Tehetetlenségi nyomaték

m tömegű, a forgástengelytől l távolságra lévő tömegpont tehetetlenségi nyomatéka a rögzített tengelyre vonatkoztatva: $\Theta = m \cdot l^2$.

A tehetetlenségi nyomaték additív.

Pontrendszer tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \Sigma\,(m_i \cdot l_i^2)$,

kiterjedt test tehetetlenségi nyomatéka integrálással számítható: $\Theta = \int l^2\, dm = \int l^2\, \rho\, dV$

→ néhány fontos tehetetlenségi nyomaték:

M tömegű, homogén, állandó keresztmetszetű (vékony) ℓ hosszú rúd tehetetlenségi nyomatéka a rúdra merőleges tengelyre, ami

a rúd felezőpontján megy át: $\frac{1}{12} M\ell^2$

a rúd végpontján megy át: $\frac{1}{3} M\ell^2$

$$\begin{matrix}\text{M tömegű,} \\ \text{R sugarú}\end{matrix} \begin{Bmatrix}\text{korong, ill. tömör henger} \\ \text{hengerpalást} \\ \text{gömb}\end{Bmatrix} \begin{matrix}\text{tehetetlenségi nyomatéka} \\ \text{a súlypontján átmenő tengelyre}\end{matrix} \begin{Bmatrix}\frac{1}{2} MR^2 \\ MR^2 \\ \frac{2}{5} MR^2\end{Bmatrix}$$

Steiner-tétel: párhuzamos forgástengelyeket tekintve a test tehetetlenségi nyomatéka a súlypontján átmenő tengelyre a legkisebb, és

$\Theta_P = \Theta_S + (\Sigma m_i) \cdot d^2$, ahol

Θ_S az S súlyponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték,
Θ_P a P ponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték,
Σm_i az össztömeg,
d a két tengely távolsága.

Impulzusmomentum-tétel, -megmaradás

Az **a** vektor nyomatéka (momentuma): $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$ (**r** a helyvektor)

Impulzusmomentum: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ (régebbi zh-megoldásokban **L** helyett **N** jelöli)

Forgatónyomaték: $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

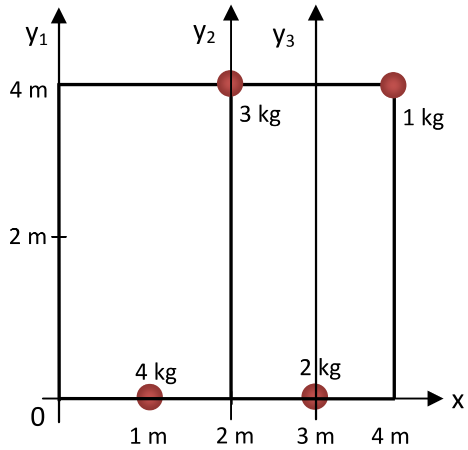
A gyakorlaton csak rögzített tengely körül elforduló/forgó testekkel és gördüléssel foglalkozunk.

Az egydimenziós haladó és a rögzített tengely körüli forgó mozgás összehasonlítása:

egydimenziós haladó mozgás	**forgómozgás rögzített tengely körül; tiszta gördülés**
m tömeg [kg]	Θ tehetetlenségi nyomaték [kg·m^2]
a gyorsulás [m/s^2]	β szöggyorsulás [s^{-2}]
v sebesség [m/s]	ω szögsebesség [s^{-1}]
x helykoordináta; ill. s megtett út [m]	φ szög, ill. -elfordulás [rad]
$ma = \Sigma F$	$\Theta\beta = M$
F erő [N]	M forgatónyomaték [N·m] rögzített tengely körül: $M = F \cdot k$, ahol k az erőkar
$p = mv$ [kg·m/s]	$L = \Theta\omega$ [kg·m^2/s]
impulzustétel: $F = \dot{p}$	impulzusmomentum-tétel: $M = \dot{L}$
impulzus-megmaradás: ha $\Sigma F_k = 0$, akkor Σp = konst.	impulzusmomentum-megmaradás: ha $\Sigma M = 0$, akkor ΣL = konst.
$E_{kin,tr} = ½\, mv^2$ [J]	$E_{kin,forg} = ½\, \Theta\omega^2$ [J]

Ha a test tisztán gördül (nem csúszik meg), akkor $a = R \cdot \beta$, $v = R \cdot \omega$, $s = R \cdot \varphi$.

10/1. Az ábrán látható 4 test egy elhanyagolható tömegű keretre van rögzítve.



a) Számoljuk ki a kerettel összefogott testek y_1, y_2, y_3 tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!
A keretet vízszintes helyzetbe fordítjuk, az y_1 forgástengelyt vízszintesen rögzítjük, majd a keretet (az x tengelyt) elengedjük (így a keret a testekkel az y_1 tengely körül forogni kezd).
b) Adjuk meg a keret szöggyorsulását a kiinduló helyzetben!
c) Adjuk meg a 4 kg-os és az 1 kg-os test gyorsulását a kiinduló helyzetben!
d) Mekkora a gravitációs erők forgatónyomatéka az y_1 tengelyre, amikor a keret a vízszintessel 30°-os szöget zár be?
e) Adjuk meg a keret szögsebességét a vízszintessel bezárt szög függvényében!

