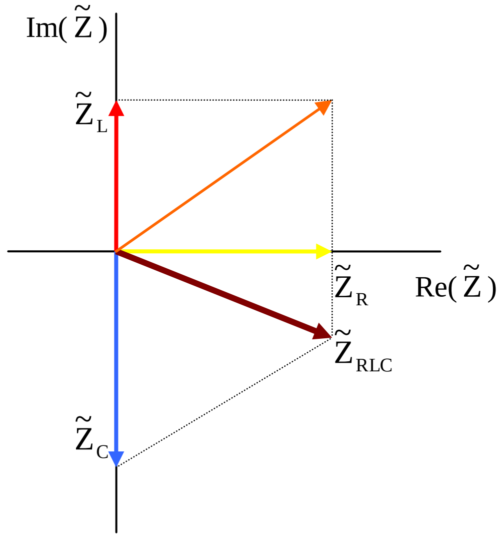
– soros kapcsolásnál a komplex impedanciák összeadódnak:

$$\tilde{Z}_e = \sum \tilde{Z}_i , \qquad (5.14)$$

– párhuzamos kapcsolásnál pedig az egyes impedanciák reciprokának összege adja az eredő reciprokát:

$$\frac{1}{\tilde{Z}_e} = \sum \frac{1}{\tilde{Z}_i} . \qquad (5.15)$$

Ez azt jelenti, hogy soros kapcsolásnál a komplex síkon az eredő impedancia az egyes impedanciáknak megfelelő vektorok eredőjének megszerkesztésével nyerhető:



5.7. ábra
komplex impedanciák **vektorábrá**ja

Mivel tudjuk, hogy komplex számok szorzásánál az abszolút értékek szorzódnak, a fázisok pedig összeadódnak, a komplex mennyiségekkel érvényes az Ohm-törvényből következik, hogy

– a feszültség amplitúdója az impedancia abszolút értékének és az áram amplitúdójának szorzata:

$U_0 = Z \cdot I_0$,

– a feszültség fázisa viszont az impedancia és az áram fázisának összegével egyenlő:

$\varphi_U = \varphi_Z + \varphi_I$.

φ_Z helyett általában röviden csak φ-t írunk. Tehát

$U(t) = Z \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi + \varphi_I)$.

Ellenőrizhetjük, hogyan kapjuk vissza ellenállásra, kondenzátorra és tekercsre a 5.1.1. pontban levezetett összefüggéseket:

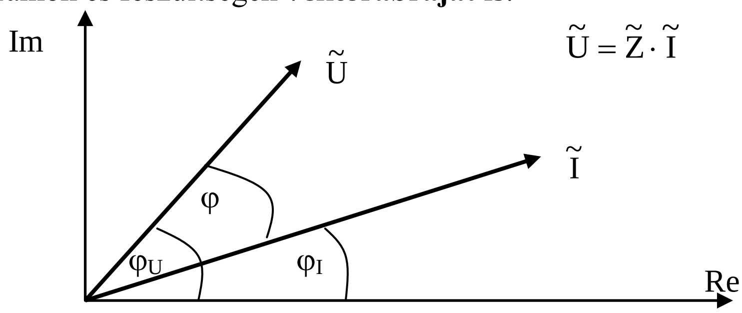
– Az ellenállás impedanciája $\tilde{Z}_R = R$. Ennek abszolút értéke R, így $U_{R,0} = R\, I_0$, és fázisa 0, vagyis a feszültség és az áram azonos fázisban vannak.

– A kondenzátor impedanciája $\tilde{Z}_C = \frac{1}{\omega C i} = -\frac{1}{\omega C} i$. Ennek abszolút értéke $1/(\omega C)$, így $U_{C,0} = I_0 / (\omega C)$, és fázisa $-\pi/2$, vagyis a feszültség $\pi/2$-vel késik az áramhoz képest.

– A tekercs impedanciája $\tilde{Z}_L = \omega L i$. Ennek abszolút értéke ωL, így $U_{L,0} = \omega L\, I_0$, és fázisa $\pi/2$, vagyis a feszültség $\pi/2$-vel siet az áramhoz képest.

Ezen elemek összekapcsolásával az eredő impedancia fázisa $-\pi/2$ és $\pi/2$ közötti érték.

