

2/1. Egy tömegpont helyvektora az időtől a következőképpen függ:

$$\mathbf{r}(t) = (at+b) \mathbf{i} + (at-b) \mathbf{j} + (-ct^2+4at+5b) \mathbf{k},$$

$$\text{ahol } a = 3 \text{ m/s}, \quad b = 10 \text{ m}, \quad c = 5 \text{ m/s}^2.$$

- a) Milyen távol van a tömegpont az origótól a $t = 0$ időpontban?
 b) Milyen távol van a kiindulási ponttól a $t = 2$ s -ban? A test $t = 0$ -ban indult.
 c) Határozzuk meg a tömegpont sebességét és gyorsulását!
 d) Mekkora a sebessége a $t = 0$ időpontban?
 e) Mely időpontban éri el a tömegpont az x-y síkot?

MO.

a) A konstansokat behelyettesítve $\mathbf{r}(t) = (at+b) \mathbf{i} + (at-b) \mathbf{j} + (-ct^2+4at+5b) \mathbf{k}$ [m].

$t = 0$ -ban az $\mathbf{r}(0) = 10 \mathbf{i} - 10 \mathbf{j} + 50 \mathbf{k}$ [m] pontban van a test,

aminek a távolsága az origótól $d = |\mathbf{r}(0)| = r(0) = \sqrt{10^2 + 10^2 + 50^2} \approx 51,96 \text{ m}$.

b) $t = 2$ s-ban az $\mathbf{r}(2) = 16 \mathbf{i} - 4 \mathbf{j} + 54 \mathbf{k}$ [m] pontban van a test.

Az elmozdulásvektor a $t = 0$ és $t = 2$ s intervallumban

$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(2) - \mathbf{r}(0) = 6 \mathbf{i} + 6 \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}$ [m], ennek nagysága $|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 4^2} \approx 9,381 \text{ m}$.

c) $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = a \mathbf{i} + a \mathbf{j} + (-2ct+4a) \mathbf{k} = 3 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} + (-10t+12) \mathbf{k}$ [m/s]

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = -2c \mathbf{k} = -10 \mathbf{k} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

d) $\mathbf{v}(0) = 3 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} + 12 \mathbf{k}$ [m/s], nagysága $v(0) = \sqrt{3^2 + 3^2 + 12^2} \approx 12,73 \text{ m/s}$.

e) az x-y síkot akkor éri el, amikor $z = 0$, azaz

$$-5t^2 + 12t + 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 \approx 4,582 \text{ s} \quad (\text{és } t_2 \approx -2,182 \text{ s -ban is ott lett volna})$$

és még egy kérdés: (ez nem zh-feladat)

f) Bizonyítsuk be, hogy a mozgás síkmozgás! Határozzuk meg a pálya síkját!

MO. A mozgás síkmozgás, ha $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ teljesül minden t-re.

Most $x = at+b$, $y = at-b$, $z = -ct^2+4at+5b$, tehát

$$A(at+b) + B(at-b) + C(-ct^2+4at+5b) + D = (-Cc)t^2 + (Aa+Ba+Ca)t + (Ab-Bb+5Cb+D) = 0,$$

amiből $-Cc = 0$ és $Aa+Ba+Ca = 0$ és $Ab-Bb+5Cb+D = 0$.

$$-Cc = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} Aa + Ba = 0 \\ Ab - Bb + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ D = -2Ab \end{cases}$$

$A = 1$ választással a sík egyenlete: $x - y - 2b = 0$.

2/2. Egy repülőgép mozgását az

$$\mathbf{r}(t) = a \cos\left(\frac{t}{t_0}\right) \mathbf{i} + 2a \sin\left(\frac{t}{t_0}\right) \mathbf{j} \quad \text{függvény írja le,}$$

$$\text{ahol } a = 200 \text{ m}, \quad t_0 = 2 \text{ s.}$$

- a) Milyen pályán mozog a repülőgép?
 b) Mekkora szöget zár be a sebességvektor a gyorsulásvektorral a $t = 0$ és a $t = 2$ s időben?

MO. a) $x(t) = a \cos(t/t_0) = 200 \cos(t/2)$

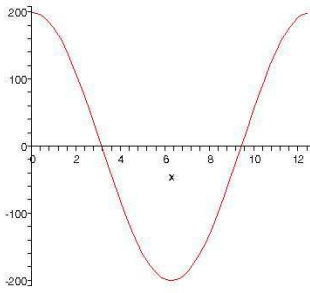
$$y(t) = 2a \sin(t/t_0) = 400 \sin(t/2)$$

Fejezzük ki az első egyenletből $\cos(t/t_0)$ -t, a másodikból $\sin(t/t_0)$ -t. Mivel

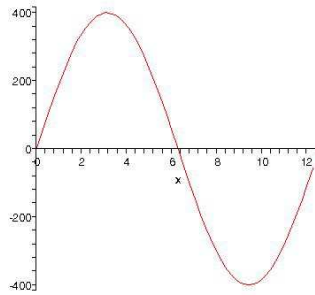
$$\left[\cos \frac{t}{t_0} \right]^2 + \left[\sin \frac{t}{t_0} \right]^2 = 1, \quad \text{ezért} \quad \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{2a} \right)^2 = \left(\frac{x}{200} \right)^2 + \left(\frac{y}{400} \right)^2 = 1,$$

azaz egy ellipszisen mozog a repülőgép (pozitív forgásirányban).