MO.

a) $\Theta_{y1} = 4\cdot1^2 + 3\cdot2^2 + 2\cdot3^2 + 1\cdot4^2 = 50 \text{ kgm}^2$
$\Theta_{y2} = 4\cdot1^2 + 3\cdot0^2 + 2\cdot1^2 + 1\cdot2^2 = 10 \text{ kgm}^2$
$\Theta_{y3} = 4\cdot2^2 + 3\cdot1^2 + 2\cdot0^2 + 1\cdot1^2 = 20 \text{ kgm}^2$

Látható, hogy az y_2 tengelyre a legkisebb a tehetetlenségi nyomaték. Számoljuk ki a tömegközéppont x koordinátáját: $x_s = (4\cdot1+3\cdot2+2\cdot3+1\cdot4)/(4+3+2+1) = 2$ m, vagyis az y_2 tengely éppen a tömegközépponton megy át. A másik két tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot számolhattuk volna ebből a Steiner-tétel alkalmazásával:

$\Theta_{y1} = \Theta_{y2} + (4+3+2+1)\cdot2^2 = 10 + 40 = 50 \text{ kgm}^2$
$\Theta_{y3} = \Theta_{y2} + (4+3+2+1)\cdot1^2 = 10 + 10 = 20 \text{ kgm}^2$
(Viszont Θ_{y1} és Θ_{y3} között nem áll fenn, hogy $\Theta_{y1} = \Theta_{y3} + (4+3+2+1)\cdot3^2$, mert egyik se x_s-en megy át.)

b) Írjuk fel az impulzusmomentum-tételt: $M = \dot{L}$,
ahol $M = \Sigma(F_i\cdot k_i)$, $F_i = m_i\cdot g$, $k_i = x_i$ $\rightarrow$ $M = \Sigma(m_i\cdot g\cdot x_i) = 4\cdot10\cdot1+3\cdot10\cdot2+2\cdot10\cdot3+1\cdot10\cdot4 = 200$ Nm;
$L = \Theta\cdot\omega$, $\Theta = \Theta_{y1} = 50 \text{ kgm}^2$, $\dot{L} = \Theta\cdot\beta$
$\rightarrow$ $M = \Theta\cdot\beta$ $\rightarrow$ $\beta_0 = \Sigma(m_i\cdot g\cdot x_i) / \Theta_{y1} = 200 / 50 = 4 \text{ s}^{-2}$.
Megjegyzés: M felírható az össztömeggel és a súlypont koordinátájával is: $M = \Sigma(m_i)\cdot g\cdot x_s = 10\cdot10\cdot2 = 200$ Nm.

c) Az egyes pontok gyorsulása $a = l\cdot\beta$, ahol l a távolság a forgástengelytől:
a 4 kg-os testre $a_4 = 1\cdot4 = 4 \text{ m/s}^2$, az 1 kg-os testre $a_1 = 4\cdot4 = 16 \text{ m/s}^2$ (ami nagyobb g-nél!)

d) Az erőkar most $k_i = x_i \cdot \cos30°$
$\rightarrow$ $M = \Sigma(m_i\cdot g\cdot x_i\cdot\cos\varphi) = \Sigma(m_i\cdot x_i)\cdot g\cdot\cos\varphi = (4\cdot1+3\cdot2+2\cdot3+1\cdot4)\cdot g\cdot\cos30° = 200\cdot\cos30° \approx 173{,}2$ Nm.

e) Energia-megmaradással, az egyes tömegpontok helyzeti energiájának változásából, az induló helyzet vízszintes síkjának magasságát tekintve a helyzeti energia zérus pontjának:

$$0 = -\Sigma(m_i\cdot g\cdot x_i\cdot\sin\varphi) + \tfrac{1}{2}\,\Theta_{y1}\,\omega^2 = -\Sigma(m_i\cdot x_i)\cdot g\cdot\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\,\Theta_{y1}\,\omega^2 \;\rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{2\Sigma(m_i x_i)g}{\Theta_{y1}}\sin\varphi} = \sqrt{2\beta_0\sin\varphi} = \sqrt{8\sin\varphi}\ \text{s}^{-1}$$

10/2. Függőlegesen fellógatott M tömegű, ℓ hosszúságú homogén rúd alsó pontjához vízszintes v sebességgel érkezve hozzátapad egy m tömegű golyó.
a) Mekkora szögsebességgel indul a rúd a hozzátapadt golyóval?
b) Maximum mekkora szöggel lendül ki?

