Fizika 1 – Mechanika   5. házi feladat

Egy test az

$$\mathbf{r}(t) = (2t - 3)\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + (1 - t)\,\mathbf{k} \quad [\text{m}]$$

görbe mentén mozogva megérkezik a $P_1(1; -4; -1)$ [m] pontba.

Honnan indult, ha tudjuk, hogy az

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (y^2 + 2y - 2yz - 6)\,\mathbf{i} + (2x + 2xy - 2xz)\,\mathbf{j} - 2xy\,\mathbf{k} \quad [\text{N}]$$

erő által végzett munka (a kiindulási ponttól P_1-ig) $W = 176$ J ?

Megoldás:

A P_1 ponthoz tartozó paraméterérték $t_1 = 2$ ($2t_1-3 = 1$ vagy $1-t = -1$ felhasználásával)

a) Írjuk fel az erő által végzett munkát a kiindulási P_0-hoz tartozó t_0 paraméterérték függvényben:

$x(t) = 2t-3$ $\quad$ $dx/dt = 2$

$y(t) = -4$ $\quad$ $dy/dt = 0$

$z(t) = 1-t$ $\quad$ $dz/dt = -1$

$$W = \int_{t_0}^{2} \left(((-4)^2+2\cdot(-4)-2\cdot(-4)\cdot(1-t)-6)\cdot 2 + 0 - 2\cdot(2t-3)\cdot(-4)\cdot(-1)\right)\,dt$$

$$W = \int_{t_0}^{2} (44-32t)\,dt = \left[44t-16t^2\right]_{t_0}^{2} = 16t_0^2 - 44t_0 + 24$$

Tudjuk, hogy $W = 176$ J:

$$16t_0^2 - 44t_0 + 24 = 176 \quad\rightarrow\quad t_{0,1} = -2 \text{ s} \quad \text{ill.} \quad t_{0,2} = 4{,}75 \text{ s}$$

Visszahelyettesítve az $\mathbf{r}(t)$ függvénybe: $P_{0,1}$ $(-7 , -4 , 3)$ ill. $P_{0,2}$ $(6{,}5 , -4 , -3{,}75)$.

b) Számoljuk ki $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ rotációját: látjuk, hogy $\mathbf{rot\,F} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ konzervatív.

Integrálással meg tudjuk határozni a potenciálját:

$$U(\mathbf{r}) = 2xyz - 2xy - xy^2 + 6x$$

Ebbe behelyettesítve az $\mathbf{r}(t)$ függvényt, beszorzás, összevonás után

$$U(t) = \ldots = 16\,t^2 - 44\,t + 30$$

A P_1 pontban, ahol $t_1 = 2$: $U(t_1) = 6$ J.

Az ismeretlen t_0 paraméterű P_0-tól a P_1-ig végzett munka 176 J:

$$W = U(t_0) - U(t_1) = (16\,t_0^2 - 44\,t_0 + 30) - 6 = 176 \quad\rightarrow\quad t_{0,1} = -2 \text{ s} \quad \text{ill.} \quad t_{0,2} = 4{,}75 \text{ s}$$

Ha a t paramétert időnek tekintjük, akkor csak a $t_{0,1} = -2$ s fizikailag értelmes megoldás.