1/1. Egy motorcsónak a folyón felfelé halad, és szembetalálkozik egy tutajjal. A találkozás után egy órával a motor elromlik. A javítás fél órát vesz igénybe (közben a folyóval együtt sodródnak), és utána a motorcsónak a folyón – bekapcsolt motorral – lefelé megy, majd az első találkozás helyétől 7,5 km-re éri utol a tutajt.
Tételezzük fel, hogy a motorcsónak a folyóhoz képest állandó v_{cs} sebességgel halad, a tutaj pedig a folyóval együtt mozog v_f sebességgel.
Mennyi a folyó sebessége? Mennyi a csónak sebessége?

MO. A feladat azt demonstrálja, hogy a **vonatkoztatási rendszer** megfelelő választásával a megoldás menete egyszerűbb is lehet. Oldjuk meg **(1)** a parthoz rögzített, **(2)** a tutajhoz rögzített koordinátarendszerben felírva a mozgást.
(1) A koordinátarendszerünk *x* tengelyét helyezzük el a parttal párhuzamosan; origója legyen ott, ahol a motorcsónak és a tutaj először találkoznak; az *x* tengely pozitív értékei legyenek azok, amerre a folyó folyik. A folyó sebessége a <u>parthoz</u> képest v_f. A motorcsónak sebességének nagysága a <u>folyóhoz</u> képest v_{cs}, azaz a <u>parthoz</u> képest v_f+v_{cs}, ha a folyón lefelé megy, ill. $v_{cs}–v_f$, ha a folyón felfelé megy. Ezekkel kiszámolhatjuk a megtett utakat, de figyelembe kell venni azt is, milyen irányba mozgott a motorcsónak, ezért az utak helyett a motorcsónak *x* koordinátáját fogjuk felírni. (Vagyis ha felfelé megy a folyón, akkor $v_{cs}–v_f$ nagyságú sebességgel az *x* tengely negatív irányába mozog, ezért negatív lesz az elmozdulása.)
Írjuk fel a motorcsónak és a tutaj helyének x koordinátáját a második találkozásig:
motorcsónak: $–1\cdot(v_{cs} – v_f) + 0,5 \cdot v_f + t^* \cdot (v_{cs} + v_f) = 7,5\ [km]$
ahol $t^*\ [h]$ az az idő, amíg a csónak a folyón lefelé halad bekapcsolt motorral;
tutaj: $(1 + 0,5 + t) \cdot v_f = 7,5\ [km]$

<u>Megjegyzés</u>: az előjeleken nem kell gondolkoznunk, ha azt a szabályt követjük, hogy minden tagot $t\cdot(v_{cs} + v_f)$ alakban írunk fel, ahol v_f mindig pozitív (mert az *x* tengely irányát ehhez igazítottuk), v_{cs} előjele pedig pozitív ill. negatív attól függően, hogy a csónak az *x* tengely pozitív vagy negatív irányába mozog.

A 3 ismeretlenre csak 2 egyenletünk van. Átrendezve őket

$$(1 + 0,5 + t^*) \cdot v_f + (t^* – 1) \cdot v_{cs} = 7,5 + (t^* – 1) \cdot v_{cs} = 7,5 \quad \Rightarrow \quad t^* = 1\ h,\ \ v_f = 3\ km/h$$

A csónak sebessége tetszőleges lehet.
(2) Vegyünk fel egy folyóval/tutajjal együtt mozgó koordinátarendszert. Az origója legyen a tutajra rögzítve, az *x* tengely pozitív iránya mutasson arra, amerre az első órában távolodik a csónak a tutajtól. Ekkor a tutaj *x* koordinátája természetesen végig zérus, és a motorcsónak *x* koordinátáját írjuk fel a második találkozásig:

$$1 \cdot v_{cs} – t^* \cdot v_{cs} = 0$$

Ebből azonnal látható, hogy egyrészt mivel a csónak először 1 órát távolodik a tutajtól v_{cs} sebességgel és utána ugyancsak v_{cs} sebességgel közeledik hozzá, így a közeledés ideje is 1 óra, másrészt hogy a csónak sebessége tetszőleges.

1/2. A és B város vízparton helyezkednek el egymástól *d* távolságra. Egy motorcsónakkal, ami a vízhez képest v_{cs} sebességgel tud menni, elmegyünk A-ból B-be, majd vissza B-ből A-ba. Megegyezik-e az oda-vissza út ideje, ha a víz folyó, ill. tó?

MO.