MO.

a) Ütközés után a rúd a hozzátapadt golyóval a rúd rögzítési pontja – mint rögzített tengely – körül forgó mozgásba kezd. Az ütközésnél az impulzus nem marad meg, mert az ütközés pillanatában a merev rúd közvetítésével a rögzítési pontban fellép egy erő (ellentétben a matematikai ingával, ahol a kötél nem közvetít erőt a rögzítési ponthoz), vagyis a rúd + golyó rendszerre ható külső erők eredője nem zérus. Viszont a külső erők forgatónyomatéka a rögzítési pontra az ütközés pillanatában zérus, így a rúd + golyó rendszernek a forgástengelyre vonatkoztatott impulzusmomentuma az ütközés előtt ill. után megegyezik: csak a nagyságokat felírva

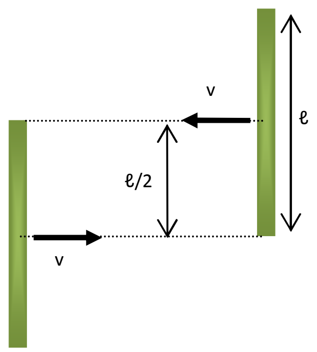
– ütközés előtt a golyó impulzusa $p = mv$, ennek momentuma a forgástengelyre $L = mv\cdot\ell$ (a rúd impulzusmomentuma pedig zérus),
– ütközés után a rúd + golyó rendszer impulzusmomentuma $L = \Theta\omega$, ahol $\Theta = 1/3\, M\ell^2 + m\ell^2$,

tehát $mv\cdot\ell = (1/3\, M\ell^2 + m\ell^2)\,\omega \quad\Rightarrow\quad \omega = m/(M/3+m)\cdot v/\ell$.
(A golyó a rúd végére tapadva $\omega\cdot\ell = m/(M/3+m)\cdot v$ sebességgel indul, vagyis $m/(M/3+m)$ -ed részére lassul.)

b) Mivel a rúd súrlódásmentesen fordul, energia-megmaradással számíthatjuk, milyen magasra lendül ki:
$\Delta E_{kin,forg} = \Delta E_{pot}$: $\frac{1}{2}\Theta\omega^2 = Mg\cdot\ell/2\cdot(1-\cos\alpha) + mg\cdot\ell\cdot(1-\cos\alpha)$, ahol
$\frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2}(1/3\, M\ell^2 + m\ell^2)\cdot[m/(1/3\, M + m)\cdot v/\ell]^2 = \frac{1}{2}mv^2\cdot m/(M/3+m)$
[Vegyük észre, hogy az ütközés utáni $\frac{1}{2}\Theta\omega^2$ forgási kinetikus energia kisebb, mint az ütközés előtti $\frac{1}{2}mv^2$ kinetikus energia, mert az ütközés rugalmatlan.]
Tehát $\frac{1}{2}mv^2\cdot m/(M/3+m) = (M/2 + m)\cdot g\cdot\ell\cdot(1-\cos\alpha)$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = 1 - \frac{m^2}{2\left(\frac{M}{3}+m\right)\cdot\left(\frac{M}{2}+m\right)}\frac{v^2}{g\ell}$$

10/3. Két homogén, m tömegű, ℓ hosszú pálca v sebességgel közeledik egymáshoz vízszintes súrlódásmentes asztalon. A pálcák merőlegesek a sebességükre, de az ábra szerint el vannak tolódva egymáshoz képest. Ütközés után a két pálca összeragad. Hogy fognak mozogni?



MO.
Az ütközés közben a pálcákra ható külső erők ($m\mathbf{g}$ és $\mathbf{F_{ny}}$) eredője zérus, így érvényes az impulzus- és az impulzusmomentum-megmaradás is.
Az impulzus-megmaradásból következik, hogy mivel a két test tömege és sebessége egyenlő, az össz-impulzus zérus, ütközés után az összeragadt pálcák haladó mozgást nem végeznek, vagyis a tömegközéppontjuk helyben marad. A két pálca összeragadva a tömegközéppont körül fog forogni állandó szögsebességgel. A szögsebességet az impulzusmomentum-megmaradásból tudjuk kiszámolni: az ütközés előtt haladó mozgás végző pálcák impulzusának momentuma a tömegközéppontra egyenlő az összetapadt forgó test impulzusmomentumával: $2\,|\mathbf{r}\times m\mathbf{v}| = \Theta\,\omega$
Ütközés előtt $L = 2\,|\mathbf{r}\times m\mathbf{v}| = 2\cdot(mv\cdot\ell/4)$
Ütközés után az összetapadt forgó test tehetetlenségi nyomatéka:
a forgástengely a pálcát ¼ – ¾ arányban osztja, egy pálca tehetetlenségi nyomatéka erre a pontra Steiner-tétellel számolható: a súlyponton, vagyis a rúd felénél átmenő tengelyre $\Theta_S = \frac{1}{12}m\ell^2$, ehhez képest ℓ/4 távolságra van a forgástengely: $\Theta_P = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\cdot\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}m\ell^2$, a két pálcára $\Theta = \frac{7}{24}m\ell^2$.
VAGY integrálással: $\Theta = 2\int_{-\ell/4}^{3\ell/4} x^2\,\rho\,A\,dx = 2\int_{-\ell/4}^{3\ell/4} x^2\,\frac{m}{A\ell}\,A\,dx = 2\frac{m}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\ell/4}^{3\ell/4} = \frac{7}{24}m\ell^2$.
Behelyettesítve $2\cdot\left(mv\cdot\frac{\ell}{4}\right) = \frac{7}{24}m\ell^2\cdot\omega \quad\rightarrow\quad \omega = \frac{12\,v}{7\,\ell}$.

10/4. M tömegű, R sugarú csigára feltekert fonálon m tömegű teher függ a földtől h magasságban. Elengedve milyen végsebességgel érkezik le? A súrlódás elhanyagolható.
MO.
A súrlódást elhanyagolható, ezért a csiga + teher rendszerre érvényes az energia-megmaradás:
$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2$.

