A mérés eredményének megadása

A mérési eredmények szórása; a tűrés

Ha ismerjük egy valószínűségi változó eloszlását (azaz értékeinek valószínűségi sűrűségfüggvényét), akkor meg tudjuk mondani, hogy egy bizonyos intervallumhoz mekkora valószínűség tartozik. Ez azt jelenti, hogy ha az adott eloszlást követő mennyiség értékeire méréseket hajtunk végre, akkor meghatározható, hogy mekkora valószínűséggel esik a mért érték egy bizonyos intervallumba (vagyis hogy az eredményeket adott valószínűséggel milyen intervallumban kapjuk meg – pl. az eloszlás várható értéke körül). Normális / Gauss-eloszlásnál az egyes mérési eredmények a várható érték körüli σ sugarú intervallumba 68,3 % valószínűséggel, a 2σ sugarú intervallumba 95,4 % valószínűséggel esnek. Ha más P valószínűséggel –P **konfidencia szinten**– akarjuk megjósolni a mérési eredményeket, az intervallum szélessége ($k\cdot\sigma$) meghatározható a valószínűség ismeretében, azaz

$$[\mu - k\cdot\sigma\ ,\ \mu + k\cdot\sigma\ ]$$

lesz az a **konfidencia intervallum**, melybe a mérési eredmények az adott P valószínűséggel beleesnek.
Ha vásárolunk valamilyen árut vagy alkatrészt, melyeknek valamilyen mennyiségi jellemzője van (pl. tömeg, ellenállás), akkor az áru tömegén, vagy az ellenállás **névleges értékén** kívül sokszor feltüntetik a **tűrést** is, mely a névleges értéktől való megengedett eltérést jelenti. Ez tulajdonképpen egy konfidencia intervallum, és általában 95 % konfidencia szintre van megállapítva. Ha egy 100 darabos szállítmányból 3 darab kiesik a tűrésből, még nem illik reklamálni a szállítónál, de ha 10 kiesik, akkor már lehet.

A Student-féle t-eloszlás és t paraméter

Mérésnél arra a kérdésre szeretnénk választ kapni, hogy a mérési eredményeknek mi közük van a mérendő mennyiség valóságos értékéhez. Hogyan értékeljük ki a méréssorozatot, hogy a legmegbízhatóbb információt kapjuk a valóságos értékről, azaz a valószínűségi változó várható értékéről? Ha legalább a mérés szórását ismernénk, mondhatnánk, hogy a mérési eredmény ugyanolyan távol van a valóságos várható értéktől, mint fordítva; azaz ha a valóságos érték $k\cdot\sigma$ sugarú környezetébe esnek P valószínűséggel a mérési eredmények, akkor P valószínűséggel a mérési eredmény $k\cdot\sigma$ sugarú környezetébe esik a mérendő mennyiség várható értéke; ha pedig egy mérési sorozatunk van, akkor a sorozat számtani közepének (az átlagnak) a $k\cdot\sigma/\sqrt{n}$ sugarú környezetébe esik a valóságos érték. A baj ott van, hogy általában a szórást sem ismerjük, azt is csak becsülni tudjuk az egyes mérés ill. a középérték korrigált tapasztalati szórásával. Mivel a szórás sem pontos, ugyanahhoz a valószínűséghez nagyobb számmal kell megszorozni a becsült szórást a konfidencia intervallum meghatározásánál, mint ezt egy ismert szórású Gauss-eloszlásnál tennénk. A jellemezni kívánt valószínűségi változó várható értéke, μ_x, valamint a méréssorozatból számított középérték, $\overline{x}$ és a középérték korrigált tapasztalati szórása, $s_{\overline{x}}$ között álljon fenn a következő egyenlőség:

