2/1. Egy tömegpont helyvektora az időtől a következőképpen függ:

$\mathbf{r}(t) = (at+b)\,\mathbf{i} + (at-b)\,\mathbf{j} + (-ct^2+4at+5b)\,\mathbf{k}$,

ahol $a = 3$ m/s, $b = 10$ m, $c = 5$ m/s^2.

a) Milyen távol van a tömegpont az origótól a $t = 0$ időpontban?

b) Milyen távol van a kiindulási ponttól a $t = 2$ s -ban? A test $t = 0$ -ban indult.

c) Határozzuk meg a tömegpont sebességét és gyorsulását!

d) Mekkora a sebessége a $t = 0$ időpontban?

e) Mely időpontban éri el a tömegpont az x-y síkot?

MO.

a) A konstansokat behelyettesítve $\mathbf{r}(t) = (3t+10)\,\mathbf{i} + (3t-10)\,\mathbf{j} + (-5t^2+12t+50)\,\mathbf{k}$ [m].

$t = 0$ –ban az $\mathbf{r}(0) = 10\,\mathbf{i} - 10\,\mathbf{j} + 50\,\mathbf{k}$ [m] pontban van a test,

aminek a távolsága az origótól $d = |\mathbf{r}(0)| = r(0) = \sqrt{10^2 + 10^2 + 50^2} \approx 51{,}96$ m.

b) $t = 2$ s-ban az $\mathbf{r}(2) = 16\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 54\,\mathbf{k}$ [m] pontban van a test.

Az elmozdulásvektor a $t_0 = 0 \to t_1 = 2$ s intervallumban

$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(2) - \mathbf{r}(0) = 6\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$ [m], ennek nagysága $|\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 4^2} \approx 9{,}381$ m.

c) $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = a\,\mathbf{i} + a\,\mathbf{j} + (-2ct+4a)\,\mathbf{k} = 3\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + (-10t+12)\,\mathbf{k}$ [m/s]

$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = -2c\,\mathbf{k} = -10\,\mathbf{k}$ [m/s^2]

d) $\mathbf{v}(0) = 3\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} + 12\,\mathbf{k}$ [m/s] , nagysága $v(0) = \sqrt{3^2 + 3^2 + 12^2} \approx 12{,}73$ m/s.

e) az x-y síkot akkor éri el, amikor $z = 0$, azaz

$-5\,t^2 + 12\,t + 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 \approx 4{,}582$ s (és $t_2 \approx -2{,}182$ s -ban is ott lett volna)

és még egy kérdés: (ez nem zh-feladat)

f) Bizonyítsuk be, hogy a mozgás síkmozgás! Határozzuk meg a pálya síkját!

MO. A mozgás síkmozgás, ha $A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0$ teljesül minden t-re.

Most $x = at+b$, $y = at-b$, $z = -ct^2+4at+5b$, tehát

$A(at+b)+B(at-b)+C(-ct^2+4at+5b)+D=(-Cc)t^2+(Aa+Ba+Ca)t+(Ab-Bb+5Cb+D)=0$,

amiből $-Cc = 0$ és $Aa+Ba+Ca = 0$ és $Ab-Bb+5Cb+D=0$.

$-Cc = 0 \;\Rightarrow\; C = 0$

$$\left.\begin{aligned} Aa + Ba &= 0 \\ Ab - Bb + D &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} B &= -A \\ D &= -2Ab \end{aligned}\right.$$

$A = 1$ választással a sík egyenlete: $x - y - 2b = 0$.

2/2. Egy repülőgép mozgását az

$\mathbf{r}(t) = a\cos\left(\frac{t}{t_0}\right)\,\mathbf{i} + 2a\sin\left(\frac{t}{t_0}\right)\,\mathbf{j}$ függvény írja le,

ahol $a = 200$ m, $t_0 = 2$ s.

a) Milyen pályán mozog a repülőgép?

b) Mekkora szöget zár be a sebességvektor a gyorsulásvektorral a $t = 0$ ill. a $t = 2$ s időben?

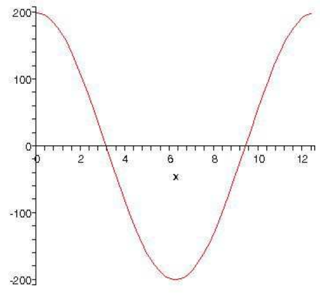
MO. a) $x(t) = a\cos(t/t_0) = 200\cos(t/2)$

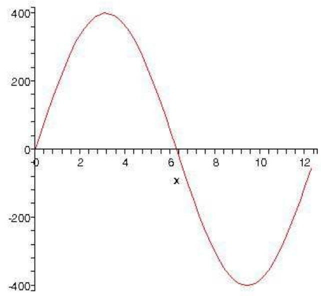
$y(t) = 2a\sin(t/t_0) = 400\sin(t/2)$

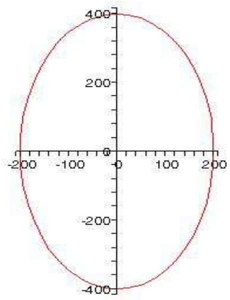
Fejezzük ki az első egyenletből $\cos(t/t_0)$-t, a másodikból $\sin(t/t_0)$-t. Mivel

