

**Tehetlenségi nyomaték**

m tömegű, a forgástengelytől l távolságra lévő tömegpont tehetlenségi nyomatéka a rögzített tengelyre vonatkoztatva:  $\Theta = m \cdot l^2$ .

A tehetlenségi nyomaték additív.

Pontrendszer tehetlenségi nyomatéka  $\Theta = \sum (m_i \cdot l_i^2)$ ,

kiterjedt test tehetlenségi nyomatéka integrálással számítható:  $\Theta = \int l^2 dm = \int l^2 \rho dV$

→ néhány fontos tehetlenségi nyomaték:

M tömegű, homogén, állandó keresztmetszetű (vékony)  $\ell$  hosszú rúd tehetlenségi nyomatéka a rúdra merőleges tengelyre, ami

a rúd felezőpontján megy át:  $\frac{1}{12} M\ell^2$

a rúd végpontján megy át:  $\frac{1}{3} M\ell^2$

$$M \text{ tömegű, } \left\{ \begin{array}{l} \text{korong, ill. tömör henger} \\ \text{hengerpalást} \\ \text{gömb} \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ a súlypontján átmenő tengelyre } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} MR^2 \\ MR^2 \\ \frac{2}{5} MR^2 \end{array} \right.$$

**Steiner-tétel:** párhuzamos forgástengelyeket tekintve a test tehetlenségi nyomatéka a súlypontján átmenő tengelyre a legkisebb, és

$$\Theta_p = \Theta_s + (\sum m_i) \cdot d^2, \text{ ahol}$$

$\Theta_s$  az S súlyponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetlenségi nyomaték,

$\Theta_p$  a P ponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetlenségi nyomaték,

$\sum m_i$  az össztömeg,

d a két tengely távolsága.

**Impulzusmomentum-tétel, -megmaradás**

Az **a** vektor nyomatéka (momentuma):  $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$  (**r** a helyvektor)

Impulzusmomentum:  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  (régembi zh-megoldásokban **L** helyett **N** jelöli)

Forgatónyomaték:  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

A gyakorlaton csak rögzített tengely körül elforduló/forgó testekkel és gördüléssel foglalkozunk.

Az egydimenziós haladó és a rögzített tengely körüli forgó mozgás összehasonlítása:

egydimenziós haladó mozgás	forgómozgás rögzített tengely körül; tiszta gördülés
m tömeg [kg]	$\Theta$ tehetlenségi nyomaték [kg·m <sup>2</sup> ]
a gyorsulás [m/s <sup>2</sup> ]	$\beta$ szöggyorsulás [s <sup>-2</sup> ]
v sebesség [m/s]	$\omega$ szögsebesség [s <sup>-1</sup> ]
x helykoordináta; ill. s megtett út [m]	$\varphi$ szög, ill. -elfordulás [rad]
ma = $\sum F$	$\Theta\beta = M$
F erő [N]	M forgatónyomaték [N·m] rögzített tengely körül: $M = F \cdot k$ , ahol k az erőkar
p = mv [kg·m/s]	$L = \Theta\omega$ [kg·m <sup>2</sup> /s]
impulzustétel: F = $\dot{p}$	impulzusmomentum-tétel: M = $\dot{L}$
impulzus-megmaradás: ha $\sum F_k = 0$ , akkor $\sum p = \text{konst.}$	impulzusmomentum-megmaradás: ha $\sum M = 0$ , akkor $\sum L = \text{konst.}$
$E_{\text{kin,tr}} = \frac{1}{2} mv^2$ [J]	$E_{\text{kin,for}} = \frac{1}{2} \Theta\omega^2$ [J]

Ha a test tisztán gördül (nem csúszik meg), akkor  $a = R \cdot \beta$ ,  $v = R \cdot \omega$ ,  $s = R \cdot \varphi$ .

**10/1.** Az ábrán látható 4 test egy elhanyagolható tömegű keretre van rögzítve.

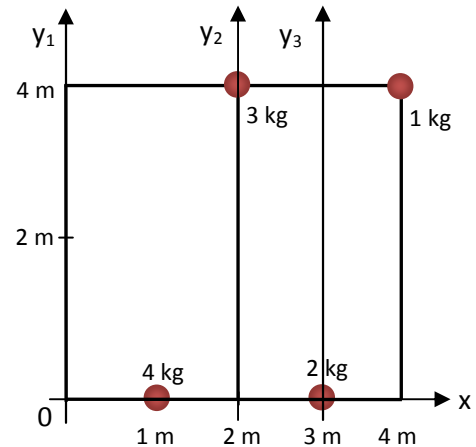
**a)** Számoljuk ki a kerettel összefogott testek  $y_1, y_2, y_3$  tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát! A keretet vízszintes helyzetbe fordítjuk, az  $y_1$  forgástengelyt vízszintesen rögzítjük, majd a keretet (az  $x$  tengelyt) elengedjük (így a keret a testekkel az  $y_1$  tengely körül forogni kezd).

**b)** Adjuk meg a keret szöggyorsulását a kiinduló helyzetben!

**c)** Adjuk meg a 4 kg-os és az 1 kg-os test gyorsulását a kiinduló helyzetben!

**d)** Mekkora a gravitációs erők forgatónyomatéka az  $y_1$  tengelyre, amikor a keret a vízszintessel  $30^\circ$ -os szöget zár be?