$$\overline{x} = \mu_x + \tau\cdot s_{\overline{x}}\ .$$

Mivel $\overline{x}$ és $s_{\overline{x}}$ a konkrét méréssorozattól függ, tehát véletlenszerűen változik, a $\tau = \dfrac{\overline{x} - \mu_x}{s_{\overline{x}}}$ paraméter mint az $\overline{x}$ és $s_{\overline{x}}$ valószínűségi változók függvénye, szintén valószínűségi változó, melynek eloszlása meghatározható $\overline{x}$ és $s_{\overline{x}}$ eloszlásából. Az eredeti x változóra Gauss-eloszlást feltételezve W.S. Gosset határozta meg a τ paraméter valószínűségi sűrűség- és eloszlásfüggvényét, de mivel munkáit Student (diák) névvel szignálta, a τ paraméter eloszlását "Student-féle t-eloszlásnak" hívják. Az eloszlás- és sűrűségfüggvény függ a mérések számától, ezek számának csökkenésével az $f(\tau)$ sűrűségfüggvény félértékszélessége nő. τ várható értéke 0, és $f(\tau)$ szimmetrikus, tehát az $F(\tau)$ eloszlásfüggvényre –a normalizált Gauss-eloszláshoz hasonlóan– fennáll, hogy

$$F(-\tau) = 1 - F(\tau)\ ,$$

és annak a valószínűsége, hogy τ értéke egy $[-t, t]$ intervallumba essen:

$$P(-t \le \tau \le t) = 2\,F(t) - 1.$$

Visszatérve a τ paraméter értelmezésére kimondhatjuk, hogy

annak valószínűsége, hogy $\overline{x}$ és μ_x eltérése a $[-t\cdot s_{\overline{x}},\ t\cdot s_{\overline{x}}]$ intervallumba essen, $P = 2F(t)-1$ -gyel egyenlő; vagy:

$P = 2F(t)-1$ valószínűséggel a meghatározandó μ_x várható érték az $\overline{x}$ körüli $t\cdot s_{\overline{x}}$ sugarú intervallumba esik.

Az adott P valószínűséghez (konfidenciaszinthez) és a mérések számához tartozó t paraméterérték (a fejezet végén is megtalálható) táblázatból határozható meg.

Méréssorozat kiértékelése

A fentiek alapján egy n mérésből álló sorozat kiértékelése a következőképp történik.

a./ Meghatározzuk a mérési eredmények számtani közepét:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

b./ Meghatározzuk a Δx_i devianciákat, az egyes mérési eredmények eltérését a középértéktől:

$$\Delta x_i = x_i - \overline{x}$$

c./ A devianciákból meghatározzuk a középérték korrigált tapasztalati szórását:

$$\boxed{s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum \Delta x_i^{\,2}}{n(n-1)}}}$$

d./ A mérések számához (n) és a kívánt konfidenciaszinthez (P) tartozó t paraméterértéket kikeressük a táblázatból.

e./ Megadjuk a következő formában a mérési eredményt:

$$\boxed{\xi \text{ (mért mennyiség)} = (\overline{x} \pm t \cdot s_{\overline{x}}) \text{ [mértékegység]}}$$

Ez azt jelenti, hogy a mérendő mennyiség valóságos értéke *a konfidenciaszintnek megfelelő valószínűséggel* az $[\overline{x} - t \cdot s_{\overline{x}},\ \overline{x} + t \cdot s_{\overline{x}}]$ intervallumba esik.

A $\Delta x = t \cdot s_{\overline{x}}$ mennyiséget *hibaintervallum*nak hívjuk.

Megadhatjuk a relatív hibaintervallumot is: $\xi = \overline{x}$ [mértékegység] $\pm\ 100 \cdot \dfrac{t \cdot s_{\overline{x}}}{\overline{x}}$ %