$\left[\cos\frac{t}{t_0}\right]^2 + \left[\sin\frac{t}{t_0}\right]^2 = 1$, ezért $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{2a}\right)^2 = \left(\frac{x}{200}\right)^2 + \left(\frac{y}{400}\right)^2 = 1$,

azaz egy ellipszisen mozog a repülőgép (pozitív forgásirányban).
[Mivel $T/2 = 2\pi$, a periódusidő $T = 4\pi \approx 12{,}57$ s.]







x – t y – t y – x

b)
$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = -\,a/t_0 \sin(t/t_0)\,\mathbf{i} + 2a/t_0 \cos(t/t_0)\,\mathbf{j} = -\,100 \sin(t/2)\,\mathbf{i} + 200 \cos(t/2)\,\mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = -\,a/t_0^2 \cos(t/t_0)\,\mathbf{i} - 2a/t_0^2 \sin(t/t_0)\,\mathbf{j} = -\,50 \cos(t/2)\,\mathbf{i} - 100 \sin(t/2)\,\mathbf{j}$

$t = 0$ s -ban $\mathbf{v}(0) = 200\,\mathbf{j}$ [m/s], $\mathbf{a}(0) = -\,50\,\mathbf{i}$ [m/s^2] $\Rightarrow$ látható, hogy a két vektor merőleges.
[A test az x tengely (200 , 0) pontjában van; a sebesség +y irányú, azaz előrefelé mutat az ellipszis érintőjének irányában; a gyorsulás az origó felé mutat, merőleges a sebességre, vagyis ebben a pillanatban állandó nagyságú sebességgel kanyarodik.]

$t = 2$ s -ban $\mathbf{v}(2) = -100 \sin(1)\,\mathbf{i} + 200 \cos(1)\,\mathbf{j} = -\,84{,}15\,\mathbf{i} + 108{,}1\,\mathbf{j}$ [m/s],
$\mathbf{a}(2) = -50 \cos(1)\,\mathbf{i} - 100 \sin(1)\,\mathbf{j} = -\,27{,}02\,\mathbf{i} - 84{,}15\,\mathbf{j}$ [m/s^2].
A két vektor által bezárt szög nagyságát <u>skalárszorzattal</u> számolhatjuk ki:
általánosan: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\alpha$, itt $\mathbf{v}(2) \cdot \mathbf{a}(2) = |\mathbf{v}(2)| \cdot |\mathbf{a}(2)| \cdot \cos\alpha \;\Rightarrow$

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}(2)\cdot\mathbf{a}(2)}{|\mathbf{v}(2)|\cdot|\mathbf{a}(2)|} = \frac{(-84{,}15)\cdot(-27{,}02)+(108{,}1)\cdot(-84{,}15)}{\sqrt{84{,}15^2+108{,}1^2}\cdot\sqrt{27{,}02^2+84{,}15^2}} = \frac{-6819{,}7}{136{,}96\cdot 88{,}377} = -0{,}5634$$

$\Rightarrow \qquad \alpha = 2{,}169 \text{ rad} = 124{,}3°$

[$t = 2$ s-nál $\varphi = 2/2 = 1$ rad $\approx 57{,}3°$, ekkora szöget zár be a helyvektor az x tengellyel; a sebesség érintő irányú; a gyorsulás befelé, az origó felé mutat, ami ebben a pillanatban a sebességre merőleges irányhoz képest „hátrafelé” van, vagyis ebben a pillanatban lassulva kanyarodik.]

Skalárszorzattal $t = 0$ esetében: $\mathbf{v}(0) \cdot \mathbf{a}(0) = 0 \quad \Rightarrow$ merőlegesek .

2/3. Egy kipukkadt lufi sebességét az alábbi függvény adja meg:

$$\mathbf{v}(t) = 0{,}2\, e^{0{,}1t}\,\mathbf{i} - 2{,}8 \sin(4t)\,\mathbf{j} + (3-4t)\,\mathbf{k} \quad [\text{m/s}]$$

(Az időt másodpercekben, a távolságot méterben mérjük.)
Kipukkadásakor, $t = 0$ s-ban a lufi az $\mathbf{r_0} = 2\,\mathbf{i} + 1{,}4\,\mathbf{j} + 1{,}5\,\mathbf{k}$ [m] pontból indult.
a) Hol lesz a lufi fél másodperc múlva?
b) A lufi egy olyan 3×3×3 m-es szobában van, melynek egyik sarkához illesztettük a koordinátarendszerünket. Mikor, melyik fal (ill. plafon v. padló) melyik pontjának megy neki először?

MO. Keressük azt az $\mathbf{r}(t)$ függvényt, amire teljesül, hogy
- deriváltja a fent megadott $\mathbf{v}(t)$ függvény: $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}(t)$ és
- helyettesítési értéke megfelel az adott feltételnek; speciálisan $t_0 = 0$ esetén $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r_0}$.
Ezt a függvényt határozott vagy határozatlan integrállal is előállíthatjuk.