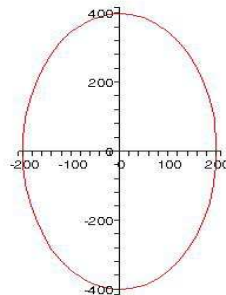
[Mivel $T/2 = 2\pi$, a periódusidő $T = 4\pi \approx 12,57$ s.]



x - t



y - t



y - x

b)

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = -a/t_0 \sin(t/t_0) \mathbf{i} + 2a/t_0 \cos(t/t_0) \mathbf{j} = -100 \sin(t/2) \mathbf{i} + 200 \cos(t/2) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = -a/t_0^2 \cos(t/t_0) \mathbf{i} - 2a/t_0^2 \sin(t/t_0) \mathbf{j} = -50 \cos(t/2) \mathbf{i} - 100 \sin(t/2) \mathbf{j}$$

$t = 0$ s-ban $\mathbf{v}(0) = 200 \mathbf{j}$ [m/s], $\mathbf{a}(0) = -50 \mathbf{i}$ [m/s²] \Rightarrow látható, hogy a két vektor merőleges.

[A test az x tengely (200, 0) pontjában van; a sebesség +y irányú, azaz előre felé mutat az ellipszis érintőjének irányában; a gyorsulás az origó felé mutat, merőleges a sebességre, vagyis ebben a pillanatban állandó nagyságú sebességgel kanyarodik.]

$$t = 2 \text{ s-ban } \mathbf{v}(2) = -100 \sin(1) \mathbf{i} + 200 \cos(1) \mathbf{j} = -84,15 \mathbf{i} + 108,1 \mathbf{j} \text{ [m/s],}$$

$$\mathbf{a}(2) = -50 \cos(1) \mathbf{i} - 100 \sin(1) \mathbf{j} = -27,02 \mathbf{i} - 84,15 \mathbf{j} \text{ [m/s}^2\text{].}$$

A két vektor által bezárt szög nagyságát skalárszorozattal számolhatjuk ki:

általánosan: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$, itt $\mathbf{v}(2) \cdot \mathbf{a}(2) = |\mathbf{v}(2)| \cdot |\mathbf{a}(2)| \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{v}(2) \cdot \mathbf{a}(2)}{|\mathbf{v}(2)| \cdot |\mathbf{a}(2)|} = \frac{(-84,15) \cdot (-27,02) + (108,1) \cdot (-84,15)}{\sqrt{84,15^2 + 108,1^2} \cdot \sqrt{27,02^2 + 84,15^2}} = \frac{-6819,7}{136,96 \cdot 88,377} = -0,5634$$

$$\Rightarrow \alpha = 2,169 \text{ rad} = 124,3^\circ$$

[$t = 2$ s-nál $\varphi = 2/2 = 1$ rad $\approx 57,3^\circ$, ekkora szöget zár be a helyvektor az x tengellyel; a sebesség érintő irányú; a gyorsulás befelé, az origó felé mutat, ami ebben a pillanatban a sebességre merőleges irányhoz képest „hátrafelé” van, vagyis ebben a pillanatban lassulva kanyarodik.]

Skalárszorozattal $t = 0$ esetében: $\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{a}(0) = 0 \Rightarrow$ merőlegesek.

2/3. Egy kipukkadt lufi sebességét az alábbi függvény adja meg:

$$\mathbf{v}(t) = 0,2 e^{0,1t} \mathbf{i} - 2,8 \sin(4t) \mathbf{j} + (3-4t) \mathbf{k} \text{ [m/s]}$$

(Az időt másodpercekben, a távolságot méterben mérjük.)

Kipukkadásakor, $t = 0$ s-ban a lufi az $\mathbf{r}_0 = 2 \mathbf{i} + 1,4 \mathbf{j} + 1,5 \mathbf{k}$ [m] pontból indult.

a) Hol lesz a lufi fél másodperc múlva?

b) A lufi egy olyan $3 \times 3 \times 3$ m-es szobában van, melynek egyik sarkához illesztettük a koordinátarendszerünket. Mikor, melyik fal (ill. plafon v. padló) melyik pontjának megy neki először?

MO. Keressük azt az $\mathbf{r}(t)$ függvényt, amire teljesül, hogy

- deriváltja a fent megadott $\mathbf{v}(t)$ függvény: $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t)$ és

- helyettesítési értéke megfelel az adott feltételnek; speciálisan $t_0 = 0$ esetén $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$.

Ezt a függvényt határozott vagy határozatlan integrállal is előállíthatjuk.

Határozott integrállal:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau) d\tau,$$

koordinátánként

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(\tau) d\tau; \quad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t v_y(\tau) d\tau; \quad z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t v_z(\tau) d\tau.$$

Esetünkben $t_0 = 0$, $x(t_0) = x(0) = x_0 = 2$ m; $y(t_0) = y(0) = y_0 = 1,4$ m; $z(t_0) = z(0) = z_0 = 1,5$ m.