A Student-féle t paraméter értékei P konfidenciaszintnél és n mérésszámnál

n \ P	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,975**	**0,99**	**0,995**
2	3,078	6,314	12,706	25,452	63,657	127,32
3	1,886	2,920	4,303	6,205	9,925	14,089
4	1,638	2,353	3,182	4,176	5,841	7,453
5	1,533	2,132	2,776	3,495	4,604	5,598
6	1,476	2,015	2,571	3,163	4,032	4,773
7	1,440	1,943	2,447	2,969	3,707	4,317
8	1,415	1,895	2,365	2,841	3,499	4,029
9	1,397	1,860	2,306	2,752	3,355	3,832
10	1,383	1,833	2,262	2,685	3,250	3,690
20	1,328	1,729	2,093	2,433	2,861	3,174
∞	1,282	1,645	1,960	2,241	2,576	2,807

Közvetett mérés hibája (hibaterjedés)

Láttuk, hogy a mérés hibáját a középérték varianciájának becsült értékéből ($s_{\bar{x}}^2$) határoztuk meg. Tegyük fel, hogy meg akarunk határozni egy ϕ mennyiséget, melyet nem tudunk közvetlenül mérni, de ϕ függ az x,y,z,... mennyiségektől és az utóbbiak viszont megmérhetők, ismerjük várható értéküket és varianciájukat (illetve megbecsültük ezeket a paramétereket). Hogyan függ össze ϕ várható értéke és varianciája az x,y,z... várható értékével és varianciájával?

Fejtsük sorba ϕ-t változóinak várható értéke körül, és álljunk meg a lineáris tagoknál:

$$\phi(x,y,..) = \phi(\mu_x,\mu_y,...) + \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot(x-\mu_x) + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot(y-\mu_y) + ...$$

A parciális differenciálhányadosok az $x = \mu_x$, $y = \mu_y$,... helyen értendők. A lineáris sorfejtés a várható értékektől való kis eltérések esetén jó közelítés.
Először határozzuk meg ϕ várható értékét. Alkalmazva az összeg és konstansszoros várható értékére vonatkozó összefüggéseket (azaz hogy $E[a+b] = E[a]+E[b]$ és $E[c\cdot a] = c\cdot E[a]$) :

$$E[\phi(x,y,..)] = E[\phi(\mu_x,\mu_y,...)] + \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot E[x-\mu_x] + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot E[y-\mu_y] + ... = \phi(\mu_x,\mu_y,...)\ ,$$

mivel $E[x-\mu_x] = E[y-\mu_y] = 0$ és $E[\phi(\mu_x,\mu_y,...)] = \phi(\mu_x,\mu_y,...)$.

Most határozzuk meg ϕ varianciáját a fenti közelítés alapján. Alkalmazva az összeg és konstansszoros varianciájára vonatkozó összefüggéseket (azaz hogy $Var[a+b] = Var[a]+Var[b]$ és $Var[c\cdot a] = c^2\cdot Var[a]$) :

$$Var[\phi] = Var[\phi(\mu_x,\mu_y,...)] + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\cdot Var[x] + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\cdot Var[y] + ... = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\cdot Var[x] + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\cdot Var[y] + ...\ ,$$

mivel $Var[\phi(\mu_x,\mu_y,...)] = 0$.

A mérési eredmények alapján az x,y,... mért mennyiségek varianciáját a korrigált tapasztalati szórásuk négyzetével közelítjük, várható értéküket pedig a méréssorozatok középértékével.
Így <u>a ϕ mennyiség várható értékének becslése</u>

$$E[\phi(x,y,..)] = \phi(\bar{x},\bar{y},...)\ ,$$

és a <u>becslés ϕ középértékének korrigált tapasztalati szórására</u>:

$$s_{\bar{\phi}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 s_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 s_{\bar{y}}^2 + \dots}\ .$$

Az egyenlőség érvényes marad akkor is, ha a középértékek korrigált tapasztalati szórását beszorozzuk az adott konfidenciaszinthez tartozó t paraméterrel, azaz igaz lesz a hibaintervallumokra is. Ha Δx-szel jelöljük x hibaintervallumának sugarát, és Δy-nal y-ét, akkor a ϕ mennyiségre <u>a $\Delta\phi$ hibaintervallum sugara</u>:

$$\boxed{\Delta\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\cdot(\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\cdot(\Delta y)^2 + ...}}$$

Gyakorló feladatok

A bevezető előadáson megoldott feladat:

1.A. Van egy nagy kupac ismeretlen névleges értékű ellenállásunk. Kiveszünk belőle 6 db-ot és megmérjük azok ellenállását. A következő értékeket kapjuk:

98 Ω   100 Ω   101 Ω   99 Ω   101 Ω   101 Ω

Számoljuk ki ennek alapján az ellenállásaink névleges értékét és a hibaintervallumot 99 %-os konfidenciaszinten!