**e)** Adjuk meg a keret szögsebességét a vízszintessel bezárt szög függvényében!



**MO.**

**a)**  $\Theta_{y1} = 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2 = 50 \text{ kgm}^2$

$\Theta_{y2} = 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 = 10 \text{ kgm}^2$

$\Theta_{y3} = 4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0^2 + 1 \cdot 1^2 = 20 \text{ kgm}^2$

Látható, hogy az  $y_2$  tengelyre a legkisebb a tehetetlenségi nyomaték.

Számoljuk ki a tömegközéppont  $x$  koordinátáját:  $x_s = (4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4) / (4 + 3 + 2 + 1) = 2 \text{ m}$ , vagyis az  $y_2$  tengely éppen a tömegközépponton megy át. A másik két tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok számolhattuk volna ebből a Steiner-tétel alkalmazásával:  $\Theta_p = \Theta_s + (\sum m_i) \cdot d^2$

$\Theta_{y1} = \Theta_{y2} + (4 + 3 + 2 + 1) \cdot 2^2 = 10 + 40 = 50 \text{ kgm}^2$

$\Theta_{y3} = \Theta_{y2} + (4 + 3 + 2 + 1) \cdot 1^2 = 10 + 10 = 20 \text{ kgm}^2$

(Viszont  $\Theta_{y1}$  és  $\Theta_{y3}$  között nem áll fenn, hogy  $\Theta_{y1} = \Theta_{y3} + (4 + 3 + 2 + 1) \cdot 3^2$ , mert egyik se  $x_s$ -en megy át.)

**b)** Írjuk fel az impulzumomentum-tételt:  $M = \dot{L}$ ,

ahol a forgatónyomaték  $M = \sum (F_i \cdot k_i)$ ,  $F_i = m_i \cdot g$ , és vízszintes helyzetben az erőkar  $k_i = x_i \cdot \cos 0^\circ = x_i$

$\rightarrow M_0 = \sum (m_i \cdot g \cdot x_i) = 4 \cdot 10 \cdot 1 + 3 \cdot 10 \cdot 2 + 2 \cdot 10 \cdot 3 + 1 \cdot 10 \cdot 4 = 200 \text{ Nm}$ ;

$\dot{L} = \Theta \cdot \beta$ , a tehetetlenségi nyomaték a megfelelő forgástengelyre  $\Theta = \Theta_{y1} = 50 \text{ kgm}^2$

$\rightarrow M_0 = \Theta \cdot \beta_0 \rightarrow$  vízszintes helyzetben  $\beta_0 = \sum (m_i \cdot g \cdot x_i) / \Theta_{y1} = 200 / 50 = 4 \text{ s}^{-2}$ .

Megjegyzés:  $M$  felírható az össztömeggel és a súlypont koordinátájával is:  $M = \sum (m_i) \cdot g \cdot x_s = 10 \cdot 10 \cdot 2 = 200 \text{ Nm}$ .

**c)** Az egyes pontok gyorsulása  $a_i = l_i \cdot \beta$ , ahol  $l_i$  a távolság a forgástengelytől (itt most  $l_i = x_i$ ):

a 4 kg-os testre  $a_4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ m/s}^2$ , az 1 kg-os testre  $a_1 = 4 \cdot 4 = 16 \text{ m/s}^2$  (ami nagyobb  $g$ -nél!)

**d)** Az erőkar most  $k_i = x_i \cdot \cos 30^\circ$

$\rightarrow M_{30^\circ} = \sum (m_i \cdot g \cdot x_i \cdot \cos \varphi) = \sum (m_i \cdot x_i) \cdot g \cdot \cos \varphi = (4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4) \cdot g \cdot \cos 30^\circ = 200 \cdot \cos 30^\circ \approx 173,2 \text{ Nm}$ .

**e)** Energia-megmaradással:  $E_{\text{pot}} + E_{\text{kin, forg}} = E_{\text{pot}} + \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = \text{konst.}$

A helyzeti energiát az egyes tömegpontok helyzeti energiájának összegeként számoljuk, pl. az induló helyzet vízszintes síkjának magasságát tekintve a zérus pontnak:

$0 = -\sum (m_i \cdot g \cdot x_i \cdot \sin \varphi) + \frac{1}{2} \Theta_{y1} \omega^2 = -\sum (m_i \cdot x_i) \cdot g \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} \Theta_{y1} \omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \sum (m_i x_i) g}{\Theta_{y1}} \sin \varphi} = \sqrt{2 \beta_0 \sin \varphi} = \sqrt{8 \sin \varphi} \text{ s}^{-1}$

**10/2.** Függőlegesen fellógatott  $M$  tömegű,  $l$  hosszúságú homogén rúd alsó pontjához vízszintes  $v$  sebességgel érkező hozzátapad egy  $m$  tömegű golyó.

**a)** Mekkora szögsebességgel indul a rúd a hozzátapadt golyóval?

**b)** Maximum mekkora szöggel lendül ki?

**MO.**

a) Ütközés után a rúd a hozzátapadt golyóval a rúd rögzítési pontja – mint rögzített tengely – körül forgó mozgásba kezd. Az ütközésnél az impulzus nem marad meg, mert az ütközés pillanatában a merev rúd közvetítésével a rögzítési pontban fellép egy erő (ellentétben a matematikai ingával, ahol a kötélen nem közvetít erőt a rögzítési ponthoz), vagyis a rúd + golyó rendszerre ható külső erők eredője nem zérus. Viszont a külső erők forgatónyomatéka a rögzítési pontra az ütközés pillanatában zérus, így a rúd + golyó rendszernek a forgástengelyre vonatkoztatott impulzusmomentuma az ütközés előtt ill. után megegyezik. A rendszer impulzusmomentumának csak a nagyságát felírva