A csiga egy korong (henger), aminek a közepén átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték $\Theta = ½ MR^2$ (ld. az összefoglalót, ill. a 10/12. feladatot).
Ha a kötél nem csúszik meg a csigán, akkor $\omega = v/R$.
Ezeket behelyettesítve a forgási kinetikus energiába $½ \Theta\omega^2 = ½ (½ MR^2)\cdot(v/R)^2 = ½ (M/2) v^2$,
tehát $mgh = ½ mv^2 + ½ (M/2) v^2 = ½ (m + M/2) v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgh}{m+M/2}}$.

10/5.
a) Mekkora gyorsulással gördül le egy α hajlásszögű és s hosszúságú lejtőn egy R sugarú
[A] henger;
[B] golyó;
[C] hengerpalást?
b) Mekkora lesz a sebességük a lejtő alján, ha a lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül indulnak?
c) Miért térnek el ezek a sebességek a súrlódásmentesen lecsúszó test sebességétől?
MO.
a) A lejtőn legördülő testre hat az m**g** gravitációs erő, a lejtő $\mathbf{F_n}$ nyomóereje, és egy $\mathbf{F_t}$ tapadási súrlódási erő a lejtőn felfelé a test és a lejtő érintkezésénél.
Felírhatjuk
– egyrészt a tömegközéppont-tételt:
$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F_n} + \mathbf{F_t}$
→ a lejtő síkjával párhuzamosan (1) $ma = mg \sin \alpha - F_t$ (((merőlegesen: $F_n - mg \cos \alpha = 0$)))
– másrészt az impulzusmomentum-tételt:
$M = \dot{L} = \Theta\beta$
Utóbbit felírhatjuk
vagy a tömegközépponton átmenő tengelye; ekkor mivel m**g** és $\mathbf{F_n}$ átmennek a tömegközépponton, arra a pontra forgatónyomatéka csak $\mathbf{F_t}$-nek van:
(2A) $\Theta_S \beta = F_t \cdot R$, ahol Θ_S a test tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka;
vagy a test és a lejtő érintkezési pontján átmenő tengelyre; ekkor mivel $\mathbf{F_n}$ és $\mathbf{F_t}$ átmennek azon a ponton, forgatónyomatéka csak m**g**-nek van és $M = mg\cdot R\cdot\sin\alpha$, tehát
(2B) $\Theta_P \beta = mg\cdot R\cdot\sin\alpha$, ahol Θ_P a test külső pontjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, ami a Steiner-tétel szerint $\Theta_P = \Theta_S + mR^2$.
Ha a test tisztán gördül (nem csúszik meg), akkor $a = R\beta$ (3).
A gyorsulást kifejezhetjük a (2B)+(3), vagy az (1)+(2A)+(3) egyenletekből: $a = \frac{g \sin\alpha}{1+\frac{\Theta_S}{m R^2}}$
[A] hengerre $\Theta_{henger} = 1/2\, mR^2 \rightarrow a_{henger} = 2/3\, g \sin\alpha$
[B] gömbre $\Theta_{gömb} = 2/5\, mR^2 \rightarrow a_{gömb} = 5/7\, g \sin\alpha$
[C] hengerpalástra $\Theta_{hengerpalást} = mR^2 \rightarrow a_{hengerpalást} = 1/2\, g \sin\alpha$
(Minél nagyobb a test tehetetlenségi nyomatéka, annál kisebb lesz a gyorsulása.)

b) A lejtő hossza s: $s = ½ at^2 \rightarrow t = \sqrt{2s/a}$ és $v = at = a\sqrt{2s/a} = \sqrt{2as}$, vagyis
[A] hengerre $v = \sqrt{\frac{4}{3} g\, s \sin\alpha}$, [B] gömbre $v = \sqrt{\frac{10}{7} g\, s \sin\alpha}$, [C] hengerpalástra $v = \sqrt{g\, s \sin\alpha}$.
($s\cdot\sin\alpha = h$, a lejtő magassága)
c) A súrlódásmentesen lecsúszó test sebessége a lejtő alján $v = \sqrt{2g\, s \sin\alpha}$ (ami belátható $\Theta = 0$ helyettesítéssel is), a gördülő testek végsebessége ennél kisebb lesz. Az energia-megmaradás mégis teljesül, mert a gördülő testeknek forgási kinetikus energiájuk is van: $E_{kin,forg} = ½ \Theta\omega^2$. Ekkor tehát $\Delta E_{mech} = \Delta E_{pot} + \Delta E_{kin,tr} + \Delta E_{kin,forg} = 0$, vagyis
$-mg \cdot s \cdot \sin\alpha + ½ mv^2 + ½ \Theta\omega^2 = 0$
Mivel a testek tisztán gördülnek, ezért $v = \omega R$.
Ellenőrizhetjük pl. a henger esetében:
$\Delta E_{pot} = -mg\cdot s\cdot\sin\alpha$; $\Delta E_{kin,tr} = ½\, m\cdot(\frac{4}{3}\, g\cdot s\cdot\sin\alpha) = \frac{2}{3}\, mg\cdot s\cdot\sin\alpha$; $\Delta E_{kin,forg} = ½\, (\frac{1}{2}mR^2)\, \frac{\frac{4}{3} g\cdot s\cdot\sin\alpha}{R^2} = \frac{1}{3}\, mg\cdot s\cdot\sin\alpha$.