Megoldás:

A mért értékek átlaga $\overline{R} = 100\ \Omega$.

A középérték korrigált tapasztalati szórása

$$s_{\overline{R}} = \sqrt{\frac{\sum\left((98-100)^2 + (100-100)^2 + (101-100)^2 + (99-100)^2 + (101-100)^2 + (101-100)^2\right)}{6 \cdot 5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8}{30}} \approx 0{,}5164\ [\Omega]$$

A táblázatból a Student-paraméter értéke n = 6 és P = 0,99 esetén t = 4,032.

A hibaintervallum $\Delta R = t \cdot s_{\overline{R}} = 4{,}032 \cdot 0{,}5164 \approx 2{,}082\ [\Omega]$

Tehát az ellenállások értéke 99 %-os konfidenciaszinten

$R = (\ 100{,}0 \pm 2{,}1\ )\ \Omega$

Kerekítsünk!

A hibaintervallumot értelmetlen pontosabban megadni, mint az átlagértéket.

Általában a hibaintervallumot két értékes jeggyel adjuk meg, és ehhez igazítjuk a valódi érték pontosságát is.

1.B. A fenti ellenállásainkból egyet-egyet kiválasztva sorosan kapcsoljuk egy másik ellenállással, amit viszont egy $R_2 = (400 \pm 4\ )\ \Omega$-os ellenálláskupacból veszünk. Mi lesz a soros eredő értéke és hibaintervalluma?

Megoldás:

A soros eredő számítása: $R_{soros}(R_1,R_2) = R_1 + R_2$.

$\overline{R}_1 = 100\ \Omega,\quad \overline{R}_2 = 400\ \Omega,\quad \Delta R_1 = 2\ \Omega,\quad \Delta R_2 = 4\ \Omega.$

A soros eredő várható értéke $\overline{R}_{soros} = \overline{R}_1 + \overline{R}_2 = 100 + 400 = 500\ \Omega.$

Az $R_{soros}(R_1,R_2) = R_1 + R_2$ függvény parciális deriváltja R_1 ill. R_2 szerint

$$\frac{\partial\, R_{soros}}{\partial\, R_1} = \frac{\partial\, R_{soros}}{\partial\, R_2} = 1\,.$$

A soros eredő ellenállás hibaintervalluma

$$\Delta R_{soros} = \sqrt{\left(\frac{\partial\, R_{soros}}{\partial\, R_1}\right)^2 \cdot (\Delta R_1)^2 + \left(\frac{\partial\, R_{soros}}{\partial\, R_2}\right)^2 \cdot (\Delta R_2)^2} = \sqrt{1^2 \cdot 2^2 + 1^2 \cdot 4^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}472\ \Omega.$$

Tehát a soros eredő értéke az adott konfidenciaszinten az

R_{soros} = (500,0 ± 4,5) Ω

intervallumba esik.

1.B. A fenti két kupac ellenállásból (R_1=(100±2)Ω és R_2=(400±4)Ω) egyet-egyet kivéve most párhuzamos kapcsolást készítünk. Mi lesz a párhuzamos eredő értéke és hibaintervalluma?

Megoldás:

A párhuzamos eredő számítása: $R_{párh}(R_1,R_2) = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$.

$\overline{R}_1 = 100\ \Omega$, $\overline{R}_2 = 400\ \Omega$, $\Delta R_1 = 2\ \Omega$, $\Delta R_2 = 4\ \Omega$.