- ütközés előtt a golyó impulzusa  $p = mv$ , ennek momentuma a forgástengelyre  $L = mv \cdot \ell$  (a rúd impulzusmomentuma pedig zérus),
- ütközés után a rúd + golyó rendszer impulzusmomentuma  $L = \Theta \omega$ , ahol  $\Theta = \frac{1}{3} M \ell^2 + m \ell^2$ ,

$$\text{tehát } mv \cdot \ell = (\frac{1}{3} M \ell^2 + m \ell^2) \omega \Rightarrow \omega = m / (M/3 + m) \cdot v / \ell.$$

(A golyó a rúd végére tapadva  $\omega \cdot \ell = m / (M/3 + m) \cdot v$  sebességgel indul, vagyis  $m / (M/3 + m)$ -ed részére lassul.)

b) Mivel a rúd súrlódásmentesen fordul, energia-megmaradással számíthatjuk, milyen magasra lendül ki:

$$\Delta E_{\text{kin, forg}} = \Delta E_{\text{pot}}: \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = Mg \cdot \ell / 2 \cdot (1 - \cos \alpha) + mg \cdot \ell \cdot (1 - \cos \alpha), \text{ ahol}$$

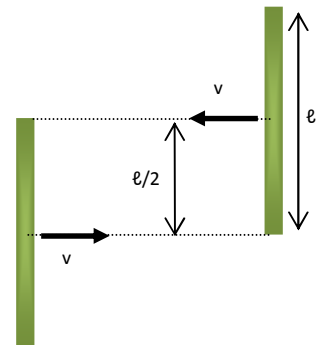
$$\frac{1}{2} \Theta \omega^2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{3} M \ell^2 + m \ell^2) \cdot [m / (\frac{1}{3} M + m) \cdot v / \ell]^2 = \frac{1}{2} m v^2 \cdot m / (M/3 + m)$$

[Vegyük észre, hogy az ütközés utáni  $\frac{1}{2} \Theta \omega^2$  forgási kinetikus energia kisebb, mint az ütközés előtti  $\frac{1}{2} m v^2$  kinetikus energia, mert az ütközés rugalmatlan.]

$$\text{Tehát } \frac{1}{2} m v^2 \cdot m / (M/3 + m) = (M/2 + m) \cdot g \cdot \ell \cdot (1 - \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{m^2}{2(\frac{M}{3} + m) \cdot (\frac{M}{2} + m)} \frac{v^2}{g \ell}$$

**10/3.** Két homogén,  $m$  tömegű,  $\ell$  hosszú pálcát  $v$  sebességgel közeledik egymáshoz vízszintes súrlódásmentes asztalon. A pálcák merőlegesek a sebességükre, de az ábra szerint el vannak tolódva egymáshoz képest. Ütközés után a két pálcát összeragad. Hogy fognak mozogni?

**MO.**

Az ütközés közben a pálcákra ható külső erők ( $mg$  és  $F_{\text{ny}}$ ) eredője zérus, így érvényes az impulzus- és az impulzusmomentum-megmaradás is.

Az impulzus-megmaradásból következik, hogy mivel a két test tömege és sebessége egyenlő, az össz-impulzus zérus, ütközés után az összeragadt pálcák haladó mozgást nem végeznek, vagyis a tömegközéppontjuk helyben marad. A két pálcát összeragadva a tömegközéppont körül fog forogni állandó szögsebességgel. A szögsebességet az impulzusmomentum-megmaradásból tudjuk kiszámolni: az ütközés előtt haladó mozgás végző pálcák impulzusának momentuma a tömegközéppontra egyenlő az összetapadt forgó test impulzusmomentumával:  $2 |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = \Theta \omega$

$$\text{Ütközés előtt } L = 2 |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = 2 \cdot (mv \cdot \ell / 4)$$

Ütközés után az összetapadt forgó test tehetetlenségi nyomatéka:

a forgástengely a pálcát  $\frac{1}{4} - \frac{3}{4}$  arányban osztja, egy pálcát tehetetlenségi nyomatéka erre a pontra Steiner-tétellel számolható: a súlyponton, vagyis a rúd felénél átmenő tengelyre  $\Theta_s = \frac{1}{12} m \ell^2$ , ehhez képest  $\ell/4$

távolságra van a forgástengely:  $\Theta_p = \frac{1}{12} m \ell^2 + m \cdot (\frac{\ell}{4})^2 = \frac{7}{48} m \ell^2$ , a két pálcára  $\Theta = \frac{7}{24} m \ell^2$ .

$$\text{VAGY integrálással: } \Theta = 2 \int_{-\ell/4}^{\ell/4} x^2 \rho A dx = 2 \int_{-\ell/4}^{\ell/4} x^2 \frac{m}{A \ell} A dx = 2 \frac{m}{\ell} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\ell/4}^{\ell/4} = \frac{7}{24} m \ell^2.$$

$$\text{Behelyettesítve } 2 \cdot (mv \cdot \frac{\ell}{4}) = \frac{7}{24} m \ell^2 \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{12 v}{7 \ell}.$$

**10/4.**  $M$  tömegű,  $R$  sugarú csigára feltekert fonálon  $m$  tömegű teher függ a földtől  $h$  magasságban. Elengedve milyen végsebességgel érkezik le? A súrlódás elhanyagolható.

**MO.**

A súrlódást elhanyagolható, ezért a csiga + teher rendszerre érvényes az energia-megmaradás:

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2.$$

A csiga egy korong (henger), aminek a közepén átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték  $\Theta = \frac{1}{2} MR^2$  (ld. az összefoglalót, ill. a 10/12. feladatot).