A komplex számsíkon ábrázolhatjuk nemcsak a komplex impedanciák, hanem a komplex váltóáramok és feszültségek **vektorábráját** is:



$$\tilde{U} = \tilde{Z} \cdot \tilde{I}$$

5.1.3. Váltóáramú teljesítmény számítása

Periodikusan változó áram és feszültség esetén a pillanatnyi teljesítmény helyett az *átlagteljesítmény*nek van gyakorlati jelentősége. Az átlagteljesítmény a pillanatnyi valós feszültség és áram szorzatának (a pillanatnyi teljesítménynek) az időátlaga egy periódusra.

Számoljuk ki szinuszos időfüggés esetén az átlagteljesítményt. Legyen $\varphi_I = 0$, így $\varphi_U = \varphi$.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T U_0 \cos(\omega t + \varphi) \cdot I_0 \cos(\omega t)\, dt = \frac{U_0 I_0}{T}\int_0^T \frac{\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi}{2} dt = \frac{U_0 I_0}{2} \cos\varphi$$

Bevezetve az effektív értékeket

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}},\ I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

a teljesítmény az alábbi alakba írható:

$$P = U_{eff}\, I_{eff} \cos\varphi\ .$$

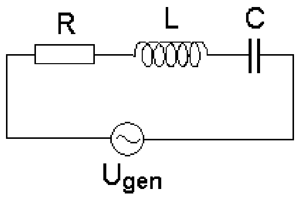
Az egyenáramú teljesítményhez képest tehát az az eltérés, hogy a teljesítményben megjelenik az impedancia fázisa. Ohmos ellenállásnál $\cos\varphi = 1$, kondenzátornál és tekercsnél viszont $\cos\varphi = 0$. Ez azt jelenti, hogy teljesítmény csak az ellenállásokon disszipálódik.

5.1.4. Rezgőkörök

Gyakran előfordul, hogy egy váltóáramú hálózat eredő impedanciájának az abszolút értéke a frekvencia függvényében szélsőértéken megy át. A két legnevezetesebb a soros és a párhuzamos rezgőkör. A mérés során csak a **soros rezgőkörrel** fogunk foglalkozni.

Soros rezgőkör

Sorba kapcsolunk egy R ellenállást,
egy L önindukciójú tekercset és
egy C kapacitású kondenzátort, és
egy ω körfrekvenciájú váltóáramú generátorra kötjük:



5.8. ábra Soros rezgőkör

A soros rezgőkör komplex impedanciája:

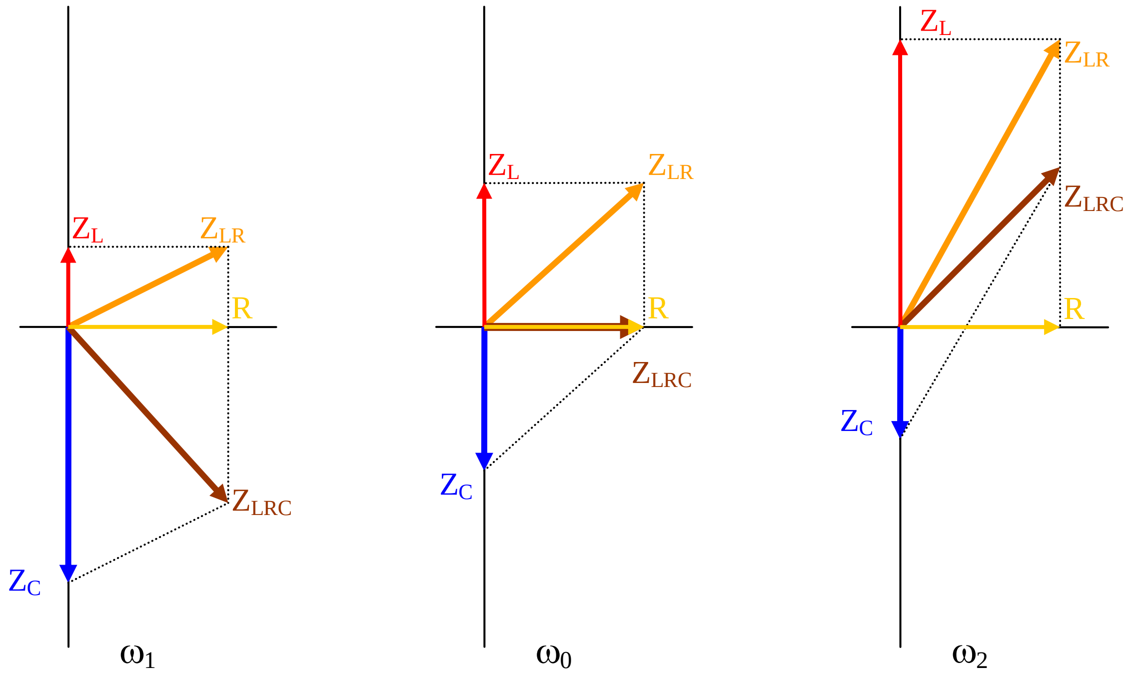
$$\tilde{Z}_{LRC} = R + \tilde{Z}_L + \tilde{Z}_C = R + \omega L i + \frac{1}{\omega C i} = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) i \qquad (5.16)$$