Gyakorló feladatok a zh-ra

10/6. Elhanyagolható tömegű 1 m hosszú rúd két végén 5–5 kg tömegű golyók vannak felerősítve.
a) Számítsuk ki a rúd felezési pontján átmenő, a rúdra merőleges tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot!
b) Mennyivel változik a tehetetlenségi nyomaték, ha a tengelyt a rúd mentén önmagával párhuzamosan 10 cm-rel eltoljuk? Fejezzük ki az új tehetetlenségi nyomatékot az eredeti nyomaték, a tömeg és az eltolás segítségével!

MO.
a) A rúd tömege elhanyagolható, tehát csak a két golyó tehetetlenségi nyomatékát kell számolni:
$\Theta_s = \Sigma\, m_i l_i^2 = 2 \cdot (5\cdot 0{,}5^2) = 2{,}5\ \mathrm{kgm}^2$
b) Az új tengelyre $\Theta_p = 5\cdot 0{,}4^2 + 5\cdot 0{,}6^2 = 2{,}6\ \mathrm{kgm}^2$, azaz a tehetetlenségi nyomaték 0,1 kgm^2-tel nő.

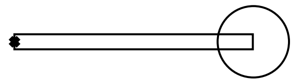
A Steiner-tétel szerint az S súlyponton átmenő tengelyt párhuzamosan a P pontba tolva az új tehetetlenségi nyomaték
$\Theta_P = \Theta_s + (\Sigma m_i)\cdot d^2$,
ahol Θ_s az S súlyponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték,
d pedig a két tengely távolsága.
Az **a)** részben kiszámolt tehetetlenségi nyomaték a rúd felezési pontján, azaz a súlyponton megy át, így a Steiner-tételt alkalmazva: $\Theta_P = \Theta_s + (\Sigma m_i)\cdot d^2 = 2{,}5 + 10\cdot 0{,}1^2 = 2{,}6\ \mathrm{kgm}^2$, azaz $(\Sigma m_i)\cdot d^2 = 0{,}1\ \mathrm{kgm}^2$-tel nőtt.

10/7. Egyik végén (súrlódásmentes) csuklóval felfogott homogén rudat vízszintes helyzetből (kezdősebesség nélkül) elengedünk.
Adjuk meg
a) a rúd szöggyorsulását,
b) a rúd tömegközéppontjának gyorsulását;
c) a rúd rögzítetlen végpontjának gyorsulását a kiindulási pillanatra!
d) Adjuk meg a rúd ω szögsebességét a vízszintessel bezárt φ szög függvényében!

MO.
a) Írjuk fel az impulzusmomentum-tételt: $\mathrm{M} = \dot{\mathrm{L}}$,
ahol $M = F\cdot k$, $F = mg$, $k = \ell/2 \cdot \cos\varphi$, ha a φ szöget a vízszintestől mérjük;
$L = \Theta\cdot\omega$, $\dot{L} = \Theta\cdot\beta$, $\Theta = \frac{1}{3}m\ell^2$
$\rightarrow$ $F\cdot k = \Theta\cdot\beta$: $mg \cdot (\ell/2\cdot\cos\varphi) = (1/3\ m\ell^2)\ \beta$,
ebből a rúd szöggyorsulása $\beta = 3/2\ g/\ell \cdot \cos\varphi$ (*)
b) A rúd tömegközéppontjának gyorsulása $a_S = \ell/2\cdot\beta = 3/4\ g \cos\varphi$.
c) A rúd rögzítetlen végpontjának gyorsulása $a = \ell\cdot\beta = 3/2\ g \cos\varphi$, ami induláskor $a = 3/2\ g > g$!
d)
A (*) differenciálegyenlet megadja a β szöggyorsulást az időfüggő φ szög függvényében:
$\beta = \ddot{\varphi} = 3/2\ g/\ell \cdot \cos\varphi$, ennek megoldása a $\varphi(t)$ függvény lenne, de
$\beta = \dot{\omega} = d\omega/dt = d\omega/d\varphi \cdot d\varphi/dt = \omega \cdot d\omega/d\varphi$ átalakítással integrálás után közvetlenül az $\omega(\varphi)$ függvényt kapjuk meg:
$\omega \cdot d\omega/d\varphi = 3/2\ g/\ell \cdot \cos\varphi$ $\rightarrow$ szeparálva $\omega\, d\omega = 3/2\ g/\ell \cdot \cos\varphi\, d\varphi$
integrálva, és felhasználva, hogy $\varphi = 0$-nál $\omega = 0$: $\omega = \sqrt{3g/(\ell\cdot\sin\varphi)}$.
VAGY:
A rúd szögsebességét a vízszintessel bezárt φ szöge függvényében megkaphatjuk energia-megmaradásból is (mivel a súrlódást, közegellenállást elhanyagolhatjuk). A rúd helyzeti energiáját a tömegközéppontjának helyzetével adjuk meg. Legyen a helyzeti energia zérus a kezdő állapotban:
$0 = -mg\cdot(\ell/2\cdot\sin\varphi) + ½\ \Theta\ \omega^2 = -mg\cdot(\ell/2\cdot\sin\varphi) + ½\cdot(1/3 m\ell^2)\ \omega^2$ $\Rightarrow$ $\omega = \sqrt{3g/(\ell\cdot\sin\varphi)}$