A párhuzamos eredő várható értéke $\overline{R}_{párh} = \dfrac{\overline{R}_1 \cdot \overline{R}_2}{\overline{R}_1 + \overline{R}_2} = \dfrac{100 \cdot 400}{100 + 400} = 80\ \Omega.$

Az $R_{párh}(R_1,R_2) = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ függvény parciális deriváltja R_1 ill. R_2 szerint

$$\frac{\partial\, R_{párh}}{\partial\, R_1} = \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1 \cdot R_2 \cdot 1}{(R_1 + R_2)^2} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)^2 \quad \text{és} \quad \frac{\partial\, R_{párh}}{\partial\, R_2} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)^2.$$

Ezek értéke $\overline{R}_1 = 100\ \Omega$ és $\overline{R}_2 = 400\ \Omega$ behelyettesítésével

$$\frac{\partial\, R_{párh}}{\partial\, R_1} = \left(\frac{400}{100 + 400}\right)^2 = 0{,}64 \quad \text{és} \quad \frac{\partial\, R_{párh}}{\partial\, R_2} = \left(\frac{100}{100 + 400}\right)^2 = 0{,}04\,.$$

A párhuzamos eredő ellenállás hibaintervalluma

$$\Delta R_{soros} = \sqrt{\left(\frac{\partial\, R_{párh}}{\partial\, R_1}\right)^2 \cdot (\Delta R_1)^2 + \left(\frac{\partial\, R_{párh}}{\partial\, R_2}\right)^2 \cdot (\Delta R_2)^2} = \sqrt{0{,}64^2 \cdot 2^2 + 0{,}04^2 \cdot 4^2} \approx 1{,}29\ \Omega.$$

Tehát a párhuzamos eredő értéke az adott konfidenciaszinten az

$R_{párh}$ = (80,0 ± 1,3) Ω

intervallumba esik.

További megoldott gyakorló feladatok:

1. Egy folyadék sűrűségét szeretnénk meghatározni. Kitöltünk belőle valamennyit egy főzőpohárba és megmérjük ötször a folyadék magasságát a pohárban; a mért értékek:

3,8 cm   3,6 cm   3,8 cm   3,8 cm   4,0 cm

a. Adjuk meg a folyadékoszlop magasságát és annak hibáját 80%-os konfidenciaszinten!

b. Számoljuk ki a folyadék sűrűségét és becsüljük meg a hibáját, ha a főzőpohár belső átmérője d = 5,2 cm, hibája 0,1 cm; a főzőpohár tömege üresen m_{fp} = 82,3 g, a folyadékkal együtt M = 151,7 g, és a tömegmérés hibája mindkét esetben 0,1 g. (A hibák mind 80%-os konfidenciaszintre vannak megadva.)

Megoldás:

1.a. $\bar{h} = \dfrac{3{,}8+3{,}6+3{,}8+3{,}8+4{,}0}{5} = 3{,}8 \text{ cm}$

$$s_{\bar{h}} = \sqrt{\frac{(3{,}8-3{,}8)^2+(3{,}6-3{,}8)^2+(3{,}8-3{,}8)^2+(3{,}8-3{,}8)^2+(4{,}0-3{,}8)^2}{5\cdot 4}} = 0{,}063$$

táblázatból t(N=5, P=0,8) = 1,553, $\Delta\bar{h} = t\cdot s_{\bar{h}}$ = 1,553·0,063 = 0,098 cm,

h = (3,8 ± 0,1) cm

b. $\rho = m/V = (M-m_{fp}) / (¼d^2\pi h)$, $\bar{\rho}$ = (151,7-82,3) / ¼·5,2²·π·3,8 ≈ 0,86 g/cm³