Az olyan önindukciós tekercset, amelynek ohmos ellenállása is van, *reális* tekercsnek nevezzük. Ennek impedanciája

$$\tilde{Z}_{LR} = R + \omega L i \,. \qquad (5.17)$$

A mérés során is ilyet használunk.

Az eredő impedancia az ω körfrekvencia (a ν frekvencia) függvénye.



5.9. ábra Kondenzátor, reális tekercs és soros eredőjük impedanciája 3 különböző –egyre nagyobb– körfrekvencián ($\omega_1 < \omega_0$, ω_0 és $\omega_2 > \omega_0$)

Létezik egy ω_0 körfrekvencia, ahol $\tilde{Z}_{LRC}$ képzetes része zérus:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \;; \qquad (5.18)$$

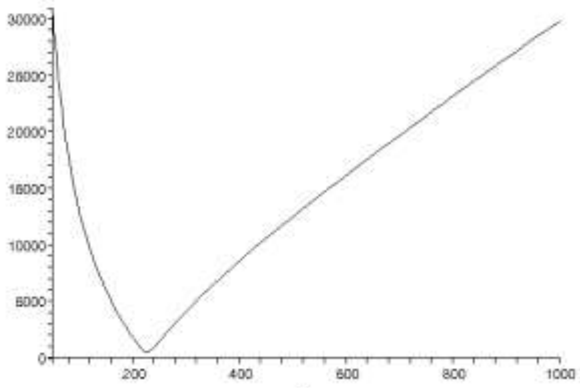
ekkor az impedancia valós, és az ohmos ellenállással, R-rel egyenlő:

$$\tilde{Z}(\omega_0) = R\,. \qquad (5.19)$$

Ezen a körfrekvencián a (5.16) impedancia abszolút értékének,

$$Z_{LRC} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad (5.20)$$

-nek minimuma van:



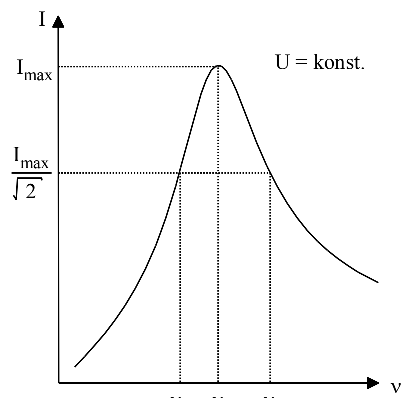
5.10. ábra Soros rezgőkör eredő impedanciájának frekvenciafüggése
(R = 500 Ω, L = 5 H, C = 0,1 μF, ν = 50...1000 Hz)

Ez a körfrekvencia kifejezhető (5.18)-ból L és C értékével:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \textbf{Thomson-formula} \qquad (5.21)$$

A $\nu_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ frekvencia az áramkör **rezonanciafrekvenciája**. (5.22)

Konstans feszültség mellett ennél a frekvenciánál az áram maximumon megy át, ezért a jelenséget *áramrezonanciának* nevezzük.



5.11. ábra Soros rezgőkör rezonanciagörbéje

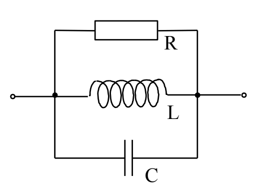
Párhuzamos rezgőkör

Párhuzamos rezgőkörnél az impedancia reciprokát, az ún. *admittanciát* érdemes kiszámítani:

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \tilde{Y} = \frac{1}{R} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) i\,, \qquad Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

Ebben az esetben Z(ω)-nak az $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ helyen maximuma van, értéke R.

Állandó áram esetén a feszültség megy át maximumon, ez a *feszültségrezonancia*.