Határozott integrállal:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(\tau)\, d\tau\,,$$

koordinátánként

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(\tau)\, d\tau\,; \quad y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(\tau)\, d\tau\,; \quad z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z(\tau)\, d\tau\,.$$

Esetünkben $t_0 = 0$, $x(t_0) = x(0) = x_0 = 2$ m ; $y(t_0) = y(0) = y_0 = 1{,}4$ m ; $z(t_0) = z(0) = z_0 = 1{,}5$ m.

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(\tau)\, d\tau = 2 + \int_0^t 0{,}2e^{0{,}1\tau}\, d\tau = 2 + 0{,}2\left[\frac{e^{0{,}1\tau}}{0{,}1}\right]_0^t = 2 + 2(e^{0{,}1t} - 1) = 2e^{0{,}1t}\,;$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(\tau)\, d\tau = 1{,}4 + \int_0^t -2{,}8\sin(4\tau)\, d\tau = 1{,}4 - 2{,}8\left[-\frac{\cos(4\tau)}{4}\right]_0^t =$$

$$= 1{,}4 + 0{,}7(\cos(4t) - 1) = 0{,}7(1 + \cos(4t))\,;$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z(\tau)\, d\tau = 1{,}5 + \int_0^t (3 - 4\tau) d\tau = 1{,}5 + [3\tau - 2\tau^2]_0^t = 1{,}5 + 3t - 2t^2\,;$$

azaz $\mathbf{r}(t) = 2e^{0{,}1t}\,\mathbf{i} + 0{,}7(1+\cos(4t))\,\mathbf{j} + (1{,}5+3t+2t^2)\,\mathbf{k}$ [m] .

Határozatlan integrállal:

$$x(t) = \int v_x\, dt = \int 0{,}2e^{0{,}1t}\, dt = \frac{0{,}2}{0{,}1}e^{0{,}1t} + k_1 = 2e^{0{,}1t} + k_1$$

A k_1 konstans értékének meghatározásához az $\mathbf{r_0}$ vektorból kiolvassuk x_0 értékét: $x_0 = 2$;
ezzel kell egyenlő legyen az $x(t)$ értéke $t=0$-ban,
amihez az $x(t)$ függvénybe $t=0$ -t helyettesítünk: $x(0) = 2e^{0{,}1\cdot 0} + k_1 = 2 + k_1$
és felírjuk, hogy $x(0) = x_0$: $2 + k_1 = 2 \rightarrow k_1 = 0$, tehát $x(t) = 2e^{0{,}1t}$.

$y = \int v_y dt = \int -2{,}8\sin(4t)\, dt = \frac{2{,}8}{4}\cos(4t) + k_2 = 0{,}7\cos(4t) + k_2$,
a kezdeti feltételből $0{,}7\cos 0 + k_2 = 0{,}7 + k_2 = 1{,}4 \rightarrow k_2 = 0{,}7$, tehát $y(t) = 0{,}7(1 + \cos(4t))$.

$z = \int v_z dt = \int (3 - 4t)\, dt = (3t - 2t^2) + k_3$,
a kezdeti feltételből $0 + k_3 = 1{,}5 \rightarrow k_3 = 1{,}5$, tehát $z(t) = 3t - 2t^2 + 1{,}5$.

a) $t = 0{,}5$ s behelyettesítésével
$x = 2e^{0{,}05} \approx 2{,}103$ m , $y = 0{,}7(1+\cos(2)) \approx 0{,}4087$ m , $z = 3\cdot 0{,}5 - 2\cdot 0{,}5^2 + 1{,}5 = 2{,}500$ m ,
tehát $\mathbf{r}(0{,}5) = 2{,}103\,\mathbf{i} + 0{,}4087\,\mathbf{j} + 2{,}500\,\mathbf{k}$ [m].

b) A szobát határoló síkok az $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$ és $z = 3$ síkok;
azt kell megvizsgálni, melyik feltétel mikor teljesül, és a legkisebb időt kiválasztani.

$x = 2e^{0{,}1t} = 0$: soha	$x = 2e^{0{,}1t} = 3$: $t_x \approx 4{,}055$ s
$y = 0{,}7(1+\cos(4t)) = 0$: $t_y \approx 0{,}7854$ s	$y = 0{,}7(1+\cos(4t)) = 3$: soha
$z = 3\cdot t - 2\cdot t^2 + 1{,}5 = 0$: $t_z \approx 1{,}896$ s	$z = 3\cdot t - 2\cdot t^2 + 1{,}5 = 3$: soha

A lufi tehát $t = 0{,}7854$ s-ban nekimegy az $y = 0$ egyenletű fal
$x(0{,}7854) = 2{,}163$ m, $z(0{,}7854) = 2{,}622$ m pontjának.