A megoldásban felhasznált tehetetlenségi nyomaték kiszámítása:
$\Theta = \int l^2\, dm = \int l^2\, \rho\, dV$
Az x tengely mentén O és ℓ között elhelyezkedő vékony, A keresztmetszetű rúdra dV = A dx ,
a sűrűsége ρ = m/(Aℓ), és mivel a forgástengely O-n megy át, ezért l = x, így
$\Theta = \int_0^\ell x^2\, \rho\, A\, dx = \int_0^\ell x^2\, \frac{m}{A\ell}\, A\, dx = \frac{m}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\ell = \frac{1}{3} m\ell^2$

10/8. A 0,8 m hosszú, 0,6 kg tömegű rúd végéhez egy 10 cm sugarú, 0,2 kg tömegű korongot erősítettünk az ábrán látható módon. A rúd+korong a másik végén átmenő vízszintes tengely körül súrlódásmentesen elfordulhat.



a) Hol van a rúd+korong tömegközéppontja?
b) Mekkora a rúd+korong tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkoztatva? A rúd felezőpontjára $\Theta_{rúd} = 1/12\ m\ell^2$, a korong középpontjára $\Theta_{korong} = ½\ Mr^2$.
c) Mekkora szöggyorsulással indul a rúd+korong, ha vízszintes helyzetből elengedjük?
d) Mekkora lesz a rúd+korong szögsebessége a függőleges helyzeten való áthaladáskor?

MO.
a) $x_s = (½·0,8·0,6+0,8·0,2)/(0,6+0,2) = 0,5$ m
b) $\Theta = (1/12·0,6·0,8^2+0,6·0,4^2) + (1/2·0,2·0,1^2+0,2·0,8^2) = 0,257\ kgm^2$
c) $\Theta\beta = 0,6·10·0,4 + 0,2·10·0,8 = 4$ Nm → $\beta = 15,56\ s^{-2}$
d) energia-megmaradással
$½\Theta\omega^2 = (m+M)g·x_s$ → $\omega = 5,58\ s^{-1}$

10/9. M = 5 kg tömegű, ℓ = 2,4 m hosszúságú vízszintes helyzetű vékony homogén rúd a végétől ℓ/6 távolságra átmenő vízszintes tengely körül súrlódásmentesen foroghat. A rúd tengelytől távolabbi végpontjához alulról hozzádobunk egy m = 1 kg tömegű golyót függőleges v = 15 m/s sebességgel. A golyó hozzáragad a rúdhoz; az ütközés tökéletesen rugalmatlannak tekinthető.
a) Adjuk meg az összeragadt golyó + rúd tömegközéppontjának távolságát a forgástengelytől!
b) Számoljuk ki az összeragadt golyó + rúd tehetetlenségi nyomatékát a megadott forgástengelyre vonatkoztatva! A rúd tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján átmenő, rúdra merőleges tengelyre vonatkoztatva $\Theta = 1/12\ M\ell^2$.
c) Mekkora a golyó + rúd impulzusmomentuma az ütközés után?
d) Átfordul-e a rúd a hozzáragadt golyóval a függőleges helyzeten?

MO.
a) A homogén rúd tömegközéppontja a felezőpontjában van, ami a forgástengelytől ℓ/2– ℓ/6 = ℓ/3 távolságra van, a golyó pedig 5ℓ/6 távolságban van a forgástengelytől, így a tömegközéppont
d_{tk} = [M·(ℓ/3)+m·(5ℓ/6)] / (M+m) = (5·0,8+1·2) / (5+1) = 1 m távolságra van a forgástengelytől.
b) A forgástengely ℓ/3-mal van eltolva a tömegközépponttól, ezért a rúd tehetetlenségi nyomatéka erre a tengelyre (a Steiner-tétellel számolva) $\Theta_{rúd} = \Theta_s + M·(\ell/3)^2 = (7/36)\ M\ell^2 = 5,6\ kgm^2$,
a rúd végpontjához ragadt golyóé pedig $\Theta_{golyó} = m(5\ell/6)^2 = 4\ kgm^2$,
tehát $\Theta = \Theta_{rúd} + \Theta_{golyó} = 9,6\ kgm^2$.
c) Az ütközés pillanatában a külső erők forgatónyomatéka zérus, alkalmazhatjuk az impulzusmomentum-megmaradás-tételt. Ütközés előtt a rúd nem mozog, a rúdhoz közeledő golyó impulzusának a momentuma az

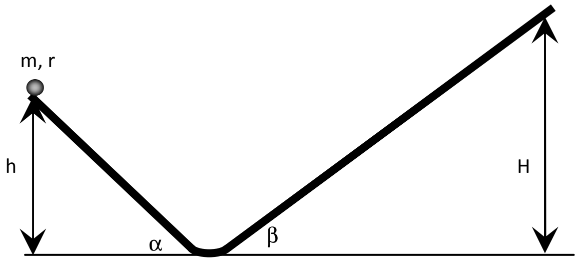
adott tengelyre vonatkoztatva pedig $L = (5\ell/6)\cdot mv = 30\ kgm^2/s$, ennyi lesz tehát az impulzusmomentum az ütközés után is.

d) Az impulzusmomentumból kiszámolhatjuk a rúd+golyó kezdeti szögsebességét:

$L = \Theta\omega \rightarrow \omega = L / \Theta = 30 / 9{,}6 = 3{,}125\ s^{-1}$.