Párhuzamos rezgőkör

A rezonanciagörbe alakját, a rezonancia élességét a Q **jósági tényezővel** jellemezzük. Q értéke annál nagyobb, minél szűkebb az a frekvenciatartomány, ahol jelentősen megnövekedett áramokat mérhetünk.
Soros rezgőkör esetén a Q jósági tényező a rezonanciafrekvenciához tartozó egyes reaktanciák (nem ohmikus impedanciák) és az ohmikus ellenállás hányadosa:

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad . \tag{5.23}$$

(A harmadik alakot a Thomson-formula felhasználásával kaphatjuk.)
A jósági tényezőt számolhatjuk a rezonanciagörbéből is:

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\nu_0}{\nu_2 - \nu_1} \quad , \tag{5.24}$$

ahol ω_1 és ω_2 (ill. ν_1 és ν_2) az a két körfrekvencia (ill. frekvencia), amelynél az áramerősség a maximális érték $\sqrt{2}$-edére csökken (ld. 5.11. ábra) állandó feszültség mellett.

Hogy miért pont a maximális áram $\sqrt{2}$-edéhez tartozó frekvenciákat kell venni Q kiszámításához? Ennek az az oka, hogy így lesz a kétféle képlettel számolva azonos a jósági tényező értéke. A maximális áram $\sqrt{2}$-edéhez tartozó frekvenciáknál ugyanis –mivel a feszültség állandó– az eredő impedancia abszolút értéke $\sqrt{2}$-szerese a rezonanciafrekvenciához tartozó impedanciának, azaz R-nek:

$$Z_{LRC} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{2}\cdot R = \sqrt{2R^2} \; ,$$

vagyis ekkor az eredő reaktancia abszolút értéke megegyezik az ohmikus ellenállással:

$$\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| = R \, , \quad \text{vagyis} \quad \frac{1}{\omega_1 C} - L\omega_1 = R \quad \text{és} \quad L\omega_2 - \frac{1}{\omega_2 C} = R \; .$$

A Thomson-formulából $1/C = \omega_0^2 L$, ennek behelyettesítésével

$$\frac{\omega_0^2 L}{\omega_1} - L\omega_1 = R \quad \text{és} \quad L\omega_2 - \frac{\omega_0^2 L}{\omega_2} = R \; ;$$

majd ω_1-gyel ill. ω_2-vel szorozva, és a két egyenletet összeadva

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2)L = (\omega_1 + \omega_2)R, \quad \text{azaz} \quad (\omega_2 - \omega_1)(\omega_1 + \omega_2)L = (\omega_1 + \omega_2)R$$

$$\Rightarrow \quad (\omega_2 - \omega_1)L = R \quad \Rightarrow \quad L/R = 1/(\omega_2 - \omega_1) \; .$$

Ezt behelyettesítve a jósági tényezőre adott (5.23) formulába

$$Q = \omega_0 \cdot L/R = \omega_0 / (\omega_2 - \omega_1),$$

tehát beláttuk, amit akartunk.

Az ω_1 ill. ω_2 körfrekvenciákon a rezgőkör által felvett teljesítmény a rezonanciafrekvencián felvett maximális teljesítménynek éppen a fele:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = I(\omega_1)^2 \cdot R = I(\omega_2)^2 \cdot R = \left(\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}\right)^2 R = \frac{I_{max}{}^2 \, R}{2} = \frac{P_{max}}{2}$$

5.2. Soros rezgőkör rezonanciagörbéjének és áramköri jellemzőinek mérése

A mérés célja: egy könnyen megvalósítható modellen, a soros váltóáramú rezgőkörön tanulmányozni a rezonancia jelenségét, amely a mérnöki gyakorlatban sokszor előfordul (mechanikus rezgések gépeken, spektroszkópiai módszerek, adatátvitel).

Eszközök:

Kondenzátor: Jó közelítéssel ideálisnak tekinthető (azaz nincs ohmikus ellenállása). Kényelmi okokból egy plexi dobozba szereltük és banánhüvely kivezetésekkel láttuk el.