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(\tau) d\tau = 2 + \int_0^t 0,2e^{0,1\tau} d\tau = 2 + 0,2 \left[\frac{e^{0,1\tau}}{0,1} \right]_0^t = 2 + 2(e^{0,1t} - 1) = 2e^{0,1t};$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t v_y(\tau) d\tau = 1,4 + \int_0^t -2,8 \sin(4\tau) d\tau = 1,4 - 2,8 \left[-\frac{\cos(4\tau)}{4} \right]_0^t =$$

$$= 1,4 + 0,7(\cos(4t) - 1) = 0,7(1 + \cos(4t));$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t v_z(\tau) d\tau = 1,5 + \int_0^t (3 - 4\tau) d\tau = 1,5 + [3\tau - 2\tau^2]_0^t = 1,5 + 3t - 2t^2;$$

azaz $\mathbf{r}(t) = 2e^{0,1t} \mathbf{i} + 0,7(1 + \cos(4t)) \mathbf{j} + (1,5 + 3t - 2t^2) \mathbf{k}$ [m].**Határozatlan integrállal:**

$$x(t) = \int v_x dt = \int 0,2e^{0,1t} dt = \frac{0,2}{0,1} e^{0,1t} + k_1 = 2e^{0,1t} + k_1$$

A k_1 konstans értékének meghatározásához az \mathbf{r}_0 vektorból kiolvassuk x_0 értékét: $x_0 = 2$; ezzel kell egyenlő legyen az $x(t)$ értéke $t=0$ -ban,amihez az $x(t)$ függvénybe $t=0$ -t helyettesítünk: $x(0) = 2e^{0,1 \cdot 0} + k_1 = 2 + k_1$ és felírjuk, hogy $x(0) = x_0$: $2 + k_1 = 2 \rightarrow k_1 = 0$, tehát $x(t) = 2e^{0,1t}$.

$$y = \int v_y dt = \int -2,8 \sin(4t) dt = \frac{2,8}{4} \cos(4t) + k_2 = 0,7 \cos(4t) + k_2,$$

a kezdeti feltételből $0,7 \cos 0 + k_2 = 0,7 + k_2 = 1,4 \rightarrow k_2 = 0,7$, tehát $y(t) = 0,7(1 + \cos(4t))$.

$$z = \int v_z dt = \int (3 - 4t) dt = (3t - 2t^2) + k_3,$$

a kezdeti feltételből $0 + k_3 = 1,5 \rightarrow k_3 = 1,5$, tehát $z(t) = 3t - 2t^2 + 1,5$.**a)** $t = 0,5$ s behelyettesítésével
 $x = 2e^{0,05} \approx 2,103$ m, $y = 0,7(1 + \cos(2)) \approx 0,4087$ m, $z = 3 \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,5^2 + 1,5 = 2,500$ m,
 tehát $\mathbf{r}(0,5) = 2,103 \mathbf{i} + 0,4087 \mathbf{j} + 2,500 \mathbf{k}$ [m].
b) A szobát határoló síkok az $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$ és $z = 3$ síkok;

azt kell megvizsgálni, melyik feltétel mikor teljesül, és a legkisebb időt kiválasztani.

$$x = 2e^{0,1t} = 0 : \text{soha}$$

$$x = 2e^{0,1t} = 3 : t_x \approx 4,055 \text{ s}$$

$$y = 0,7(1 + \cos(4t)) = 0 : t_y \approx 0,7854 \text{ s}$$

$$y = 0,7(1 + \cos(4t)) = 3 : \text{soha}$$

$$z = 3 \cdot t - 2 \cdot t^2 + 1,5 = 0 : t_z \approx 1,896 \text{ s}$$

$$z = 3 \cdot t - 2 \cdot t^2 + 1,5 = 3 : \text{soha}$$

A lufi tehát $t = 0,7854$ s-ban nekimegy az $y = 0$ egyenletű fal $x(0,7854) = 2,163$ m, $z(0,7854) = 2,622$ m pontjának.**2/4.** Egy test gyorsulása $\mathbf{a}(t) = (2t + 1) \mathbf{i} + \pi^2 \cos(3\pi t) \mathbf{j}$ [m/s²].A $t = 0$ s-ban a test sebessége $\mathbf{v}_0 = 2 \mathbf{i} + 22 \mathbf{j}$ [m/s].Mennyi lesz $t = 4$ s-ban**a)** a sebesség nagysága?**b)** a sebességvektornak az x tengellyel bezárt szöge?**c)** Hol lesz a test $t = 4$ s-ban, ha $t = 1$ s-ban $\mathbf{r}(1) = 22 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$ [m]?

MO.

Keressük azt a $\mathbf{v}(t)$ függvényt, amire teljesül, hogy

- deriváltja a fent megadott $\mathbf{a}(t)$ függvény: $\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{a}(t)$ és

- helyettesítési értéke megfelel az adott feltételnek; speciálisan $t_0 = 0$ esetén $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$.