Ha a kötélen nem csúszik meg a csigán, akkor  $\omega = v/R$ .

Ezeket behelyettesítve a forgási kinetikus energiába  $\frac{1}{2} \Theta \omega^2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} MR^2) \cdot (v/R)^2 = \frac{1}{2} (M/2) v^2$ ,

tehát  $mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} (M/2) v^2 = \frac{1}{2} (m + M/2) v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mgh}{m+M/2}}$ .

### 10/5.

a) Mekkora gyorsulással gördül le egy  $\alpha$  hajlásszögű és  $s$  hosszúságú lejtőn egy  $R$  sugarú

[A] henger;

[B] golyó;

[C] hengerpalást?

b) Mekkora lesz a sebességük a lejtő alján, ha a lejtő tetejéről kezdősebesség nélkül indulnak?

c) Miért térnek el ezek a sebességek a súrlódásmentesen lecsúszó test sebességétől?

**MO.**

a) A lejtőn legördülő testre hat az  $mg$  gravitációs erő, a lejtő  $F_n$  nyomóereje, és egy  $F_t$  tapadási súrlódási erő a lejtőn felfelé a test és a lejtő érintkezésénél.

Felírhatjuk

– egyrészt a tömegközéppont-tételt:

$$ma = mg + F_n + F_t$$

→ a lejtő síkjával párhuzamosan (1)  $ma = mg \sin \alpha - F_t$  (((merőlegesen:  $F_n - mg \cos \alpha = 0$ )))

– másrészt az impulzusmomentum-tételt:

$$M = \dot{L} = \Theta \beta$$

Utóbbi felírhatjuk

vagy a tömegközépponton átmenő tengelyre; ekkor mivel  $mg$  és  $F_n$  átmennek a tömegközépponton, arra a pontra forgatónyomatéka csak  $F_t$ -nek van:

$$(2A) \Theta_s \beta = F_t \cdot R, \quad \text{ahol } \Theta_s \text{ a test tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka;}$$

vagy a test és a lejtő érintkezési pontján átmenő tengelyre; ekkor mivel  $F_n$  és  $F_t$  átmennek azon a ponton, forgatónyomatéka csak  $mg$ -nek van és  $M = mg \cdot R \cdot \sin \alpha$ , tehát

$$(2B) \Theta_p \beta = mg \cdot R \cdot \sin \alpha, \quad \text{ahol } \Theta_p \text{ a test külső pontjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka,}$$

ami a Steiner-tétel szerint  $\Theta_p = \Theta_s + mR^2$ .

Ha a test tisztán gördül (nem csúszik meg), akkor  $a = R\beta$  (3).

A gyorsulást kifejezhetjük a (2B)+(3), vagy az (1)+(2A)+(3) egyenletekből:  $a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{\Theta_s}{mR^2}}$

[A] hengerre  $\Theta_{\text{henger}} = \frac{1}{2} mR^2 \rightarrow a_{\text{henger}} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$

[B] gömbre  $\Theta_{\text{gömb}} = \frac{2}{5} mR^2 \rightarrow a_{\text{gömb}} = \frac{5}{7} g \sin \alpha$

[C] hengerpalástra  $\Theta_{\text{hengerpalást}} = mR^2 \rightarrow a_{\text{hengerpalást}} = \frac{1}{2} g \sin \alpha$

(Minél nagyobb a test tehetetlenségi nyomatéka, annál kisebb lesz a gyorsulása.)

b) A lejtő hossza  $s$ :  $s = \frac{1}{2} at^2 \rightarrow t = \sqrt{2s/a}$  és  $v = at = a\sqrt{2s/a} = \sqrt{2as}$ , vagyis

[A] hengerre  $v = \sqrt{\frac{4}{3} g s \sin \alpha}$ , [B] gömbre  $v = \sqrt{\frac{10}{7} g s \sin \alpha}$ , [C] hengerpalástra  $v = \sqrt{g s \sin \alpha}$ .

( $s \cdot \sin \alpha = h$ , a lejtő magassága)

c) A súrlódásmentesen lecsúszó test sebessége a lejtő alján  $v = \sqrt{2g s \sin \alpha}$  (ami belátható  $\Theta = 0$  helyettesítéssel is), a gördülő testek végsebessége ennél kisebb lesz. Az energia-megmaradás mégis teljesül, mert a gördülő testeknek forgási kinetikus energiájuk is van:  $E_{\text{kin, forg}} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$ .

Ekkor tehát  $E_{\text{mech}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin, tr}} + E_{\text{kin, forg}} = \text{konst.}$ , vagyis

$$-mg \cdot s \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = 0$$

Mivel a testek tisztán gördülnek, ezért  $v = \omega R$ .

Ellenőrizhetjük pl. a henger esetében:

$$\Delta E_{\text{pot}} = -mg \cdot s \cdot \sin \alpha; \quad \Delta E_{\text{kin, tr}} = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{4}{3} g \cdot s \cdot \sin \alpha\right) = \frac{2}{3} mg \cdot s \cdot \sin \alpha; \quad \Delta E_{\text{kin, forg}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} mR^2\right) \frac{\frac{4}{3} g \cdot s \cdot \sin \alpha}{R^2} = \frac{1}{3} mg \cdot s \cdot \sin \alpha.$$

**Gyakorló feladatok a-zh-ra. 2018-ban nem lesz benne a zh-ban! de a vizsga miatt érdemes átnézni.**

**10/6.** Elhanyagolható tömegű 1 m hosszú rúd két végén 5–5 kg tömegű golyók vannak felerősítve.

**a)** Számítsuk ki a rúd felezési pontján átmenő, a rúdra merőleges tengelyekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékokat!