Tekercs: Fénycsőelőtétként használt vasmagos tekercs. Reális tekercsként viselkedik, azaz van ohmikus ellenállása. Ez két részből tevődik össze: a *rézveszteségből*, vagyis a tekercset alkotó rézhuzal ellenállásából (néhányszor tíz Ω), és a *vasveszteségből*, ami abból származik, hogy a váltóárammal átjárt tekercs vasmagján energia disszipálódik, a vasmag melegszik. Ez utóbbi is modellezhető ohmikus ellenállással, ami többek között függ a vasmag anyagi minőségétől, geometriai elrendezésétől, a frekvenciától és az áramerősségtől; nagyságrendje fél kΩ.

Függvénygenerátor: Különböző jelalakú és frekvenciájú váltófeszültség előállítására szolgál. Amikor szinuszos kimenetet használunk, hanggenerátorként fogunk rá hivatkozni. Fontosabb kezelőszervei: a hálózati kapcsoló, a frekvencia beállítására való tartományváltó és finomszabályozó gombok, a frekvencia digitális kijelzője, a jelalakváltó gomb és végül a kimenőfeszültség amplitúdóját szabályozó gombok. A készülék nem ideális feszültséggenerátor abban az értelemben, hogy kapocsfeszültsége megváltozik, ha a terhelést vagy a frekvenciát megváltoztatjuk. A szabályozható kimenőfeszültség azonban lehetőséget nyújt arra, hogy a rezgőkörön konstans feszültséget tartsunk a rezonanciagörbe felvételénél.

Digitális univerzális műszerek: Áram-, feszültség- és ellenállásmérésre alkalmasak. Általános szabály, hogy egy műszert mindig a legnagyobb méréshatárba kötünk be, majd fokozatosan csökkentjük a méréshatárt a mérendő értéknél nagyobb legkisebbig. **Szinuszos váltakozó áram esetén a műszerről leolvasható érték az effektív érték** (az amplitúdó $\sqrt{2}$-e).

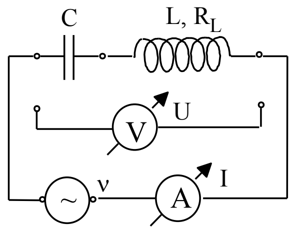
5.2.1. Soros rezgőkör rezonanciagörbéjének mérése

Feladat:

Állítsuk össze a 5.12. ábra szerinti kapcsolást.

A voltmérőt kötjük be utoljára, úgy, hogy a teljes rezgőkörön, vagyis a kondenzátor és a tekercs soros eredőjén eső feszültséget mérjük vele.

Mielőtt az áramkörre rákapcsolnánk a feszültséget, ellenőriztetni kell a mérésvezetővel!



5.12. ábra

1. Tájékozódás céljából közelítőleg meghatározzuk a rezonanciafrekvenciát: a hanggenerátoron maximális amplitúdót állítunk be, az ampermérőn keresünk egy alkalmas méréshatárt, majd folyamatosan növelve a frekvenciát kb. 25 Hz-től indulva, az ampermérőn árammaximumot keresünk. Eközben értelemszerűen váltunk a hanggenerátoron frekvenciatartományt és az ampermérőn méréshatárt. A maximumhely a *közelítő* rezonanciafrekvencia (azért csak közelítő, mert közben a feszültséget nem szabályoztuk).

2. Kiválasztjuk a rezonanciagörbe felvételénél alkalmazandó konstans feszültséget: leolvassuk a közelítő rezonanciafrekvencián maximális generátoramplitúdó mellett a rezgőkörön eső feszültséget, és választunk egy tetszőleges értéket ennek kb. a 2/3-ánál. A rezonanciagörbe felvételekor minden beállított frekvencián ezt fogjuk beállítani a hanggenerátor amplitúdó gombjával (vagyis a hanggenerátor által leadott feszültség amplitúdójának változtatásával).

3. Felvesszük a rezonanciagörbét: legalább 10-12 mérési pontban

a) kiválasztjuk a frekvenciát,

b) beállítjuk a konstans feszültséget,

c) leolvassuk az áramerősséget.

Ügyeljünk arra, hogy úgy vegyünk fel mérési pontokat, a mérési pontok alapján megrajzolt rezonanciagörbéből egyrészt a rezonanciafrekvencia 2-3 Hz pontossággal, másrészt a jósági tényező meghatározható legyen. Ez más szavakkal azt jelenti, hogy egyrészt a maximális áramhoz tartozó frekvencia (a rezonanciapont) környékén 2-3 Hz-enként vegyünk fel mérési pontokat lefelé és felfelé is, másrészt hogy a rezonanciapontban mért áramerősség $\sqrt{2}$-e alatt kevéssel is legyen egy-egy mérési pont a rezonanciafrekvenciánál kisebb és nagyobb frekvenciák irányába is.