2/4. Egy test gyorsulása $\mathbf{a}(t) = (2t + 1)\,\mathbf{i} + \pi^2\cos(3\pi t)\,\mathbf{j}$ [m/s²].
A $t = 0$ s -ban a test sebessége $\mathbf{v_0} = 2\,\mathbf{i} + 22\,\mathbf{j}$ [m/s].
Mennyi lesz $t = 4$ s -ban
a) a sebesség nagysága?
b) a sebességvektornak az x tengellyel bezárt szöge?
c) Hol lesz a test $t = 4$ s -ban, ha $t = 1$ s-ban $\mathbf{r}(1) = 22\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ [m] ?

MO.

Keressük azt a $\mathbf{v}(t)$ függvényt, amire teljesül, hogy

- deriváltja a fent megadott $\mathbf{a}(t)$ függvény: $\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{a}(t)$ és
- helyettesítési értéke megfelel az adott feltételnek; speciálisan $t_0 = 0$ esetén $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v_0}$.

Határozott integrállal:

$$v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(\tau)\, d\tau = 2 + \int_0^t (2\tau + 1)\, d\tau = 2 + [\tau^2 + \tau]_0^t = 2 + t^2 + t$$

$$v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_y(\tau)\, d\tau = 22 + \int_0^t \pi^2 \cos(3\pi\tau)\, d\tau = 22 + \pi^2 \left[\frac{\sin(3\pi\tau)}{3\pi}\right]_0^t = 22 + \frac{\pi}{3}\sin(3\pi t)$$

Határozatlan integrállal:

$a_x = \dot{v}_x = 2t + 1 \quad \rightarrow \quad v_x(t) = t^2 + t + k_1$

mivel $v_x(0) = 2$, így $0^2 + 0 + k_1 = 2 \rightarrow k_1 = 2$, azaz $v_x = t^2 + t + 2$;

$a_y = \dot{v}_y = \pi^2 \cos(3\pi t) \quad \rightarrow \quad v_y(t) = \pi/3 \cdot \sin(3\pi t) + k_2$

mivel $v_y(0) = 22$, így $\pi/3 \cdot \sin(0) + k_2 = 22 \rightarrow k_2 = 22$, azaz $v_y = \pi/3 \cdot \sin(3\pi t) + 22$;

tehát $\mathbf{v}(t) = (t^2 + t + 2)\,\mathbf{i} + (\pi/3 \cdot \sin(3\pi t) + 22)\,\mathbf{j}$ [m/s] .

$t = 4$ s-ban $\mathbf{v}(4) = (4^2+4+2)\,\mathbf{i} + (\pi/3 \cdot \sin(12\pi) + 22)\,\mathbf{j} = 22\,\mathbf{i} + 22\,\mathbf{j}$ [m/s] . Ennek

a) nagysága $|\mathbf{v}(4)| = 22 \cdot \sqrt{2} \approx 31{,}11$ m/s ;

b) az x tengellyel – azaz az $\mathbf{i}$ egységvektorral – bezárt szöge:

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{v}(4)\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{v}(4)|\cdot 1} = \frac{22\cdot 1 + 22\cdot 0}{22\sqrt{2}\cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad \Phi = \pi/4 \text{ rad} = 45° .$$

c) Az integrálásnál arra kell figyelni, hogy most $t_0 \neq 0$.

Határozott integrállal:

$$x(t) = x(1) + \int_1^t v_x(\tau)\, d\tau = 0 + \int_1^t (\tau^2 + \tau + 2) d\tau =$$

$$= \left[\frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^2}{2} + 2\tau\right]_1^t = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t\right) - \left(\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 2\right) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2t - \frac{17}{6}$$

$$y(t) = y(1) + \int_1^t v_y(\tau)\, d\tau = 22 + \int_1^t \left(22 + \frac{\pi}{3}\sin(3\pi\tau)\right) d\tau = 22 + \left[22\tau + \frac{\pi}{3}\frac{(-\cos(3\pi\tau))}{3\pi}\right]_1^t =$$

$$= 22 + \left(22t - \frac{1}{9}\cos(3\pi t)\right) - \left(22 + \frac{1}{9}\right) = 22t - \frac{1}{9}\cos(3\pi t) - \frac{1}{9}$$

$$z(t) = z(1) + \int_1^t v_z(\tau)\, d\tau = 2 + \int_1^t 0\, d\tau = 2$$

Határozatlan integrállal:

$\mathbf{r}(t) = (t^3/3 + t^2/2 + 2t + k_4)\,\mathbf{i} + (-1/9 \cdot \cos(3\pi t) + 22t + k_5)\,\mathbf{j} + k_6\,\mathbf{k}$ [m].

k_4, k_5, k_6 értékét most $t = 1$ behelyettesítésével kapjuk meg:

$x(1) = 1^3/3 + 1^2/2 + 2\cdot 1 + k_4 = 17/6 + k_4 = 0 \quad \rightarrow \quad k_4 = -17/6$;

$y(1) = -1/9 \cdot \cos(3\pi \cdot 1) + 22\cdot 1 + k_5 = 1/9 + 22 + k_5 = 22 \quad \rightarrow \quad k_5 = -1/9$;

$z(1) = k_6 = 2 \quad \rightarrow \quad k_6 = 2$;

tehát $\mathbf{r}(t) = (t^3/3 + t^2/2 + 2t - 17/6)\,\mathbf{i} + (-1/9 \cdot \cos(3\pi t) + 22t - 1/9)\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ [m].

