8. óra

1. Egy **F** = (Ax+B) **i** + Cz^2 **j** + (Dx+E) **k** [N] erőtérben egységnyi tömegű anyagi pont mozog.

d/ Határozzuk meg a munkát az x,y síkban fekvő 'a' sugarú, origó középpontú körön végzett teljes körülfordulásra!

A megoldásban a z = 1 síkban fekvő körrel volt számolva a munka.

Az xy sík, vagyis z = 0 esetén helyesen:

d/ Az xy síkban fekvő 'a' sugarú (origó középpontú) kör paraméteres alakja: válasszuk a t paraméter értékét 0-nak a kiindulási pontban és 2π-nek a végpontban, így

az $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ komponensei $x = a\,cost$, $y = a\,sint$, $z = \cancel{1}\,0$ $\rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = -a\,sint$, $\frac{dy}{dt} = a\,cost$, $\frac{dz}{dt} = 0$;

a $\mathbf{dr}$ komponensei $dx = -a\,sint\,dt$, $dy = a\,cost\,dt$, $dz = 0$; t: $0 \rightarrow 2\pi$

$$W = \int_0^{2\pi}\{(Aacost + B)\cdot(-asint) + (C\cdot \cancel{1}0^2)\cdot(acost) + (Dacost + E)\cdot(0)\}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\{-Aa^2sint\cdot cost - Basint + \cancel{Cacost}\}\,dt = \int_0^{2\pi}\left\{-\frac{1}{2}Aa^2sin2t - Basint + \cancel{Cacost}\right\}dt =$$

$$= \left[\frac{Aa^2}{4}cos2t + Bacost + \cancel{Casint}\right]_0^{2\pi} = 0$$

vagyis zárt görbére zérus volt a munka.

f/ Az xz síkban fekvő kör $W = \oint \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dr} = \int \boldsymbol{rot\,F}\cdot\boldsymbol{dA}$ felhasználásával:

$\boldsymbol{rot\,F} = -2Cz\,\boldsymbol{i} - D\boldsymbol{j}$

Az xz sík normálvektora **i** × **k** = –**j**.

Az xz síkban fekvő kör normálvektora pozitív körüljárási irányt felvéve $\boldsymbol{dA} = -\,dA\,\boldsymbol{j}$

tehát $W = \int \boldsymbol{rot\,F}\cdot\boldsymbol{dA} = \int(-D)\cdot(-\,dA) = D\int dA = Da^2\pi$

mivel az 'a' sugarú kör területe $a^2\pi$, azaz $\int dA = a^2\pi$.

(A munka előjele a körüljárási iránytól függ, ha negatív körüljárási irányt veszünk fel, akkor $\boldsymbol{dA} = dA\,\boldsymbol{j}$ és $W = -Da^2\pi$.)

---

9. óra, impulzusmegmaradás

Ballisztikus inga (rugalmatlan ütközés): ℓ hosszú fonálon lógó M tömegű zsákba vízszintes u sebességgel belelövünk egy m tömegű testet, ami benne ragad a zsákban, és azzal együtt φ szöggel kilendül. Mekkora volt az u sebesség?

A felírt egyenletek jók, csak a megoldásban a φ szög (koszinusza) van kifejezve ismert u kezdősebesség esetére:

MO. Az ütközés tökéletesen rugalmatlan, és az ütközés során külső erő nem hat a zsák + lövedék rendszerre, tehát össz-impulzusuk állandó:

mu = (M+m) v ⇒ v = u · m/(M+m)

Innen energiamegmaradással az emelkedés magassága

½ (M+m) v^2 = (M+m) gh ⇒ h = v^2 / 2g = $u^2 \cdot m^2/[2g(M+m)^2]$

és az ehhez tartozó szög h = ℓ (1 – cosφ) ⇒ cosφ = (ℓ-h)/ℓ = 1 – h/ℓ = 1 – $u^2 \cdot m^2/[2gl(M+m)^2]$

viszont a kérdés az u volt a φ függvényében, ami

$$u = \frac{M+m}{m}\cdot\sqrt{2gl(1-cos\varphi)}\,.$$

7. házi feladat

Egy **E** = (3–2y) **i** – 2(x+yz) **j** – y^2 **k** [N/kg] alakú erőtérben egységnyi tömegű test mozog az **r** = (t^2+1) **i** + (t–1) **j** + 2t **k** [m] görbe mentén.

Mekkora munkát kell végeznünk, míg a P_0 (2,–2,–2) pontból a P_1 (2,0,2) pontba juttatjuk a testet?

MO. Az eredeti görbére számolt vonalintegrállal:

$x = t^2+1$, $y = t-1$, $z = 2t$ → $dx = 2t\,dt$, $dy = dt$, $dz = 2\,dt$

P_0-nál $t_0 = -1$, P_1-nél $t_0 = +1$.

Behelyettesítések és összevonások után

$W_{P0,P1} = \int_{-1}^{1}(-12t^2 + \cancel{10}\ 18\ t - 4)dt = -16\ \mathrm{J}$.