$$\frac{\partial\rho}{\partial M} = \frac{\partial\left[(M-m_{fp})/(¼\cdot d^2\cdot\pi\cdot h)\right]}{\partial M} = \frac{4}{d^2\cdot\pi\cdot h_1} = \frac{1}{V} \approx 0{,}0124, \qquad \Delta M = 0{,}1$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial m_{fp}} = \frac{\partial\left[(M-m_{fp})/(¼\cdot d^2\cdot\pi\cdot h)\right]}{\partial m_{fp}} = -\frac{4}{d^2\cdot\pi\cdot h_1} = -\frac{1}{V} \approx -0{,}0124, \qquad \Delta m_{fp} = 0{,}1$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial h} = \frac{\partial\left[(M-m_{fp})/(¼\cdot d^2\cdot\pi\cdot h)\right]}{\partial h} = -\frac{4(M-m_{fp})}{d^2\cdot\pi\cdot h^2} = -\frac{\rho}{h} \approx -0{,}2263, \qquad \Delta h = 0{,}1$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial d} = \frac{\partial\left[(M-m_{fp})/(¼\cdot d^2\cdot\pi\cdot h)\right]}{\partial d} = -\frac{2\cdot 4(M-m_{fp})}{d^3\cdot\pi\cdot h} = -\frac{2\rho}{d} \approx -0{,}3308, \qquad \Delta d = 0{,}1$$

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial M}\cdot\Delta M\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial m_{fp}}\cdot\Delta m_{fp}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial h}\cdot\Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial d}\cdot\Delta d\right)^2} \approx 0{,}04 \text{ g}/\text{cm}^3$$

ρ = (0,86 ± 0,04) g/cm³

2. Hatszor megmérjük egy telep elektromotoros erejét, a kapott eredmények:

12,1; 12,2; 11,9; 12,2; 11,7; 11,9 V.

a. Adjuk meg azt az intervallumot, melybe a telep elektromotoros ereje 95% valószínűséggel esik!

b. A telepet terheljük egy R ellenállással, és mérjük a terhelésen folyó I áramerősséget. (Az ampermérő belső ellenállása elhanyagolható.) Szintén 95%-os konfidenciaszintnél

R = (40,0 ± 0,5) Ω, I = (0,250± 0,005) A.

Határozzuk meg a fentiekből a telep R_b belső ellenállását és R_b hibáját!

Megoldás:

2.a. $\bar{E} = \dfrac{12{,}1+12{,}2+11{,}9+12{,}2+11{,}7+11{,}9}{6} = 12{,}0 \text{ V}$

$$s_{\bar{E}} = \sqrt{\frac{(12{,}1-12{,}0)^2+(12{,}2-12{,}0)^2+(11{,}9-12{,}0)^2+(12{,}2-12{,}0)^2+(11{,}7-12{,}0)^2+(11{,}9-12{,}0)^2}{6\cdot 5}} = 0{,}08165$$

táblázatból t(N=6, P=0,95) = 2,571, $\Delta\bar{E} = t\cdot s_{\bar{E}}$ = 2,571·0,08165 ≈ 0,21 V,

E = (12,0 ± 0,2) V

b. $R_b = E/I - R$, $\overline{R_b} = 12/0{,}25 - 40 = 8\ \Omega$

$$\frac{\partial R_b}{\partial E} = \frac{\partial (E/I - R)}{\partial E} = \frac{1}{I} = \frac{1}{0{,}25} = 4, \qquad \Delta E = 0{,}2$$

$$\frac{\partial R_b}{\partial I} = \frac{\partial (E/I - R)}{\partial I} = -\frac{E}{I^2} = -\frac{12}{0{,}25^2} = -192, \qquad \Delta I = 0{,}005$$

$$\frac{\partial R_b}{\partial R} = \frac{\partial (E/I - R)}{\partial R} = -1, \qquad \Delta R = 0{,}5$$

$$\Delta R_b = \sqrt{\left(\frac{\partial R_b}{\partial E}\cdot \Delta E\right)^2 + \left(\frac{\partial R_b}{\partial I}\cdot \Delta I\right)^2 + \left(\frac{\partial R_b}{\partial R}\cdot \Delta R\right)^2} = \sqrt{(4\cdot 0{,}2)^2 + (192\cdot 0{,}005)^2 + 0{,}5^2} \approx 1{,}346\ \Omega$$

$R_b = (8\pm1)\ \Omega$ vagy $R_b = (8{,}0\pm1{,}3)\ \Omega$

3. Két ponttöltés, Q_1 és Q_2 között ható Coulomb-erő nagyságát megmértük ötször:

1,81 N 1,78 N 1,79 N 1,82 N 1,80 N

a. Adjuk meg az erő nagyságát és hibáját 95 %-os konfidenciaszinten!