$t = 4$ s -ban $\mathbf{r}(4) = 34{,}5\,\mathbf{i} + 790/9\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k} \approx 34{,}5\,\mathbf{i} + 87{,}78\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ [m].

Gyakorló feladatok a zárthelyire:

2/5. Ágyúgolyó röppályájának egyenlete

$\mathbf{r}(t) = (at + b)\,\mathbf{i} + (gt^2 + ct + d)\,\mathbf{k}$,

ahol $a = 5$ m/s, $b = 100$ m, $c = 10$ m/s, $d = 200$ m, $g = -5$ m/s^2.

a) Honnan lőtték ki az ágyúgolyót? A kilövés $t = 0$ s-ban történt.

b) Mekkora volt a kezdősebessége?

c) Mekkora volt a gyorsulása?

d) Mikor és hol ér földet az ágyúgolyó? A koordinátarendszer origója a földön van.

e) Mikor és hol lesz merőleges a sebesség a gyorsulásra?

MO.

a) $t = 0$ s-ban $\mathbf{r}(0) = b\,\mathbf{i} + d\,\mathbf{k} = 100\,\mathbf{i} + 200\,\mathbf{k}$ [m] .

b) $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = a\,\mathbf{i} + (2bt + c)\,\mathbf{k} = 5\,\mathbf{i} + (-10t + 10)\,\mathbf{k}$,

$\mathbf{v}(0) = 5\,\mathbf{i} + 10\,\mathbf{k}$, $v_0 = \sqrt{5^2 + 10^2} \approx 11{,}18$ m/s .

c) $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = 2b\,\mathbf{k} = -10\,\mathbf{k}$ [m/s²]

(azaz a gyorsulás konstans, 10 m/s² lefelé, ami a szokásos közelítő érték g-re, csak most a képletben ennek a fele volt g-vel jelölve)

d) azaz a $z = 0$ síkot mikor éri el:

$gt^2 + ct + d = -5t^2 + 10t + 200 = 0 \Rightarrow t \approx 7{,}403$ s (a másik gyök negatív, $-5{,}403$ s)

e) a két vektor ott merőleges, ahol a skalárszorzatuk nulla:

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 5 \cdot 0 + (-10t + 10) \cdot (-10) = 100(t-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1$ s,

$\mathbf{r}(1) = 105\,\mathbf{i} + 205\,\mathbf{k}$ [m] , ez a pálya csúcspontja.

(Gyorsabban megoldható a feladat a $v_z = -10t + 10 = 0$ feltételből.)

2/6. Egy test gyorsulása

$$\mathbf{a}(t) = 4a \sin(\omega t + \varphi_0)\,\mathbf{i} + 4b \sin \omega t\,\mathbf{j}, \quad \text{ahol } \omega = 2\ \text{s}^{-1},\ \varphi_0 = \pi/2.$$

$t_1 = \pi/4$ s-ban a test az $\mathbf{r}_1 = a\,\mathbf{i} - b\,\mathbf{j}$ [m] pontban van és sebessége $\mathbf{v}_1 = 2a\,\mathbf{i}$ [m/s].

a) Adjuk meg a test helyvektorát és sebességét $t_2 = 3\pi$ s-ban! ($\mathbf{r}_2 = ?$, $\mathbf{v}_2 = ?$)

b) Milyen pályán mozog a test?

c) Mely időpontokban van legközelebb a test az origóhoz?

MO.

$a_x = 4a \sin(2t + \pi/2) = 4a \cos 2t = \dot{v}_x \quad \Rightarrow \quad v_x = 2a \sin 2t + k_1$

$t_1 = \pi/4$ s-ban $v_{1x} = 2a \Rightarrow k_1 = 0$, $v_x = 2a \sin 2t = \dot{x} \Rightarrow x = -a \cos 2t + k_2$

$t_1 = \pi/4$ s-ban $x_1 = a \Rightarrow k_2 = a$, $x = -a \cos 2t + a$

$a_y = 4b \sin 2t = \dot{v}_y \quad \Rightarrow \quad v_y = -2b \cos 2t + k_3$

$t_1 = \pi/4$ s-ban $v_{1y} = 0 \Rightarrow k_3 = 0$, $v_y = -2b \cos 2t = \dot{y} \Rightarrow y = -b \sin 2t + k_4$

$t_1 = \pi/4$ s-ban $y_1 = -b \Rightarrow k_4 = 0$, $y = -b \sin 2t$

$\mathbf{v}(t) = (2a \sin 2t)\,\mathbf{i} - (2b \cos 2t)\,\mathbf{j}$ [m/s], $\mathbf{r}(t) = (a - a \cos 2t)\,\mathbf{i} - (b \sin 2t)\,\mathbf{j}$ [m] .