**b)** Mennyivel változik a tehetetlenségi nyomaték, ha a tengelyt a rúd mentén önmagával párhuzamosan 10 cm-rel eltoljuk? Fejezzük ki az új tehetetlenségi nyomatékokat az eredeti nyomaték, a tömeg és az eltolás segítségével!

**MO.**

**a)** A rúd tömege elhanyagolható, tehát csak a két golyó tehetetlenségi nyomatékát kell számolni:

$$\Theta_s = \sum m_i l_i^2 = 2 \cdot (5 \cdot 0,5^2) = 2,5 \text{ kgm}^2$$

**b)** Az új tengelyre  $\Theta_p = 5 \cdot 0,4^2 + 5 \cdot 0,6^2 = 2,6 \text{ kgm}^2$ , azaz a tehetetlenségi nyomaték 0,1 kgm<sup>2</sup>-tel nő.

A Steiner-tétel szerint az S súlyponton átmenő tengelyt párhuzamosan a P pontba tolvá az új tehetetlenségi nyomaték

$$\Theta_p = \Theta_s + (\sum m_i) \cdot d^2,$$

ahol  $\Theta_s$  az S súlyponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték, d pedig a két tengely távolsága.

Az **a)** részben kiszámolt tehetetlenségi nyomaték a rúd felezési pontján, azaz a súlyponton megy át, így a Steiner-tételt alkalmazva:  $\Theta_p = \Theta_s + (\sum m_i) \cdot d^2 = 2,5 + 10 \cdot 0,1^2 = 2,6 \text{ kgm}^2$ , azaz  $(\sum m_i) \cdot d^2 = 0,1 \text{ kgm}^2$ -tel nőtt.

**10/7.** Egyik végén (súrlódásmentes) csuklóval felfogott homogén rudat vízszintes helyzetből (kezdősebesség nélkül) elengedünk.

Adjuk meg

**a)** a rúd szöggyorsulását,

**b)** a rúd tömegközéppontjának gyorsulását;

**c)** a rúd rögzítetlen végpontjának gyorsulását a kiindulási pillanatra!

**d)** Adjuk meg a rúd  $\omega$  szögsebességét a vízszintessel bezárt  $\varphi$  szög függvényében!

**MO.**

**a)** Írjuk fel az impulzusmomentum-tételt:  $M = \dot{L}$ ,

ahol  $M = F \cdot k$ ,  $F = mg$ ,  $k = \ell/2 \cdot \cos\varphi$ , ha a  $\varphi$  szöget a vízszintestől mérjük;

$$L = \Theta \cdot \omega, \quad \dot{L} = \Theta \cdot \beta, \quad \Theta = \frac{1}{3} m \ell^2$$

$$\rightarrow F \cdot k = \Theta \cdot \beta: \quad mg \cdot (\ell/2 \cdot \cos\varphi) = (1/3 m \ell^2) \beta,$$

$$\text{ebből a rúd szöggyorsulása} \quad \beta = 3/2 g/\ell \cdot \cos\varphi \quad (*)$$

**b)** A rúd tömegközéppontjának gyorsulása  $a_s = \ell/2 \cdot \beta = 3/4 g \cos\varphi$ .

**c)** A rúd rögzítetlen végpontjának gyorsulása  $a = \ell \cdot \beta = 3/2 g \cos\varphi$ , ami induláskor  $a = 3/2 g > g$ !

**d)**

A (\*) differenciálegyenlet megadja a  $\beta$  szöggyorsulást az időfüggő  $\varphi$  szög függvényében:

$\beta = \ddot{\varphi} = 3/2 g/\ell \cdot \cos\varphi$ , ennek megoldása a  $\varphi(t)$  függvény lenne, de

$\beta = \dot{\omega} = d\omega/dt = d\omega/d\varphi \cdot d\varphi/dt = \omega \cdot d\omega/d\varphi$  átalakítással integrálás után közvetlenül az  $\omega(\varphi)$  függvényt kapjuk meg:

$$\omega \cdot d\omega/d\varphi = 3/2 g/\ell \cdot \cos\varphi \rightarrow \text{szeparálva} \quad \omega d\omega = 3/2 g/\ell \cdot \cos\varphi d\varphi$$

integrálva, és felhasználva, hogy  $\varphi = 0$ -nál  $\omega = 0$ :  $\omega = \sqrt{3g/(\ell \cdot \sin\varphi)}$ .

VAGY:

A rúd szögsebességét a vízszintessel bezárt  $\varphi$  szöge függvényében megkaphatjuk energia-megmaradásból is (mivel a súrlódást, közegellenállást elhanyagolhatjuk). A rúd helyzeti energiáját a tömegközéppontjának helyzetével adjuk meg. Legyen a helyzeti energia zérus a kezdő állapotban:

$$0 = -mg \cdot (\ell/2 \cdot \sin\varphi) + \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = -mg \cdot (\ell/2 \cdot \sin\varphi) + \frac{1}{2} \cdot (1/3 m \ell^2) \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{3g/(\ell \cdot \sin\varphi)}$$

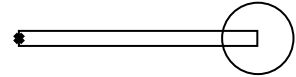
A megoldásban felhasznált tehetetlenségi nyomaték kiszámítása:

$$\Theta = \int l^2 dm = \int l^2 \rho dV$$

Az x tengely mentén 0 és  $\ell$  között elhelyezkedő vékony, A keresztmetszetű rúdra  $dV = A dx$ , a sűrűsége  $\rho = m/(A\ell)$ , és mivel a forgástengely O-n megy át, ezért  $l = x$ , így

$$\Theta = \int_0^\ell x^2 \rho A dx = \int_0^\ell x^2 \frac{m}{A\ell} A dx = \frac{m}{\ell} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^\ell = \frac{1}{3} m\ell^2$$

**10/8.** A 0,8 m hosszú, 0,6 kg tömegű rúd végéhez egy 10 cm sugarú, 0,2 kg tömegű korongot erősítettünk az ábrán látható módon. A rúd+korong a másik végén átmenő vízszintes tengely körül súrlódásmentesen elfordulhat.