Ha a víz egy folyó és A-tól B felé folyik v_f sebességgel, akkor

A-ból B-be $t_{AB} = d / (v_{cs} + v_f)$ idő alatt,

B-ből A-ba $t_{BA} = d / (v_{cs} - v_f)$ idő alatt ér a csónak,

tehát az összes idő $t_{folyó} = d/(v_{cs} + v_f) + d/(v_{cs} - v_f)$.

Ha a víz egy tó, akkor oda- ill. visszaút ideje is $t = d / v_{cs}$, tehát $t_{tó} = 2d / v_{cs}$.

A két idő hányadosa

$$\frac{t_{folyó}}{t_{tó}} = \frac{\frac{d}{v_{cs}+v_f}+\frac{d}{v_{cs}-v_f}}{\frac{2d}{v_{cs}}} = \frac{\frac{v_{cs}-v_f+v_{cs}+v_f}{v_{cs}^2-v_f^2}}{\frac{2}{v_{cs}}} = \frac{v_{cs}^2}{v_{cs}^2-v_f^2} > 1 ,$$

tehát folyóban hosszabb idő kell, mint tóban.

[Hogyhogy? mert a folyó kevesebb <u>*ideig*</u> segíti a csónakot, mint akadályozza.]

1/3. Egy katica mászkál a teraszon, ami az *x*–*y* síkban fekszik. A katica helyvektorának *x* és *y* komponense:

$$x(t) = 3A \sin \frac{2\pi}{T}t$$

$$y(t) = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

ahol $A = 1\ m$, $T = 8\ perc$.

a) Írjuk fel a katica helyvektorát az idő függvényében!

b) Adjuk meg, hol van a katica 2 perc; 4 perc; 6 perc; 8 perc; 10 perc; 15 perc; … múlva!

c) Rajzoljuk meg a katica pályáját!

MO.

a) $\boldsymbol{r}(t) = 3A\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\boldsymbol{i} + 2A\,cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{j}$

[avagy az előadás jelölésével: $\boldsymbol{r}(t) = 3A\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\boldsymbol{e_x} + 2A\,cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{e_y}$];

A és T értékét behelyettesítve

$\boldsymbol{r}(t) = 3\,sin\left(\frac{2\pi}{8}t\right)\boldsymbol{i} + 2\,cos\left(\frac{2\pi}{8}t + \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{j}$ *[m]*, ha a t időt percben mérjük, ill.

$\boldsymbol{r}(t) = 3\,sin\left(\frac{2\pi}{480}t\right)\boldsymbol{i} + 2\,cos\left(\frac{2\pi}{480}t + \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{j}$ *[m]*, ha a t időt másodpercben mérjük.

b) $\boldsymbol{r}(2) = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ [m]; $\boldsymbol{r}(4) = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$ [m]; $\boldsymbol{r}(6) = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ [m]; $\boldsymbol{r}(8) = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$ [m];
$\boldsymbol{r}(10) = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ [m]; $\boldsymbol{r}(15) = -2{,}12\boldsymbol{i} + 1{,}41\boldsymbol{j}$ [m]

c) Általánosan a pálya kifejezéséhez az *x(t)* és *y(t)* függvényekből ki kell küszöbölni a *t*-t.

Jelen esetben nem magát *t*-t, hanem $sin(2\pi t/T)$-t érdemes kifejezni:

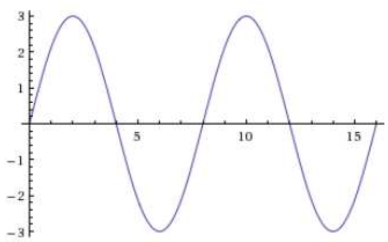
x(t)-ből $sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{x}{3A}$.

y(t)-t először átalakítjuk: $y = 2A\,cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right) = -2sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$,

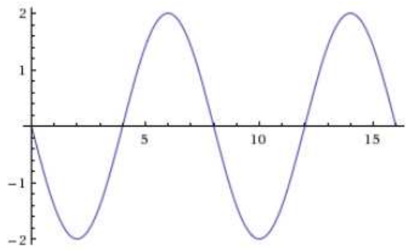
majd ebbe behelyettesítjük $sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ -t *x*-szel kifejezve:

$y = -2A \cdot \frac{x}{3A} = -\frac{2}{3}x.$

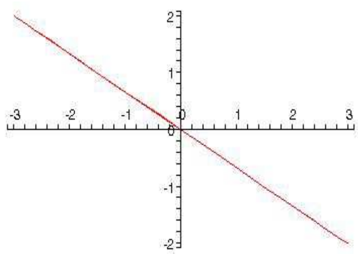
A pálya egy egyenes, de mivel *x* és *y* nem vehet fel tetszőleges értéket, ezért az *y = –2x/3* egyenesnek csak a P_1 (–3A,2A) és P_2 (3A,–2A) pontok közötti szakasza.



x – t



y – t



y – x

VEKTOROK (mely fizikai mennyiségek vektorok, melyek skalárok?)