Határozott integrállal:

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(\tau) d\tau = 2 + \int_0^t (2\tau + 1) d\tau = 2 + [\tau^2 + \tau]_0^t = 2 + t^2 + t$$

$$v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^t a_y(\tau) d\tau = 22 + \int_0^t \pi^2 \cos(3\pi\tau) d\tau = 22 + \pi^2 \left[\frac{\sin(3\pi\tau)}{3\pi} \right]_0^t = 22 + \frac{\pi}{3} \sin(3\pi t)$$

Határozatlan integrállal:

$$a_x = \dot{v}_x = 2t + 1 \rightarrow v_x(t) = t^2 + t + k_1$$

$$\text{mivel } v_x(0) = 2, \text{ így } 0^2 + 0 + k_1 = 2 \rightarrow k_1 = 2, \text{ azaz } v_x = t^2 + t + 2;$$

$$a_y = \dot{v}_y = \pi^2 \cos(3\pi t) \rightarrow v_y(t) = \pi/3 \cdot \sin(3\pi t) + k_2$$

$$\text{mivel } v_y(0) = 22, \text{ így } \pi/3 \cdot \sin(0) + k_2 = 22 \rightarrow k_2 = 22, \text{ azaz } v_y = \pi/3 \cdot \sin(3\pi t) + 22;$$

$$\text{tehát } \mathbf{v}(t) = (t^2 + t + 2) \mathbf{i} + (\pi/3 \cdot \sin(3\pi t) + 22) \mathbf{j} \text{ [m/s].}$$

$$t = 4 \text{ s-ban } \mathbf{v}(4) = (4^2 + 4 + 2) \mathbf{i} + (\pi/3 \cdot \sin(12\pi) + 22) \mathbf{j} = 22 \mathbf{i} + 22 \mathbf{j} \text{ [m/s]. Ennek}$$

a) nagysága $|\mathbf{v}(4)| = 22 \cdot \sqrt{2} \approx 31,11 \text{ m/s};$

b) az x tengellyel – azaz az \mathbf{i} egységvektorral – bezárt szöge:

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{v}(4) \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{v}(4)| \cdot 1} = \frac{22 \cdot 1 + 22 \cdot 0}{22 \sqrt{2} \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \Phi = \pi/4 \text{ rad} = 45^\circ.$$

c) Az integrálásnál arra kell figyelni, hogy most $t_0 \neq 0$.

Határozott integrállal:

$$x(t) = x(1) + \int_1^t v_x(\tau) d\tau = 0 + \int_1^t (\tau^2 + \tau + 2) d\tau =$$

$$= \left[\frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^2}{2} + 2\tau \right]_1^t = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t \right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 2 \right) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t - \frac{17}{6}$$

$$y(t) = y(1) + \int_1^t v_y(\tau) d\tau = 22 + \int_1^t \left(22 + \frac{\pi}{3} \sin(3\pi\tau) \right) d\tau = 22 + \left[22\tau + \frac{\pi(-\cos(3\pi\tau))}{3\pi} \right]_1^t =$$

$$= 22 + \left(22t - \frac{1}{9} \cos(3\pi t) \right) - \left(22 + \frac{1}{9} \right) = 22t - \frac{1}{9} \cos(3\pi t) - \frac{1}{9}$$

$$z(t) = z(1) + \int_1^t v_z(\tau) d\tau = 2 + \int_1^t 0 d\tau = 2$$

Határozatlan integrállal:

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t + k_4 \right) \mathbf{i} + \left(-\frac{1}{9} \cos(3\pi t) + 22t + k_5 \right) \mathbf{j} + k_6 \mathbf{k} \text{ [m].}$$

k_4, k_5, k_6 értékét most $t = 1$ behelyettesítésével kapjuk meg:

$$x(1) = \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 2 \cdot 1 + k_4 = \frac{17}{6} + k_4 = 0 \rightarrow k_4 = -\frac{17}{6};$$

$$y(1) = -\frac{1}{9} \cos(3\pi \cdot 1) + 22 \cdot 1 + k_5 = \frac{1}{9} + 22 + k_5 = 22 \rightarrow k_5 = -\frac{1}{9};$$

$$z(1) = k_6 = 2 \rightarrow k_6 = 2;$$

$$\text{tehát } \mathbf{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t - \frac{17}{6} \right) \mathbf{i} + \left(-\frac{1}{9} \cos(3\pi t) + 22t - \frac{1}{9} \right) \mathbf{j} + 2 \mathbf{k} \text{ [m].}$$

$$t = 4 \text{ s-ban } \mathbf{r}(4) = 34,5 \mathbf{i} + 790/9 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k} \approx 34,5 \mathbf{i} + 87,78 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k} \text{ [m].}$$

Gyakorló feladatok a zárthelyire:

2/5. Ágyúgolyó röppályájának egyenlete

$$\mathbf{r}(t) = (at + b) \mathbf{i} + (gt^2 + ct + d) \mathbf{k},$$

$$\text{ahol } a = 5 \text{ m/s}, b = 100 \text{ m}, c = 10 \text{ m/s}, d = 200 \text{ m}, g = -5 \text{ m/s}^2.$$

a) Honnan lőtték ki az ágyúgolyót? A kilövés $t = 0$ s-ban történt.

b) Mekkora volt a kezdősebessége?

c) Mekkora volt a gyorsulása?

d) Mikor és hol ér földet az ágyúgolyó? A koordináta-rendszer origója a földön van.

e) Mikor és hol lesz merőleges a sebesség a gyorsulásra?