- Hol van a rúd+korong tömegközéppontja?
- Mekkora a rúd+korong tehetetlenségi nyomatéka a forgástengelyre vonatkoztatva? A rúd felezőpontjára  $\Theta_{\text{rúd}} = 1/12 m\ell^2$ , a korong középpontjára  $\Theta_{\text{korong}} = \frac{1}{2} Mr^2$ .
- Mekkora szöggyorsulással indul a rúd+korong, ha vízszintes helyzetből elengedjük?
- Mekkora lesz a rúd+korong szögsebessége a függőleges helyzeten való áthaladáskor?

**MO.**

- $x_s = (\frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,2) / (0,6 + 0,2) = 0,5 \text{ m}$
- $\Theta = (1/12 \cdot 0,6 \cdot 0,8^2 + 0,6 \cdot 0,4^2) + (1/2 \cdot 0,2 \cdot 0,1^2 + 0,2 \cdot 0,8^2) = 0,257 \text{ kgm}^2$
- $\Theta\beta = 0,6 \cdot 10 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 10 \cdot 0,8 = 4 \text{ Nm} \rightarrow \beta = 15,56 \text{ s}^{-2}$
- energia-megmaradással  
 $\frac{1}{2}\Theta\omega^2 = (m+M)g \cdot x_s \rightarrow \omega = 5,58 \text{ s}^{-1}$

**10/9.**  $M = 5 \text{ kg}$  tömegű,  $\ell = 2,4 \text{ m}$  hosszúságú vízszintes helyzetű vékony homogén rúd a végétől  $\ell/6$  távolságra átmenő vízszintes tengely körül súrlódásmentesen foroghat. A rúd tengelytől távolabbi végpontjához alulról hozzádobunk egy  $m = 1 \text{ kg}$  tömegű golyót függőleges  $v = 15 \text{ m/s}$  sebességgel. A golyó hozzáragad a rúdhoz; az ütközés tökéletesen rugalmatlannak tekinthető.

- Adjuk meg az összeragadt golyó + rúd tömegközéppontjának távolságát a forgástengelytől!
- Számoljuk ki az összeragadt golyó + rúd tehetetlenségi nyomatékát a megadott forgástengelyre vonatkoztatva! A rúd tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontján átmenő, rúdra merőleges tengelyre vonatkoztatva  $\Theta = 1/12 M\ell^2$ .
- Mekkora a golyó + rúd impulzusmomentuma az ütközés után?
- Átfordul-e a rúd a hozzáragadt golyóval a függőleges helyzeten?

**MO.**

- A homogén rúd tömegközéppontja a felezőpontjában van, ami a forgástengelytől  $\ell/2 - \ell/6 = \ell/3$  távolságra van, a golyó pedig  $5\ell/6$  távolságban van a forgástengelytől, így a tömegközéppont  $d_{\text{tk}} = [M \cdot (\ell/3) + m \cdot (5\ell/6)] / (M+m) = (5 \cdot 0,8 + 1 \cdot 2) / (5+1) = 1 \text{ m}$  távolságra van a forgástengelytől.
- A forgástengely  $\ell/3$ -mal van eltolva a tömegközépponttól, ezért a rúd tehetetlenségi nyomatéka erre a tengelyre (a Steiner-tétellel számolva)  $\Theta_{\text{rúd}} = \Theta_s + M \cdot (\ell/3)^2 = (7/36) M\ell^2 = 5,6 \text{ kgm}^2$ , a rúd végpontjához ragadt golyóé pedig  $\Theta_{\text{golyó}} = m(5\ell/6)^2 = 4 \text{ kgm}^2$ , tehát  $\Theta = \Theta_{\text{rúd}} + \Theta_{\text{golyó}} = 9,6 \text{ kgm}^2$ .
- Az ütközés pillanatában a külső erők forgatónyomatéka zérus, alkalmazhatjuk az impulzusmomentum-megmaradás-tételt. Ütközés előtt a rúd nem mozog, a rúdhoz közeledő golyó impulzusának a momentuma az

adott tengelyre vonatkoztatva pedig  $L = (5\ell/6) \cdot mv = 30 \text{ kgm}^2/\text{s}$ , ennyi lesz tehát az impulzusmomentum az ütközés után is.