Számoljuk ki azt, mekkora minimális kezdeti szögsebesség kell ahhoz, hogy a rúd függőleges helyzetbe forduljon. Mivel a rúd súrlódásmentesen foroghat a tengely körül, alkalmazhatjuk az energia-megmaradást: $\frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 = E_{pot}$, ahol E_{pot} a rúd+golyó helyzeti energiája a függőleges helyzetben, ami a tömegközéppont emelkedéséből számolható, tehát $\frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 = (M+m)g\cdot d_{tk}$. Ebből $\omega_0 = \sqrt{12{,}5} \approx 3{,}53\ s^{-1}$, vagyis a rúd nem jut el a függőleges helyzetbe.

10/10.



Az ábrán látható gördeszka gyakorlópálya egy $\alpha = 44°$ hajlásszögű, $h = 7$ m magas és egy $H = 10$ m magas, β hajlásszögű ellenlejtőből áll, amelyek alul ívesen csatlakoznak. A pálya tetejétől elindítunk (ahol a gömb tömegközéppontja $h = 7$ m-rel van magasabban, mint a gödör legalsó pontja) kezdősebesség nélkül egy $m = 1$ kg tömegű, $r = 10$ cm sugarú gömböt, amely csúszásmentesen gördül a lejtőn.

A gömb tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontjára vonatkoztatva $2/5\ mr^2$.

a) Mekkora a gömb tömegközéppontjának gyorsulása az induláskor?

b) Mekkora a gömb tömegközéppontjának sebessége a pálya alsó pontján való áthaladásakor?

c) Milyen magasra jut a szemközti oldalon?

d) Adjuk meg β függvényében a gömb szögsebességét az ellenlejtőn $\frac{1}{2}h = 3{,}5$ m magasan!

MO.

a) A gömb haladó mozgására: $ma = mg\cdot\sin\alpha - F_t$,

ill. a forgására, forgástengelynek a tömegközéppontot tekintve: $\Theta\beta = F_t \cdot r$,

és mivel a gömb tisztán gördül, $a = r\beta$.

Ezekből $a = g \sin\alpha / (1+\Theta/mr^2) = 5/7\ g \sin\alpha \approx 4{,}96\ m/s^2$.

b) Energia-megmaradást alkalmazva

$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2$

$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\Theta(v/r)^2 = \frac{1}{2}(1+\Theta/mr^2)\, mv^2 = \frac{1}{2}(7/5)\, mv^2$

$\rightarrow\ v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 10$ m/s.

c) Energia-megmaradást alkalmazva $mgh = mgH$, azaz ugyanolyan magasra.

d) A szögsebesség független lesz a β hajlásszögtől. Energia-megmaradást alkalmazva

$mgh = mgh' + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2$

$mgh = mgh' + \frac{1}{2}(7/5)\, m(\omega r)^2$

$\rightarrow\ \omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10}{7}g(h-h')} = 50\sqrt{2} \approx 70{,}7\ s^{-1}$.

10/11. Egy M tömegű, ℓ hosszúságú pálca egyik végét az asztalra helyezzük, majd függőleges helyzetből elengedjük. Az asztalon lévő vége nem csúszik meg. Adjuk meg a rúd szögsebességét a függőlegessel bezárt szög függvényében! Mekkora sebességgel ér az asztalra a pálca vége?

Nem zh-feladatok

10/12. Számítsuk ki egy 'R' sugarú, homogén tömegeloszlású korongnak a középpontján a korongra merőlegesen álló tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

MO. $\Theta = \int l^2\, dm = \int l^2\, \rho\, dV$

Ha M a korong tömege, akkor a sűrűsége $\rho = M/V = M/(R^2\pi d)$, ahol d a korong vastagsága.

Hengerkoordináta-rendszert használva a térfogatelem $dV = d \cdot r\, d\varphi \cdot dr$;

a térfogatelem távolsága a forgástengelytől $l = r$,

tehát $\Theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \frac{M}{R^2\pi d} \cdot d \cdot r\, d\varphi\, dr = \frac{M}{R^2\pi} \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = \frac{M}{R^2\pi} \cdot 2\pi \int_0^R r^3\, dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$

Vegyük észre, hogy a tehetetlenségi nyomaték a korong vastagságától független!

10/13. Határozzuk meg egy homogén egyenes körhenger tehetetlenségi nyomatékát
a) a szimmetriatengelyre vonatkoztatva;
b) egy alkotóra vonatkoztatva!

MO.
a) Az előző feladat eredményét felhasználhatjuk, hiszen a körhenger metszete is korong, és a korong tehetetlenségi nyomatéka nem függött a korong vastagságától, azaz a henger magasságától, vagyis
$\Theta_s = ½\, MR^2$.
b) A Steiner-tételt használhatjuk. A két tengely távolsága R, tehát
$\Theta_P = \Theta_s + MR^2 = ½\, MR^2 + MR^2 = 3/2\, MR^2$.