A Q_1 töltés az origóban van, nagysága $Q_1 = (22{,}0\pm0{,}2)\ \mu C$. A Q_2 töltés koordinátái:
x = 1,20 m, y = 1,80 m, z = 0,40 m, a koordináták meghatározásának hibája 0,01 m
(csak Q_2 esetén, Q_1 pontosan az origóban van).
A hibák mind 95 %-os konfidenciaszintre vannak megadva.

b. Határozzuk meg a Q_2 töltés nagyságát és hibáját! ($k = 9\cdot10^9\ Nm^2/C^2$)

Megoldás:

3.a. $\overline{F} = \frac{1{,}81 + 1{,}78 + 1{,}79 + 1{,}82 + 1{,}80}{5} = 1{,}80\ N$

$$s_{\overline{F}} = \sqrt{\frac{(1{,}81-1{,}80)^2 + (1{,}78-1{,}80)^2 + (1{,}79-1{,}80)^2 + (1{,}82-1{,}80)^2 + (1{,}80-1{,}80)^2}{5\cdot 4}} = 0{,}00707$$

táblázatból t(N=5, P=0,95) = 2,776, $\Delta\overline{F} = t\cdot s_{\overline{F}}$ = 2,776·0,00707 = <u>0,0196 N</u>,

<u>F = (1,80 ± 0,02) N</u>

b. $Q_2 = F(x^2+y^2+z^2)/(k\cdot Q_1)$, $\overline{Q_2} = 1{,}8(1{,}2^2+1{,}8^2+0{,}4^2)/(9\cdot10^9\cdot22\cdot10^{-6}) = 44\ \mu C$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial F} = \frac{\partial\left[F(x^2+y^2+z^2)/(k\cdot Q_1)\right]}{\partial F} = \frac{x^2+y^2+z^2}{k\cdot Q_1} = \frac{Q_2}{F} = 2{,}44\cdot10^{-5}, \quad \Delta F = 0{,}02$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x} = \frac{\partial\left[F(x^2+y^2+z^2)/(k\cdot Q_1)\right]}{\partial x} = \frac{F\cdot 2x}{k\cdot Q_1} = 2{,}18\cdot10^{-5}, \qquad \Delta x = 0{,}01$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial y} = \frac{\partial\left[F(x^2+y^2+z^2)/(k\cdot Q_1)\right]}{\partial y} = \frac{F\cdot 2y}{k\cdot Q_1} = 3{,}27\cdot10^{-5}, \qquad \Delta y = 0{,}01$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial z} = \frac{\partial\left[F(x^2+y^2+z^2)/(k\cdot Q_1)\right]}{\partial z} = \frac{F\cdot 2z}{k\cdot Q_1} = 7{,}27\cdot10^{-6}, \qquad \Delta z = 0{,}01$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1} = \frac{\partial\left[F(x^2+y^2+z^2)/(k\cdot Q_1)\right]}{\partial Q_1} = -\frac{F(x^2+y^2+z^2)}{k\cdot Q_1^2} = -\frac{Q_2}{Q_1} = -2, \quad \Delta Q_1 = 2\cdot10^{-7}$$

$$\Delta Q_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial Q_2}{\partial F}\cdot\Delta F\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x}\cdot\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial z}\cdot\Delta z\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial Q_1}\cdot\Delta Q_1\right)^2} \approx 0{,}75\ \mu C$$

$Q_2 = (44{,}0\pm0{,}8)\ \mu C$