Kiértékelés:
Ábrázoljuk milliméterpapíron a rezonanciagörbét!
A rezonanciagörbéből állapítsuk meg a rezonanciafrekvenciát (ν_0), és számoljuk ki a jósági tényezőt és a tekercs ohmikus ellenállását:

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_2 - \nu_1}, \qquad R_L = \frac{U}{I_{max}}.$$

5.2.2. Soros rezgőkör áramköri jellemzőinek mérése

Feladat:
Állítsunk be a maximális amplitúdó 2/3-a környékén egy tetszőleges értéket a hanggenerátoron, és ezt a továbbiakban már ne változtassuk.
Sorban be fogunk állítani három különböző frekvenciát: $0{,}8\cdot\nu_0$, ν_0, $1{,}2\cdot\nu_0$ (ν_0 értékét az előző mérési sorozatból tudjuk). Ezután minden egyes frekvenciánál
a) a voltmérőt a kondenzátor sarkaira kötjük, leolvassuk az áramerősség (I_1) és a kondenzátoron eső feszültség (U_C) értékét;
b) a voltmérőt a tekercsre kötve leolvassuk I_2-t és U_{LR}-t;
c) a voltmérőt a kondenzátor és a tekercs soros eredőjére kötve leolvassuk I_3-at és U_{LRC}-t.
Ideális voltmérőt feltételezve, egy adott frekvencián I_1, I_2 és I_3 teljesen azonos lenne. A közöttük megfigyelhető kis különbségek mutatják a voltmérő befolyását.

Kiértékelés:
1. Számítsuk ki *a rezonanciafrekvencián mért adatokból* a kapacitást és az induktivitást:
a) kondenzátort ideálisnak tekintjük, tehát $C = \dfrac{I_1}{\omega_0 \cdot U_C}$,

b) a tekercsnél figyelembe vesszük annak ohmikus ellenállását, vagyis $L = \dfrac{1}{\omega_0} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{U_{LR}}{I_2}\right)^2 - R_L^2}$.

(A számolás természetesen elvégezhető a $0{,}8\nu_0$ ill. az $1{,}2\nu_0$ frekvencián mért adatokból is.)
2. A fenti értékek felhasználásával számítsuk ki a rezonanciafrekvenciát a (5.21) képlettel és a jósági tényezőt a (5.23) képlettel:

$$\nu_0' = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad Q' = \frac{1}{R_L} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}},$$

majd vessük össze a rezonanciagörbéből kapottakkal.
3. A $0{,}8\nu_0$, ν_0, ill. $1{,}2\nu_0$ frekvenciákon mért adatok felhasználásával mindhárom esetben szerkesszük meg az áramkör vektorábráját az alábbi feltételezésekkel:
- a voltmérő és a kondenzátor ideális,
- a tekercs reális, vagyis impedanciájának fázisa 0 és $\pi/2$ közé esik.

A vektorábrában az áram- és feszültségvektorok hosszának a mért effektív értékeket feleltetjük meg, a vektorok irányát pedig az egyes mennyiségek fázisa szabja meg. Sorosan kapcsolt áramköri elemeken a feszültségek összegződnek, ez a vektorábrában a feszültségvektorok vektori összegzését jelenti.
A szerkesztés menete:
- vegyük fel először a közös áramvektort (sorosan kapcsolt elemeken ugyanaz az áram folyik);
- majd erre merőlegesen lefelé a kondenzátor feszültségét (a kondenzátoron a feszültség az áramhoz képest $\pi/2$-vel késik);
- körzővel szerkesszük meg az $\underline{U}_C + \underline{U}_{LR} = \underline{U}_{LRC}$ vektorháromszög $\underline{U}_C$-vel szemközti csúcsát;
- rajzoljuk meg $\underline{U}_{LRC}$-t, és párhuzamos eltolással az $\underline{U}_{LR}$ vektort.

(A feszültségek vektorábrája hasonló a 5.9. ábrán látható impedancia-vektorábrához.)