MO.

a) $t = 0$ s-ban $\mathbf{r}(0) = b \mathbf{i} + d \mathbf{k} = 100 \mathbf{i} + 200 \mathbf{k}$ [m].

b) $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = a \mathbf{i} + (2bt + c) \mathbf{k} = 5 \mathbf{i} + (-10t + 10) \mathbf{k}$,

$\mathbf{v}(0) = 5 \mathbf{i} + 10 \mathbf{k}$, $v_0 = \sqrt{5^2 + 10^2} \approx 11,18$ m/s.

c) $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = 2b \mathbf{k} = -10 \mathbf{k}$ [m/s²]

(azaz a gyorsulás konstans, 10 m/s² lefelé, ami a szokásos közelítő érték g-re, csak most a képletben ennek a fele volt g-vel jelölve...)

d) azaz a $z = 0$ síkot mikor éri el:

$gt^2 + ct + d = -5t^2 + 10t + 200 = 0 \Rightarrow t \approx 7,403$ s (a másik gyök negatív, -5,403 s)

e) a két vektor ott merőleges, ahol a skalárszorzatuk nulla:

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 5 \cdot 0 + (-10t + 10) \cdot (-10) = 100(t-1) = 0 \Rightarrow t = 1$ s,

$\mathbf{r}(1) = 105 \mathbf{i} + 205 \mathbf{k}$ [m], ez a pálya csúcspontja.

(Gyorsabban megoldható a feladat a $v_z = -10t + 10 = 0$ feltételből.)

2/6. Egy test gyorsulása

$\mathbf{a}(t) = 4a \sin(\omega t + \varphi_0) \mathbf{i} + 4b \sin \omega t \mathbf{j}$, ahol $\omega = 2$ s⁻¹, $\varphi_0 = \pi/2$.

$t_1 = \pi/4$ s-ban a test az $\mathbf{r}_1 = a \mathbf{i} - b \mathbf{j}$ [m] pontban van és sebessége $\mathbf{v}_1 = 2a \mathbf{i}$ [m/s].

a) Adjuk meg a test helyvektorát és sebességét $t_2 = 3\pi$ s-ban! ($\mathbf{r}_2 = ?$, $\mathbf{v}_2 = ?$)

b) Milyen pályán mozog a test?

c) Mely időpontokban van legközelebb a test az origóhoz?

MO.

$a_x = 4a \sin(2t + \pi/2) = 4a \cos 2t = \dot{v}_x \Rightarrow v_x = 2a \sin 2t + k_1$

$t_1 = \pi/4$ s-ban $v_{1x} = 2a \Rightarrow k_1 = 0$, $v_x = 2a \sin 2t = \dot{x} \Rightarrow x = -a \cos 2t + k_2$

$t_1 = \pi/4$ s-ban $x_1 = a \Rightarrow k_2 = a$, $x = -a \cos 2t + a$

$a_y = 4b \sin 2t = \dot{v}_y \Rightarrow v_y = -2b \cos 2t + k_3$

$t_1 = \pi/4$ s-ban $v_{1y} = 0 \Rightarrow k_3 = 0$, $v_y = -2b \cos 2t = \dot{y} \Rightarrow y = -b \sin 2t + k_4$

$t_1 = \pi/4$ s-ban $y_1 = -b \Rightarrow k_4 = 0$, $y = -b \sin 2t$

$\mathbf{v}(t) = (2a \sin 2t) \mathbf{i} - (2b \cos 2t) \mathbf{j}$ [m/s], $\mathbf{r}(t) = (a - a \cos 2t) \mathbf{i} - (b \sin 2t) \mathbf{j}$ [m].

a) $\mathbf{r}(3\pi) = (-a \cos 6\pi + a) \mathbf{i} - b \sin 6\pi \mathbf{j} = \mathbf{0}$ [m],

$\mathbf{v}(3\pi) = 2a \sin 6\pi \mathbf{i} - 2b \cos 6\pi \mathbf{j} = -2b \mathbf{j}$ [m/s].

b) $x(t) = a - a \cos 2t \Rightarrow \cos 2t = (a-x)/a$

$y(t) = -b \sin 2t \Rightarrow \sin 2t = -y/b$

Felhasználva, hogy $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$: a pálya $\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ ellipszis

c) $x(t) = 0$, ha $t = k \cdot \pi$; $y(t) = 0$, ha $t = k \cdot \pi/2$;

azaz $t = k \cdot \pi$ esetén a test távolsága az origótól zérus.

2/7. Egy $m = 5$ kg tömegű test sebességét az alábbi függvény írja le:

$\mathbf{v} = a \sin(bt) \mathbf{i} + c \sin(dt) \mathbf{j}$,

ahol $a = -12$ m/s, $b = 2$ s⁻¹, $c = -2$ m/s, $d = 1$ s⁻¹.

A test a $t = 0$ s-ban az $\mathbf{r} = 9 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}$ [m] pontban volt.

a) Milyen pályán mozog a test? Rajzoljuk is meg!

b) Mekkora szöget zár be a sebesség és a gyorsulás $t = \pi/2$ s-ban?