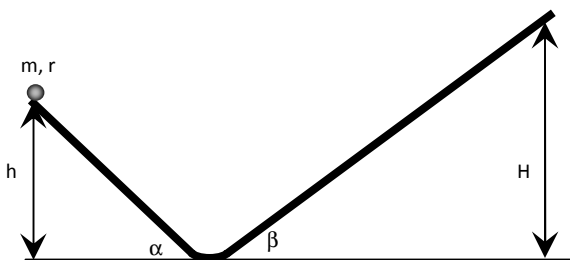
**d)** Az impulzusmomentumból kiszámolhatjuk a rúd+golyó kezdeti szögsebességét:

$$L = \Theta\omega \rightarrow \omega = L / \Theta = 30 / 9,6 = 3,125 \text{ s}^{-1}.$$

Számoljuk ki azt, mekkora minimális kezdeti szögsebesség kell ahhoz, hogy a rúd függőleges helyzetbe forduljon. Mivel a rúd súrlódásmentesen foroghat a tengely körül, alkalmazhatjuk az energia-megmaradást:

$\frac{1}{2} \Theta\omega_0^2 = E_{\text{pot}}$ , ahol  $E_{\text{pot}}$  a rúd+golyó helyzeti energiája a függőleges helyzetben, ami a tömegközéppont emelkedéséből számolható, tehát  $\frac{1}{2} \Theta\omega_0^2 = (M+m)g \cdot d_{\text{tk}}$ . Ebből  $\omega_0 = \sqrt{12,5} \approx 3,53 \text{ s}^{-1}$ , vagyis a rúd nem jut el a függőleges helyzetbe.

### 10/10.



Az ábrán látható gördeszka gyakorlópálya egy  $\alpha = 44^\circ$  hajlásszögű,  $h = 7 \text{ m}$  magas és egy  $H = 10 \text{ m}$  magas,  $\beta$  hajlásszögű ellenlejtőből áll, amelyek alul ívesen csatlakoznak. A pálya tetejétől elindítunk (ahol a gömb tömegközéppontja  $h = 7 \text{ m}$ -rel van magasabban, mint a gödör legalsó pontja) kezdősebesség nélkül egy  $m = 1 \text{ kg}$  tömegű,  $r = 10 \text{ cm}$  sugarú gömböt, amely csúszásmentesen gördül a lejtőn.

A gömb tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontjára vonatkoztatva  $\frac{2}{5} mr^2$ .

- Mekkora a gömb tömegközéppontjának gyorsulása az induláskor?
- Mekkora a gömb tömegközéppontjának sebessége a pálya alsó pontján való áthaladásakor?
- Milyen magasra jut a szemközti oldalon?
- Adjuk meg  $\beta$  függvényében a gömb szögsebességét az ellenlejtőn  $\frac{1}{2}h = 3,5 \text{ m}$  magasan!

### MO.

**a)** A gömb haladó mozgására:  $ma = mg \cdot \sin\alpha - F_t$ ,

ill. a forgására, forgástengelynek a tömegközéppontot tekintve:  $\Theta\beta = F_t \cdot r$ ,

és mivel a gömb tisztán gördül,  $a = r\beta$ .

Ezekből  $a = g \sin\alpha / (1 + \Theta/mr^2) = 5/7 g \sin\alpha \approx 4,96 \text{ m/s}^2$ .

**b)** Energia-megmaradást alkalmazva

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \Theta\omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \Theta(v/r)^2 = \frac{1}{2} (1 + \Theta/mr^2) mv^2 = \frac{1}{2} (7/5) mv^2$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 10 \text{ m/s}.$$

**c)** Energia-megmaradást alkalmazva  $mgh = mgH$ , azaz ugyanolyan magasra.

**d)** A szögsebesség független lesz a  $\beta$  hajlásszögtől. Energia-megmaradást alkalmazva

$$mgh = mgh' + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \Theta\omega^2$$

$$mgh = mgh' + \frac{1}{2} (7/5) m(\omega r)^2$$

$$\rightarrow \omega = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{10}{7}g(h-h')} = 50\sqrt{2} \approx 70,7 \text{ s}^{-1}.$$

**10/11.** Egy  $M$  tömegű,  $\ell$  hosszúságú pálca egyik végét az asztalra helyezzük, majd függőleges helyzetből elengedjük. Az asztalon lévő vége nem csúszik meg. Adjuk meg a rúd szögsebességét a függőlegessel bezárt szög függvényében! Mekkora sebességgel ér az asztalra a pálca vége?

### Nem zh-feladatok

**10/12.** Számítsuk ki egy ' $R$ ' sugarú, homogén tömegeloszlású korongnak a középpontján a korongra merőlegesen álló tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

**MO.**  $\Theta = \int l^2 dm = \int l^2 \rho dV$

Ha  $M$  a korong tömege, akkor a sűrűsége  $\rho = M/V = M/(R^2\pi d)$ , ahol  $d$  a korong vastagsága.

Hengerkoordináta-rendszert használva a térfogatelem  $dV = d \cdot r d\varphi \cdot dr$ ;

a térfogatelem távolsága a forgástengelytől  $l = r$ ,

tehát 
$$\Theta = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \frac{M}{R^2\pi d} \cdot d \cdot r d\varphi dr = \frac{M}{R^2\pi} \int_0^R r^3 \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = \frac{M}{R^2\pi} \cdot 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$$

Vegyük észre, hogy a tehetetlenségi nyomaték a korong vastagságától független!

**10/13.** Határozzuk meg egy homogén egyenes körhenger tehetetlenségi nyomatékát

a) a szimmetriatengelyre vonatkoztatva;

b) egy alkotóra vonatkoztatva!

**MO.**

a) Az előző feladat eredményét felhasználhatjuk, hiszen a körhenger metszete is korong, és a korong tehetetlenségi nyomatéka nem függött a korong vastagságától, azaz a henger magasságától, vagyis

$$\Theta_s = \frac{1}{2} MR^2.$$

b) A Steiner-tételt használhatjuk. A két tengely távolsága  $R$ , tehát

$$\Theta_p = \Theta_s + MR^2 = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2.$$

**10/14.** Számítsuk ki egy  $R$  sugarú félgömb szimmetriatengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

**MO.**

$M$  tömegű félgömb sűrűsége  $\rho = M/V = M/(2R^3\pi/3) = 3M/(2R^3\pi)$ .