Kérdések, gyakorló feladatok:

*Igaz-e, hogy soros rezgőkörben
- a kondenzátoron mért feszültség lehet nagyobb is a generátorfeszültségnél?
- a kondenzátor feszültsége késik a generátorfeszültséghez képest?
- a kondenzátor árama késik a generátoráramhoz képest?
- a rezonanciafrekvencián az eredő impedancia független attól, hogy milyen kapacitású kondenzátor és milyen induktivitású tekercs van a körben?
- ha a kondenzátort kisebb kapacitásúra cseréljük, a rezonanciafrekvencia nő?
- a rezonanciafrekvencián a kör eredő impedanciájának minimuma van?
- konstans generátorfeszültség mellett a rezonanciafrekvencián az áramnak minimuma van?
- a tekercs impedanciája a generátor frekvenciájának növelésével csökken?
- a generátorfeszültség *frekvenciájának* változtatásával elérhetjük, hogy a tekercs feszültsége nagyobb legyen a generátorfeszültségnél?
- a generátorfeszültség *amplitúdójának* változtatásával elérhetjük, hogy a tekercs feszültsége nagyobb legyen a generátorfeszültségnél?
- a tekercsen ill. a kondenzátoron eső feszültség aránya független a frekvenciától?
- állandó generátorfeszültség mellett a frekvenciát változtatva a kör által felvett teljesítmény a rezonanciafrekvencián maximális?
- a kondenzátor impedanciája a generátor frekvenciájának növelésével csökken?

**A válaszokhoz indoklást is kérünk!*

1. Egy kondenzátorból és egy veszteséges tekercsből álló soros rezgőkörben a rezonanciafrekvencián a kondenzátoron 3,6 V-ot, a teljes rezgőkörön 4,8 V-ot mérünk. Mekkora feszültséget mérnénk a tekercsen?

2. Mennyi a kondenzátor kapacitása, ha ν = 199 Hz frekvencián a kondenzátoron eső feszültség effektív értéke 1,6 V és a rajta átfolyó áram effektív értéke 0,5 mA?

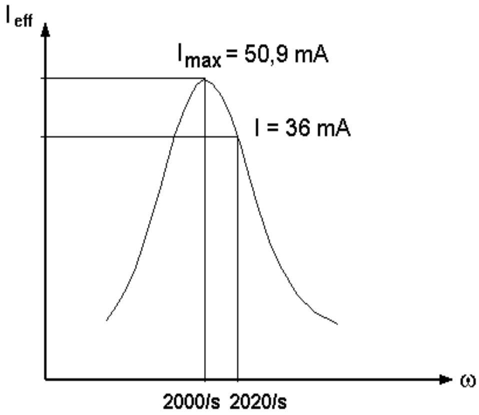
3. Mekkora a kondenzátor kapacitása, ha azt egy L = 0,2 H önindukciós együtthatójú, R = 420 Ω ellenállású veszteséges tekerccsel sorba kötve a kör rezonanciafrekvenciája 7958 Hz lesz?

4. Sorosan kapcsolunk egy C = 200 nF kapacitású kondenzátort és egy L = 0,5 H önindukciós együtthatójú, R = 420 Ω ellenállású veszteséges tekercset, és egy U_{gen} = 7,0 V effektív feszültségű váltóáramú generátorra kötjük.
a) Mekkora áram fog folyni a körben 600 Hz frekvencián?
b) Mennyi a kör rezonanciafrekvenciája?

5. Mekkora a kondenzátor kapacitása, ha azt egy L = 2,5 H önindukciós együtthatójú, R = 250 Ω ellenállású veszteséges tekerccsel sorba kötve a kör rezonanciafrekvenciája 318 Hz lesz?
b) Hányszorosa a rezonanciafrekvencián a generátorfeszültség a kondenzátoron eső feszültségnek?

Megoldott feladatok:

1.



Egy soros rezgőkörön folyó áram effektív értékét mérjük az ω körfrekvencia függvényében, miközben a körön a feszültség értéke állandó, U_{eff} = 45,81 V.
ω_0 = 2000 1/s -nál az áram mért (effektív) értéke maximális, I_{max} = 50,9 mA.
Ha ω = 2020 1/s, az áramerősség effektív értéke I = 36 mA.
a. Határozzuk meg, milyen értékű ellenállásból, milyen induktivitású tekercsből és milyen kapacitású kondenzátorból áll a rezgőkör!
b. Mekkora teljesítmény fejlődik a körön ω_0 = 2000 1/s és ω = 2020 1/s körfrekvencián?