MO. $\mathbf{v} = a \sin(bt) \mathbf{i} + c \sin(dt) \mathbf{j} = -12 \sin(2t) \mathbf{i} - 2 \sin(t) \mathbf{j} \text{ [m/s]}$

a) $\mathbf{r} = \int \mathbf{v} dt$

$x(t) = \int v_x dt = \int (-12 \sin(2t)) dt = 6 \cos(2t) + k_1$

$x(0) = 6 \cos(0) + k_1 = 6 + k_1 = x_0 = 9 \rightarrow k_1 = 3$

$y(t) = \int v_y dt = \int (-2 \sin(t)) dt = 2 \cos(t) + k_2$

$y(0) = 2 \cos(0) + k_2 = 2 + k_2 = y_0 = 3 \rightarrow k_2 = 1$

tehát a pálya paraméteres alakban:

$\mathbf{r}(t) = [6 \cos(2t) + 3] \mathbf{i} + [2 \cos(t) + 1] \mathbf{j} \text{ [m]}$

A pálya alakja:

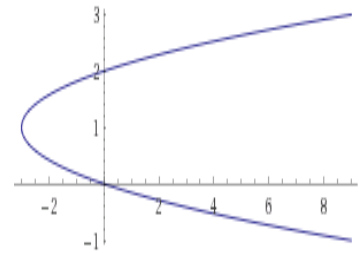
$\cos(2t) = (x-3)/6, \cos(t) = (y-1)/2$

$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - [1 - \cos^2(t)] = 2\cos^2(t) - 1$

tehát $(x-3)/6 = 2 \cdot [(y-1)/2]^2 - 1 \rightarrow \dots \rightarrow$

\rightarrow az $x = 3y(y-2)$ parabolának az a része, amire $-3 \leq x \leq 9$ (és $-1 \leq y \leq 3$),

vagy $y = \pm \sqrt{\frac{x+3}{3}} + 1$



b) $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = ab \cos(bt) \mathbf{i} + cd \cos(dt) \mathbf{j} = -24 \cos(2t) \mathbf{i} - 2 \cos(t) \mathbf{j} \text{ [m/s}^2\text{]}$

$\mathbf{v}(\pi/2) = -12 \sin(\pi) \mathbf{i} - 2 \sin(\pi/2) \mathbf{j} = -2 \mathbf{j} \text{ [m/s]}$

$\mathbf{a}(\pi/2) = -24 \cos(\pi) \mathbf{i} - 2 \cos(\pi/2) \mathbf{j} = 24 \mathbf{i} \text{ [m/s}^2\text{]}$

\rightarrow merőlegesek

2/8. Két légy mozgásának pályafüggvénye

$\mathbf{r}_1(t) = a t^2 \mathbf{i} + b t \mathbf{j} + c \mathbf{k}$

$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{i} + d t \mathbf{j} + e t^2 \mathbf{k}$

ahol $a = 5 \text{ m/s}^2, b = 2 \text{ m/s}, c = 5 \text{ m}, d = -3 \text{ m/s}, e = 2 \text{ m/s}^2$.

a) Írjuk fel egymástól való távolságukat az idő függvényében!

b) Számítsuk ki a $t = 10 \text{ s}$ -ban a két légy sebességvektorát és sebességük nagyságát!

2/9. Egy $m = 5 \text{ kg}$ tömegű test sebességét az alábbi függvény írja le:

$\mathbf{v} = a \sin bt \mathbf{i} + c \sin dt \mathbf{j},$

ahol $a = -12 \text{ m}, b = 2 \text{ s}^{-1}, c = -2 \text{ m}, d = 1 \text{ s}^{-1}$.

A test a $t = 0 \text{ s}$ -ban az $\mathbf{r} = 9 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} \text{ [m]}$ pontban volt.

a) Adjuk meg a testre ható erőt az idő függvényében! (Vektorként és a nagyságát is.)

b) Adjuk meg a test helyvektorát az idő függvényében!

c) Milyen pályán mozog a test? Rajzoljuk is meg!

d) Mekkora szöget zár be a sebesség és a gyorsulás $t = \pi/2 \text{ s}$ -ban?

2/10. Műrepülés közben két repülőgép pályája a következő pályafüggvényekkel adható meg:

$\mathbf{r}_1(t) = a \cos 3\omega t \mathbf{j} + a \sin 3\omega t \mathbf{k}$

$\mathbf{r}_2(t) = 3a \cos(5\omega t + \pi) \mathbf{i} + 3a \sin(5\omega t + \pi) \mathbf{j}$

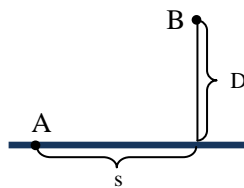
ahol $a = 100 \text{ m}, \omega = 0,1 \text{ s}^{-1}$.

a) Milyen pályákon repülnek a repülőgépek?

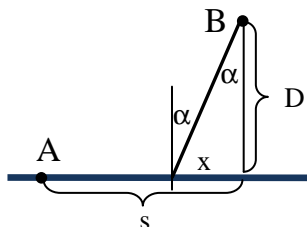
b) Mekkora a távolság a két repülőgép között $t = 0 \text{ s}$ -ban?