a) $\mathbf{r}(3\pi) = (-a \cos 6\pi + a)\,\mathbf{i} - b \sin 6\pi\,\mathbf{j} = \mathbf{0}$ [m] ,

$\mathbf{v}(3\pi) = 2a \sin 6\pi\,\mathbf{i} - 2b \cos 6\pi\,\mathbf{j} = -2b\,\mathbf{j}$ [m/s] .

b) $x(t) = a - a \cos 2t \quad \Rightarrow \quad \cos 2t = (a-x)/a$

$y(t) = -b \sin 2t \quad \Rightarrow \quad \sin 2t = -y / b$

Felhasználva, hogy $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$: a pálya $\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ ellipszis

c) $x(t) = 0$, ha $t = k \cdot \pi$; $y(t) = 0$, ha $t = k \cdot \pi/2$;

azaz $t = k \cdot \pi$ esetén a test távolsága az origótól zérus.

2/7. Egy $m = 5$ kg tömegű test sebességét az alábbi függvény írja le:

$\mathbf{v} = a \sin(bt)\,\mathbf{i} + c \sin(dt)\,\mathbf{j}$,

ahol $a = -12$ m/s, $b = 2\ \text{s}^{-1}$, $c = -2$ m/s, $d = 1\ \text{s}^{-1}$.

A test a $t = 0$ s-ban az $\mathbf{r} = 9\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$ [m] pontban volt.

a) Milyen pályán mozog a test? Rajzoljuk is meg!

b) Mekkora szöget zár be a sebesség és a gyorsulás $t = \pi/2$ s-ban?

MO. $\mathbf{v} = a \sin(bt)\,\mathbf{i} + c \sin(dt)\,\mathbf{j} = -12 \sin(2t)\,\mathbf{i} - 2 \sin(t)\,\mathbf{j}$ [m/s]

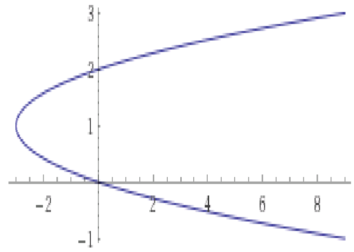
a) $\mathbf{r} = \int \mathbf{v}\, dt$

$x(t) = \int v_x\, dt = \int(-12 \sin(2t))\, dt = 6 \cos(2t) + k_1$

$x(0) = 6 \cos(0) + k_1 = 6 + k_1 = x_0 = 9 \quad \rightarrow \quad k_1 = 3$

$y(t) = \int v_y\, dt = \int(-2 \sin(t))\, dt = 2 \cos(t) + k_2$

$y(0) = 2 \cos(0) + k_2 = 2 + k_2 = y_0 = 3 \quad \rightarrow \quad k_2 = 1$



tehát a pálya paraméteres alakban:

$\mathbf{r}(t) = [\,6 \cos(2t) + 3\,]\,\mathbf{i} + [\,2 \cos(t) + 1\,]\,\mathbf{j}$ [m]

A pálya alakja:

$\cos(2t) = (x-3)/6\,, \quad \cos(t) = (y-1)/2$

$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos^2(t) - [1-\cos^2(t)] = 2\cos^2(t) - 1$

tehát $(x-3)/6 = 2\cdot[(y-1)/2]^2 - 1 \quad \rightarrow \ldots \rightarrow$

$\rightarrow$ az $x = 3y(y-2)$ parabolának az a része, amire $-3 \le x \le 9$ (és $-1 \le y \le 3$),

vagy $y = \pm\sqrt{\frac{x+3}{3}} + 1$

b) $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = ab \cos(bt)\,\mathbf{i} + cd \cos(dt)\,\mathbf{j} = -24 \cos(2t)\,\mathbf{i} - 2 \cos(t)\,\mathbf{j}$ [m/s^2]

$\mathbf{v}(\pi/2) = -12 \sin(\pi)\,\mathbf{i} - 2 \sin(\pi/2)\,\mathbf{j} = -2\,\mathbf{j}$ [m/s]

$\mathbf{a}(\pi/2) = -24 \cos(\pi)\,\mathbf{i} - 2 \cos(\pi/2)\,\mathbf{j} = 24\,\mathbf{i}$ [m/s^2]

$\rightarrow$ merőlegesek

2/8. Két légy mozgásának pályafüggvénye

$\mathbf{r_1}(t) = a\, t^2\,\mathbf{i} + b\, t\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r_2}(t) = \mathbf{i} + d\, t\,\mathbf{j} + e\, t^2\,\mathbf{k}$

ahol $a = 5$ m/s^2, $b = 2$ m/s, $c = 5$ m, $d = -3$ m/s, $e = 2$ m/s^2.

a) Írjuk fel egymástól való távolságukat az idő függvényében!

b) Számítsuk ki a $t = 10$ s-ban a két légy sebességvektorát és sebességük nagyságát!