Műveletek vektorokkal

– általánosan: szorzás skalárral; összeadás; skaláris szorzás; vektoriális szorzat.

– 3D Descartes-koordinátarendszerben

Pl. legyen $\mathbf{a} = 1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

<u>szorzás skalárral</u>: pl. $\lambda = 4$: $\lambda\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

<u>összeadás</u>: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = 5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

→ $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b}$: <u>lineáris kombináció</u>; sík egyenlete.

kivonás: $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a} + (-1)\cdot\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{b}-\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$; „megváltozás": későbbi–korábbi!

<u>skaláris szorzat</u> (2 vektorhoz egy skalárt rendel)

általánosan: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|\cdot\cos\alpha$

- <u>merőleges</u> két vektor ⇔ a skalárszorzatuk zérus
- önmagával vett skaláris szorzat → abszolút érték → egységvektor
- két vektor által <u>bezárt szög</u> számítása
- egyik vektor előjeles <u>vetülete</u> a másik irányára (fizikában: pl. munka számolásánál)
- vektor <u>felbontása</u> egy másik vektorral párhuzamos és arra merőleges <u>komponensekre</u>

Descartes-koordinátarendszerben:

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 4+10-18 = -4$

abszolút érték: $|\mathbf{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$

→ **a** irányú <u>egységvektor</u>: $\mathbf{e_a} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$

közbezárt szög: $\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|} = \frac{-4}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{77}} \approx -0{,}122$ → $\alpha \approx 97°$

vetület: pl. **b** vetülete **a** irányára: $b_a = |\mathbf{b}|\cdot\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{-4}{\sqrt{14}}$

b-nek **a**-val <u>párhuzamos</u> vektorkomponense (azaz **b** vetülete $\mathbf{e_a}$-ra):

$\mathbf{b_a} = \mathbf{b}_\parallel = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\cdot\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\cdot\mathbf{a} = -\frac{4}{\sqrt{14}^2}\cdot(1\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -\frac{2}{7}\mathbf{i} + \frac{4}{7}\mathbf{j} - \frac{6}{7}\mathbf{k}$

és **b**-nek **a**-ra <u>merőleges</u> komponense pedig $\mathbf{b}_\perp = \mathbf{b} - \mathbf{b}_\parallel = \frac{30}{7}\mathbf{i} - \frac{39}{7}\mathbf{j} - \frac{36}{7}\mathbf{k}$

(skalárszorzattal belátható, hogy $\mathbf{b}_\perp$ és **a** tényleg merőlegesek!)

<u>vektoriális szorzat</u> (2 vektorhoz egy vektort rendel)

általánosan: nagysága $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\alpha$,

iránya merőleges a két vektor által kifeszített síkra, és abba az irányba mutat, ahogy jobb kezünk középső ujja mutat, ha a hüvelykujjunk mutat **a** irányába és a mutatóujjunk **b** irányába (fizikában: pl. forgatónyomaték-vektor)

<u>párhuzamos</u> két vektor ⇔ a vektoriális szorzatuk zérus

Descartes-koordinátarendszerben:

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ = …(determináns kifejtésével)… =

$= (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k} = 27\mathbf{i} + 18\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

[belátható, hogy ez merőleges az **a** és **b** vektorok síkjára, azaz $\lambda_1\mathbf{a}+\lambda_2\mathbf{b}$ -re:
$(\lambda_1+4\lambda_2)\cdot27+(-2\lambda_1-5\lambda_2)\cdot18+(3\lambda_1-6\lambda_2)\cdot3=(27-36+9)\lambda_1+(108-90-18)\lambda_2 = 0$]

2D polár – majd…

FÜGGVÉNYEK

A függvény független / függő változója skalár / vektor : PÉLDÁK!

S → S: azaz skalártól függő skalár: pl. s(t)

S → V: azaz skalártól függő vektor: pl. helyvektor **r**(t) – térgörbe paraméteres alakban → pálya

V → S: azaz vektortól függő skalár: pl. helyzeti energia $E_{pot}(\mathbf{r})$ – szintfelületek

V → V: azaz vektortól függő vektor: pl. áramlási tér **v**(**r**) – vektorvonalak

homogén/inhomogén; stacionárius, statikus