Egyéb feladatok (nem zh-feladatok)

2/11. Egy ember a tóparton levő A pontból a legrövidebb idő alatt szeretne a B pontba érni. Milyen útvonalat válasszon, ha a maximális futási sebessége v_f , úszási sebessége pedig v_u ?



MO.



Az út két szakaszból áll, először valameddig fut a parton: legyen ez az ábra jelölése szerint $s-x$, majd ott beugrik a vízbe és egyenesen a B pont felé úszik; ez az út $\sqrt{x^2 + D^2}$. A teljes idő tehát

$$t(x) = t_f + t_u = \frac{s-x}{v_f} + \frac{\sqrt{x^2 + D^2}}{v_u}$$

annak függvénye, hogy hol kezdett el úszni.

Azt az x értéket keressük, amelynél t -nek minimuma van (azaz ahol a $t(x)$ függvény deriváltja zérus):

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{v_f} + \frac{x}{v_u \sqrt{x^2 + D^2}} = 0, \text{ amiből } x = \frac{v_u}{\sqrt{v_f^2 - v_u^2}} D.$$

Látszik, hogy ez csak akkor megoldás, ha $v_f > v_u$ (vagyis ha valaki gyorsabban úszik, mint ahogy fut, akkor végig csak ússzon).

[A $t(x)$ függvény második deriváltja $d^2t/dx^2 = D^2/(v_u(x^2+D^2)^{3/2}) > 0$, tehát a szélsőérték tényleg minimum.]

Ellenőrizzük még, teljesül-e, hogy $x \leq s$, azaz:

$$\frac{v_u}{\sqrt{v_f^2 - v_u^2}} D \leq s \Rightarrow \left(\frac{v_f}{v_u}\right)^2 \geq 1 + \left(\frac{D}{s}\right)^2$$

Ez automatikusan nem teljesül; ez azt jelenti, hogy ha nem tudunk ennyivel gyorsabban futni, mint úszni, akkor is végig úszni kell.

Analógia a Snellius-Descartes-törvénnyel sűrű beesés esetén: a $dt/dx = 0$ kifejezésből látható,

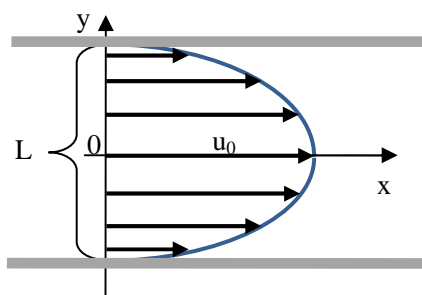
$$\text{hogy } \frac{v_f}{v_u} = \frac{\sqrt{x^2 + D^2}}{x} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin \alpha} = n \quad (\alpha \text{ a teljes visszaverődés határszöge})$$

2/12. Egy csónak L szélességű folyón halad át a folyóra merőlegesen a vízhez képest állandó v sebességgel. A folyó vízének sebességeloszlása parabolikus:

$$u = u_0 \left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right)$$

a) Határozzuk meg a csónak pályájának egyenletét!

b) Mennyivel viszi le a víz a csónakot, míg az egyik partról a másikra ér?



MO.

a) A csónak eredő sebessége mindig a pálya érintőjének irányába mutat.

$u = dx/dt$ és $v = dy/dt \rightarrow (dy/dt)/(dx/dt) = v/u = dy/dx$ a pálya érintője.

u függ y -től, tehát az alábbi differenciálegyenletet kell megoldanunk, hogy a pálya egyenletét $y(x)$ avagy $x(y)$ alakban megkapjuk:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u_0} \frac{1}{1 - \frac{4y^2}{L^2}}$$

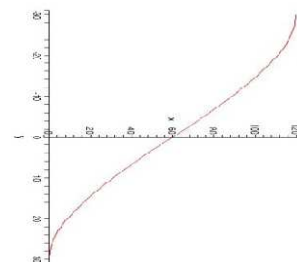
Szeparáljuk és integráljuk:

$$\int_{-L/2}^y \frac{u_0}{v} \left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right) dy = \int_0^x dx \rightarrow$$

$$x = \frac{u_0}{v} \left[y - \frac{4y^3}{3L^2} \right]_{-L/2}^y = \frac{u_0}{v} \left(y - \frac{4y^3}{3L^2} - \left(-\frac{L}{2} - \frac{4(-\frac{L}{2})^3}{3L^2} \right) \right) = \frac{u_0}{v} \left(y - \frac{4y^3}{3L^2} + \frac{L}{3} \right) \text{ a pálya}$$

egyenlete.

$$\text{Vagy: } \int \frac{u_0}{v} \left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right) dy = \int dx \rightarrow x = \frac{u_0}{v} \left(y - \frac{4y^3}{3L^2} \right) + K$$



és tudjuk, hogy $x = 0$ -nál $y = -L/2$: $0 = \frac{u_0}{v} \left(-\frac{L}{2} - \frac{4(-\frac{L}{2})^3}{3L^2} \right) + K = -\frac{u_0 L}{v} + K$

vagyis $K = \frac{u_0 L}{v}$ és $x = \frac{u_0}{v} \left(y - \frac{4y^3}{3L^2} + \frac{L}{3} \right)$.

b) A csónak átér, ha $y = L/2$, ezt behelyettesítve $x = \frac{2}{3} \frac{u_0}{v} L$.