10/14. Számítsuk ki egy R sugarú félgömb szimmetriatengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

MO.
M tömegű félgömb sűrűsége $\rho = M/V = M/(2R^3\pi/3) = 3M/(2R^3\pi)$.
A félgömböt összerakhatjuk a forgástengelyre merőleges korongokból, melyek

sugara $r = \sqrt{R^2 - x^2}$,
térfogata $dV = r^2\pi\, dx = (R^2-x^2)\pi\, dx$,
tömege $dm = \rho\, dV = 3M/(2R^3\pi) \cdot (R^2-x^2)\pi\, dx = 3M/(2R^3) \cdot (R^2-x^2)\, dx$,
tehetetlenségi nyomatéka

$$d\Theta = ½\, dm\, r^2 = ½\, [3M/(2R^3) \cdot (R^2-x^2)\, dx] \cdot (R^2-x^2) = 3M/(4R^3) \cdot (R^2-x^2)^2\, dx$$

A félgömbre tehát $\Theta = \int d\Theta = \int_0^R \frac{3M}{4R^3} \left(R^2 - x^2\right)^2 dx = \ldots = \frac{2}{5} MR^2$

10/15. Egy M tömegű, R sugarú korongot leteszünk vízszintes síkra úgy, hogy egy helyben ω_0 szögsebességgel pörög. Mit fog csinálni, ha a síkkal való érintkezési pontjánál F_s súrlódási erő lép fel?

MO.

Az F_s súrlódási erő a korong forgását fékezi (1), de ezzel a haladó mozgását gyorsítja (2), tehát

(1) $\Theta\beta = -F_s \cdot R$, ahol $\Theta = ½\, MR^2$

(2) $Ma = F_s$, $F_s = \mu Mg \Rightarrow a = \mu g$

Mivel a korong most nem gördül, ezért most nem igaz, hogy $a = \beta R$!

A fentiekből $½\, MR^2 \cdot \beta = -\mu Mg \cdot R \quad \Rightarrow \quad \beta = -2\mu g/R$

$\Rightarrow$ a szögsebesség az idő függvényében $\omega(t) = \omega_0 + \beta\, t = \omega_0 - 2\mu g/R \cdot t$

$\Rightarrow$ a korong sebessége az idő függvényében $v(t) = at = \mu gt$

Attól a pillanattól kezdve, amikor $v(t) = R\, \omega(t)$ teljesül, a korong tisztán gördülni fog:

$R \cdot (\omega_0 - 2\mu g/R \cdot t) = \mu gt \quad \Rightarrow \quad t = R\omega_0 / 3\mu g$

10/16. Egy M tömegű, R sugarú korongot meglökünk v_0 kezdősebességgel vízszintes síkon úgy, hogy forgás nélkül tisztán csúszik. Mikortól fog tisztán gördülni?

MO.

A korongnak a síkkal való érintkezési pontjánál fellépő F_s súrlódási erő a haladó mozgást fékezi (1) , de a korong forgását gyorsítja (2).

(1) $Ma = -F_s$, $F_s = \mu Mg \Rightarrow a = -\mu g$

(2) $\Theta\beta = F_s \cdot R$, ahol $\Theta = ½\, MR^2$ (most nem igaz, hogy $a = \beta R$!)

$\Rightarrow$ a korong sebessége az idő függvényében $v(t) = v_0 - at = v_0 - \mu gt$

$\Rightarrow$ a szögsebesség az idő függvényében $\omega(t) = \beta t = 2\mu g/R \cdot t$

Attól a pillanattól kezdve, amikor $v(t) = R\, \omega(t)$ teljesül, a korong tisztán gördülni fog:

$2\mu g \cdot t = v_0 - \mu gt \quad \Rightarrow \quad t = v_0 / 3\mu g$

10/17. Mennyezethez rögzített M_1 tömegű állócsigán átvetett kötél egyik oldalán a végéhez rögzítve m tömegű test lóg, a másik oldalon pedig egy M_2 tömegű csiga, amin átvezetjük a kötelet és a kötélnek az a vége az M_1 tömegű csiga középpontjához van rögzítve.

Mekkora az m tömegű test gyorsulása és mekkorák a kötélerők?

10/18. Határozzuk meg egy homogén tömegeloszlású egyenes körkúp tehetetlenségi nyomatékát a szimmetriatengelyre vonatkoztatva.

10/19. Egy a, b, c oldalú téglatest súlypontján átmenő, az oldalakkal párhuzamos tengelyekkel rendelkezik.

a) Számítsuk ki az ezekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot!

b) Tartson pl. az ’a’ oldal zérushoz. Hogyan változnak az előző tehetetlenségi nyomatékok?

c) Milyen összefüggés állítható fel közöttük?

10/20. Határozzuk meg egy homogén lemezből kivágott téglalap tehetetlenségi nyomatékát a súlyponton átmenő három tengelyre, melyek egyike merőleges a téglalap síkjára, a másik kettő pedig párhuzamos az oldalakkal!

10/21. Számítsuk ki az egyenes gúla magasságvonalával párhuzamos és az alaplap egyik csúcsán átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!