Megoldás:

1a. ω_0 a rezonanciafrekvencia; $Z_0 = U_{eff} / I_{max} = 45{,}81 / 50{,}9\cdot 10^{-3} = 900\ \Omega = R$

ω_1-en $Z_1 = U_{eff}/I = 45{,}81/36\cdot 10^{-3} = 1272{,}5\ \Omega = \sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \dfrac{1}{\omega_1 C}\right)^2} = \sqrt{900^2 + \left(2020\,L - \dfrac{1}{2020\,C}\right)^2}$

és fel tudjuk még használni, hogy $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 2000$,

$\Rightarrow$ **L = 22,6 H, C = 11 nF**

b. ω_0 frekvencián $\mathbf{P_0} = U_{eff}\cdot I_{max} = 45{,}81\cdot 50{,}9\cdot 10^{-3} =$ **2,33 W**,
ω_1 frekvencián $\mathbf{P_1} = I_{eff}^2\, R = (36\cdot 10^{-3})^2\cdot 900 =$ **1,166 W**.

2. A Kossuth adó frekvenciája 540 kHz. Olyan soros rezgőkört akarunk készíteni, melynek itt van a rezonanciafrekvenciája, és a rezonanciafrekvencián az impedancia 100 Ω, a jósági tényező pedig Q = 20. Mennyi legyen L és C?
Ha $U_{g,\ eff}$ = 10 V, mennyi áram folyik a teljes rezgőkörön a rezonanciafrekvencián, és annál 20 kHz-cel nagyobb frekvencián?

Megoldás:

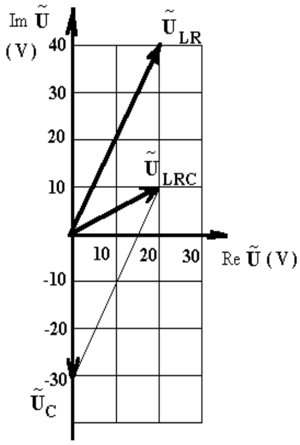
3a. a rezonanciafrekvencián $Z_0 = R = 100\ \Omega$
$Q = \omega_0 L / R = 2\pi\nu_0 L / R = 2\cdot\pi\cdot 540\cdot 10^3\cdot L / 100 = 20 \quad\Rightarrow\quad$ **L = 0,59 mH**
$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{C} = 1 / (\omega_0^2 L) = 1 / ((2\cdot\pi\cdot 540\cdot 10^3)^2\cdot 0{,}59\cdot 10^{-3}) =$ **147,4 pF**

b. a rezonanciafrekvencián $I_{max} = U_{eff} / Z_0 = 10 / 100 =$ **0,1 A**.
$\nu_1 = 560\cdot 10^3$ Hz frekvencián az impedancia:

$$Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2} = \sqrt{100^2 + \left(0{,}59\cdot 10^{-3}\cdot(2\pi\cdot 560000) - \frac{1}{147{,}4\cdot 10^{-12}\cdot(2\pi\cdot 560000)}\right)^2} = 174{,}2\Omega$$

és az áram $\mathbf{I_1} = U_{eff} / Z_1 = 10 / 174{,}2 =$ **57,4 mA**

3. Sorba kötünk egy veszteséges tekercset egy kondenzátorral és a rezgőkört egy ω = 5000/s körfrekvenciájú váltóáramú generátorra kapcsoljuk.
Mérjük a rezgőkörön folyó áramot (ennek amplitúdója 5 mA) és a feszültséget az egyes elemeken, valamint a teljes rezgőkörön. Megszerkesztjük a feszültségek vektorábráját a komplex síkon, ez látható az ábrán.



a. Számítsuk ki az L önindukciós együtthatót, a C kapacitást és az R ellenállást!
b. Mennyi a kör ν_0 rezonancia frekvenciája és Q jósági tényezője?

Megoldás:

a. $\tilde{U}_C$ = -30i V, $\tilde{Z}_C$ = -30i /0,005 = -6000i = -i/ωC $\Rightarrow$ **C = 33,3 nF**
$\tilde{U}_{LR}$ = 20 + 40i V , $\tilde{Z}_{LR}$ = (20 + 40i) / 0,005 = 4000 + 8000i = R + ωLi
$\Rightarrow$ **R = 4000 Ω = 4 kΩ**, ωL = 8000 Ω, **L = 1,6 H**

b. $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ = 4330 1/s, $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ = **689 Hz** $Q = \omega_0 L / R$ = **1,732**