2/13. A és B város 84 km-re vannak egymástól. Két biciklis elindul egy időben, az egyikük A-ból B-be 16 km/h, a másik B-ből A-ba 12 km/h sebességgel. Egy fecske is elindul velük egy időben A városból B város felé, de amikor találkozik a B-ből jövő biciklissel, visszafordul A felé, majd amikor találkozik az A-ból jövő biciklissel, visszafordul B felé, és így tovább. Mekkora utat tesz meg a fecske a biciklisták találkozásáig? A fecske sebessége 50 km/h óra, és egy szempillantás alatt meg tud fordulni.

MO. A megoldást nem úgy keressük, hogy a fecske és az egyik ill. másik biciklista találkozásának helyét és idejét számoljuk ki és a fecske által megtett utakat összegezzük, hanem a két biciklista találkozásáig eltelt összes időt számoljuk ki, mert a fecske addig végig repül, így az idő ismeretében az általa megtett út könnyebben kiszámolható. A találkozásig eltelt idő

- az egyik biciklistához rögzített koordinátarendszerben: mivel a biciklisták egymással szembe haladnak, a másik biciklista sebessége az origóban lévőhöz képest $16+12 = 28$ km/h, kezdetben a távolság köztük 84 km, tehát $t = 84 / 28 = 3$ h.

- az úthoz rögzített koordinátarendszerben: az origó A városban van, az onnan induló biciklista koordinátája $x_1 = 16 t$, a B városból induló pedig $x_2 = 84 - 12 t$. Találkozásakor $x_1 = x_2$: $16 t = 84 - 12 t \rightarrow t = 3$ h.

A fecske által megtett út $s = 3 \cdot 50 = 150$ km.

2/14. Egy villamosvonalon a villamosok T időközönként járnak c sebességgel. A pálya mellett gépkocsi halad v sebességgel. Mennyi időközönként találkozik a gépkocsi villamosokkal?

MO. Írjuk fel egy villamoshoz rögzített koordinátarendszerben az autó sebességét:

ha az autó és a villamosok ellenkező irányba mennek: $v_{rel} = v + c$

ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és $v > c$: $v_{rel} = v - c$

ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és $v < c$: $v_{rel} = c - v$

A villamosok távolsága egymástól $d = c \cdot T$,

ekkora távolságot kell megtenni az autónak, tehát az ehhez szükséges idő

$$\Delta t = c \cdot T / (v + c), \text{ ha az autó és a villamosok ellenkező irányba mennek,}$$

$$\Delta t = c \cdot T / (v - c), \text{ ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és } v > c, \text{ és}$$

$$\Delta t = c \cdot T / (c - v), \text{ ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és } v < c.$$

2/15. Lelépjük egy szekér hosszát menet közben: a szekérral egy irányba menve 'a' lépésnek mérjük, szembe menve pedig 'b' lépésnek mérjük. Milyen hosszú a szekér?

MO. A szekér sebessége v_{sz} , az emberé v_e .

Ha egy irányba mennek, akkor t_1 idő alatt ér el az ember a szekér végétől a szekér elejéig, ezalatt

$$v_e t_1 = a \quad (1) \text{ lépést tesz meg, és } v_e t_1 = v_{sz} t_1 + L \quad (2)$$

Ha szembe mennek, akkor a t_2 idő alatt jut el az ember a szekér elejétől a végéhez, ezalatt

$$v_e t_2 = b \quad (3) \text{ lépést tesz meg, és } (v_e + v_{sz}) t_2 = L \quad (4)$$

Ez 4 egyenlet 5 ismeretlennel, ügyesen kell rendezgetni. Pl. (1)-et behelyettesítve (2)-be $v_{sz} t_1 = a - L$, másrészt (3)-at behelyettesítve (4)-be $v_{sz} t_2 = L - b$, és a két egyenletet elosztva $t_1/t_2 = (a-L)/(L-b)$. Ugyanakkor (1)-et elosztva (2)-

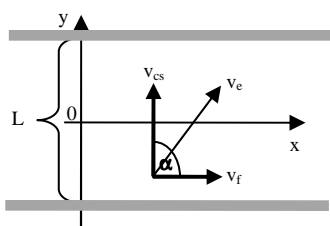
vel $t_1/t_2 = a/b$. Ezeket összevetve $(a-L)/(L-b) = a/b$, amiből $L = \frac{2ab}{a+b}$

2/16. Folyóvíz sebessége 3 m/s, és van egy csónakunk, ami a vízhez képest 4 m/s sebességgel tud menni. Mekkora legyen a folyó sodrával bezárt szög, ha

a) a legrövidebb idő alatt;

b) a legrövidebb úton szeretnénk átnérni a túlpartra?

MO. a) A csónak orra mutasson a túlsó part felé, azaz $\alpha = 90^\circ$.



b) A csónak eredő sebessége legyen merőleges a folyó sodrára, azaz a $\beta = 138,6^\circ$.