A félgömböt összerakhatjuk a forgástengelyre merőleges korongokból, melyek

$$\text{sugara } r = \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$\text{térfogata } dV = r^2\pi dx = (R^2 - x^2)\pi dx,$$

$$\text{tömege } dm = \rho dV = 3M/(2R^3\pi) \cdot (R^2 - x^2)\pi dx = 3M/(2R^3) \cdot (R^2 - x^2) dx,$$

tehetetlenségi nyomatéka

$$d\Theta = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2} [3M/(2R^3) \cdot (R^2 - x^2) dx] \cdot (R^2 - x^2) = 3M/(4R^3) \cdot (R^2 - x^2)^2 dx$$

A félgömbre tehát 
$$\Theta = \int d\Theta = \int_0^R \frac{3M}{4R^3} (R^2 - x^2)^2 dx = \dots = \frac{2}{5} MR^2$$



**10/15.** Egy  $M$  tömegű,  $R$  sugarú korongot leteszünk vízszintes síkra úgy, hogy egy helyben  $\omega_0$  szögsebességgel pörög. Mit fog csinálni, ha a síkkal való érintkezési pontjánál  $F_s$  súrlódási erő lép fel?  
**MO.**

Az  $F_s$  súrlódási erő a korong forgását fékezi (1), de ezzel a haladó mozgását gyorsítja (2), tehát

$$(1) \quad \Theta\beta = -F_s \cdot R, \quad \text{ahol } \Theta = \frac{1}{2} MR^2$$

$$(2) \quad Ma = F_s, \quad F_s = \mu Mg \Rightarrow a = \mu g$$

Mivel a korong most nem gördül, ezért most nem igaz, hogy  $a = \beta R$  !

$$\text{A fentiekből } \frac{1}{2} MR^2 \cdot \beta = -\mu Mg \cdot R \Rightarrow \beta = -2\mu g/R$$

$$\Rightarrow \text{ a szögsebesség az idő függvényében } \omega(t) = \omega_0 + \beta t = \omega_0 - 2\mu g/R \cdot t$$

$$\Rightarrow \text{ a korong sebessége az idő függvényében } v(t) = at = \mu gt$$

Attól a pillanattól kezdve, amikor  $v(t) = R \omega(t)$  teljesül, a korong tisztán gördülni fog:

$$R \cdot (\omega_0 - 2\mu g/R \cdot t) = \mu gt \Rightarrow t = R\omega_0 / 3\mu g$$

**10/16.** Egy  $M$  tömegű,  $R$  sugarú korongot meglökönk  $v_0$  kezdősebességgel vízszintes síkon úgy, hogy forgás nélkül tisztán csúszik. Mikortól fog tisztán gördülni?

**MO.**

A korongnak a síkkal való érintkezési pontjánál fellépő  $F_s$  súrlódási erő a haladó mozgást fékezi (1), de a korong forgását gyorsítja (2).

$$(1) \quad Ma = -F_s, \quad F_s = \mu Mg \Rightarrow a = -\mu g$$

$$(2) \quad \Theta\beta = F_s \cdot R, \quad \text{ahol } \Theta = \frac{1}{2} MR^2 \quad (\text{most nem igaz, hogy } a = \beta R !)$$

$$\Rightarrow \text{ a korong sebessége az idő függvényében } v(t) = v_0 - at = v_0 - \mu gt$$

$$\Rightarrow \text{ a szögsebesség az idő függvényében } \omega(t) = \beta t = 2\mu g/R \cdot t$$

Attól a pillanattól kezdve, amikor  $v(t) = R \omega(t)$  teljesül, a korong tisztán gördülni fog:

$$2\mu g \cdot t = v_0 - \mu gt \Rightarrow t = v_0 / 3\mu g$$

**10/17.** Mennyezethez rögzített  $M_1$  tömegű állócsigán átvett kötél egyik oldalán a végéhez rögzítve  $m$  tömegű test lóg, a másik oldalon pedig egy  $M_2$  tömegű csiga, amin átvezetjük a kötelet és a kötélnak az a vége az  $M_1$  tömegű csiga középpontjához van rögzítve.

Mekkora az  $m$  tömegű test gyorsulása és mekkorák a kötélerők?

**10/18.** Határozzuk meg egy homogén tömegeloszlású egyenes körkúp tehetetlenségi nyomatékát a szimmetriatengelyre vonatkoztatva.

**10/19.** Egy  $a$ ,  $b$ ,  $c$  oldalú téglatest súlypontján átmenő, az oldalakkal párhuzamos tengelyekkel rendelkezik.

**a)** Számítsuk ki az ezekre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot!

**b)** Tartson pl. az 'a' oldal zérushoz. Hogyan változnak az előző tehetetlenségi nyomatékok?

**c)** Milyen összefüggés állítható fel közöttük?

**10/20.** Határozzuk meg egy homogén lemezből kivágott téglalap tehetetlenségi nyomatékát a súlyponton átmenő három tengelyre, melyek egyike merőleges a téglalap síkjára, a másik kettő pedig párhuzamos az oldalakkal!

**10/21.** Számítsuk ki az egyenes gúla magasságvonalával párhuzamos és az alaplap egyik csúcsán átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!