MO.

a) $d(t) = \sqrt{(\mathbf{r_2} - \mathbf{r_1})^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$

$= \sqrt{(1 - at^2)^2 + (dt - bt)^2 + (et^2 - c)^2} = \sqrt{(1 - 5t^2)^2 + (-5t)^2 + (2t^2 - 5)^2} = \cdots$

b) $\mathbf{v_1}(t) = 2at\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = 10t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ [m/s]; $\mathbf{v_1}(10) = 100\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ [m/s]

$\mathbf{v_2}(t) = 0\,\mathbf{i} + d\,\mathbf{j} + 2et\,\mathbf{k} = -3\,\mathbf{j} + 4t\,\mathbf{k}$ [m/s]; $\mathbf{v_2}(10) = -3\,\mathbf{j} + 40\,\mathbf{k}$ [m/s] $\rightarrow$ abszolút érték …

2/9. Egy $m = 5$ kg tömegű test sebességét az alábbi függvény írja le:

$\mathbf{v} = a \sin bt\,\mathbf{i} + c \sin dt\,\mathbf{j}$,

ahol $a = -12$ m, $b = 2$ s^{-1}, $c = -2$ m, $d = 1$ s^{-1}.

A test a $t = 0$ s-ban az $\mathbf{r} = 9\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$ [m] pontban volt.

a) Adjuk meg a testre ható erőt az idő függvényében! (Vektorként és a nagyságát is.)

b) Adjuk meg a test helyvektorát az idő függvényében!

c) Milyen pályán mozog a test? Rajzoljuk is meg!

d) Mekkora szöget zár be a sebesség és a gyorsulás $t = \pi/2$ s-ban?

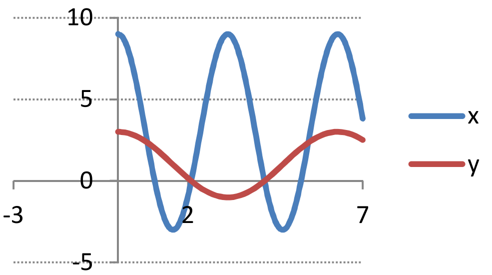
MO.

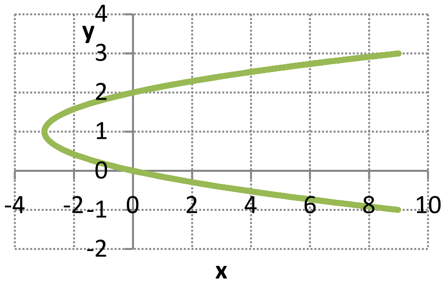
a) $\mathbf{a} = ab \cos(bt)\,\mathbf{i} + cd \cos(dt)\,\mathbf{j} = -24 \cos(2t)\,\mathbf{i} - 2 \cos(t)\,\mathbf{j}$ [m/s^2]

$\mathbf{F} = m\cdot\mathbf{a} = -120 \cos(2t)\,\mathbf{i} - 10 \cos(t)\,\mathbf{j}$ [N] $\rightarrow$ abszolút érték …

b) $\mathbf{r} = (-a/b \cos(bt) + k_x)\,\mathbf{i} + (-c/d \cos(dt) + k_y)\,\mathbf{j} = (6 \cos(2t) + 3)\,\mathbf{i} + (2 \cos(t) + 1)\,\mathbf{j}$ [m]

c) $x = 6 \cos(2t) + 3 = 12 \cos^2(t) - 3$; $y = 2 \cos(t) + 1 \rightarrow x = 3\,(y-1)^2 - 3$ parabola





d) $\mathbf{v}(\pi/2) = -2\,\mathbf{j}$ [m/s] ; $\mathbf{a}(\pi/2) = 24\,\mathbf{i}$ [m/s^2] ; $\mathbf{v}(\pi/2) \cdot \mathbf{a}(\pi/2) = 0$, merőlegesek

2/10. Műrepülés közben két repülőgép pályája a következő pályafüggvényekkel adható meg:

$\mathbf{r_1}(t) = a \cos 3\omega t\,\mathbf{j} + a \sin 3\omega t\,\mathbf{k}$

$\mathbf{r_2}(t) = 3a \cos (5\omega t+\pi)\,\mathbf{i} + 3a \sin (5\omega t+\pi)\,\mathbf{j}$

ahol $a = 100$ m, $\omega = 0{,}1$ s^{-1} .

a) Milyen pályákon repülnek a repülőgépek?

b) Mekkora a távolság a két repülőgép között $t = 0$ s-ban?

MO.

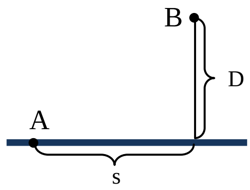
a) $x_1^2 + y_1^2 = 100^2$: 100 m sugarú kör;

$\mathbf{r_2}(t) = -3a \cos(5\omega t)\,\mathbf{i} - 3a \sin(5\omega t)\,\mathbf{j}$; $x_2^2 + y_2^2 = 300^2$: 300 m sugarú kör

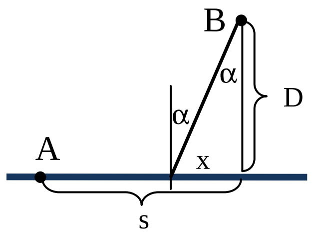
b) $\mathbf{r_1}(0) = 100\,\mathbf{i}$; $\mathbf{r_2}(0) = -300\,\mathbf{i}$, $d = 400$ m

Egyéb feladatok (nem zh-feladatok)

2/11. Egy ember a tóparton levő A pontból a legrövidebb idő alatt szeretne a B pontba érni. Milyen útvonalat válasszon, ha a maximális futási sebessége v_f, úszási sebessége pedig $v_ú$?



MO.



Az út két szakaszból áll, először valameddig fut a parton: legyen ez az ábra jelölése szerint *s–x*, majd ott beugrik a vízbe és egyenesen a B pont felé úszik; ez az út $\sqrt{x^2+D^2}$. A teljes idő tehát

$$t(x) = t_f + t_ú = \frac{s-x}{v_f} + \frac{\sqrt{x^2+D^2}}{v_ú}$$

annak függvénye, hogy hol kezdett el úszni.
Azt az *x* értéket keressük, amelynél *t*-nek minimuma van (azaz ahol a *t(x)* függvény deriváltja zérus):

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{v_f} + \frac{x}{v_ú\sqrt{x^2+D^2}} = 0 \text{ ,amiből } \quad x = \frac{v_ú}{\sqrt{v_f^{\,2} - v_ú^{\,2}}} D \cdot$$

Látszik, hogy ez csak akkor megoldás, ha $v_f > v_ú$ (vagyis ha valaki gyorsabban úszik, mint ahogy fut, akkor végig csak ússzon).
[A *t(x)* függvény második deriváltja $d^2t/dx^2 = D^2/(v_ú(x^2+D^2)^{3/2}) > 0$, tehát a szélsőérték tényleg minimum.]
Ellenőrizzük még, teljesül-e, hogy $x \le s$, azaz:

$$\frac{v_ú}{\sqrt{v_f^{\,2} - v_ú^{\,2}}} D \le s \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{v_f}{v_ú}\right)^2 \ge 1 + \left(\frac{D}{s}\right)^2$$

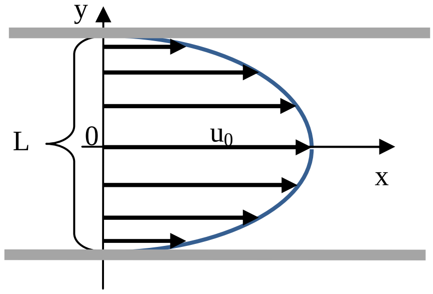
Ez automatikusan nem teljesül; ez azt jelenti, hogy ha nem tudunk ennyivel gyorsabban futni, mint úszni, akkor is végig úszni kell.
Analógia a Snellius-Descartes-törvénnyel súrló beesés esetén: a $dt/dx = 0$ kifejezésből látható,

hogy $\frac{v_f}{v_ú} = \frac{\sqrt{x^2+D^2}}{x} = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin\alpha} = n$ (α a teljes visszaverődés határszöge)

2/12. Egy csónak L szélességű folyón halad át a folyóra merőlegesen a vízhez képest állandó v sebességgel. A folyó vizének sebességeloszlása parabolikus:

$$u = u_0\left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right)$$

a) Határozzuk meg a csónak pályájának egyenletét!
b) Mennyivel viszi le a víz a csónakot, míg az egyik partról a másikra ér?



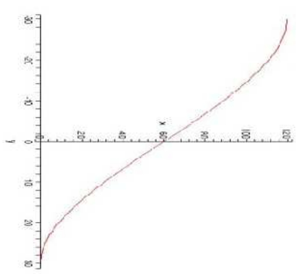
MO.
a) A csónak eredő sebessége mindig a pálya érintőjének irányába mutat.
$u = dx/dt$ és $v = dy/dt \quad \rightarrow \quad (dy/dt)\,/\,(dx/dt) = v\,/\,u = dy\,/\,dx$ a pálya érintője.
u függ *y*-tól, tehát az alábbi differenciálegyenletet kell megoldanunk, hogy a pálya egyenletét *y(x)* avagy *x(y)* alakban megkapjuk:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u_0}\frac{1}{1-\frac{4y^2}{L^2}} \,.$$

Szeparáljuk és integráljuk:

$$\int_{-L/2}^{y} \frac{u_0}{v}\left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right) dy = \int_0^x dx \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{u_0}{v}\left[y - \frac{4y^3}{3L^2}\right]_{-L/2}^{y} = \frac{u_0}{v}\left(y - \frac{4y^3}{3L^2} - \left(-\frac{L}{2} - \frac{4(-\frac{L}{2})^3}{3L^2}\right)\right) = \frac{u_0}{v}\left(y - \frac{4y^3}{3L^2} + \frac{L}{3}\right)$$ a pálya egyenlete.



Vagy: $\int \frac{u_0}{v}\left(1 - \frac{4y^2}{L^2}\right) dy = \int dx \quad \rightarrow \quad x = \frac{u_0}{v}\left(y - \frac{4y^3}{3L^2}\right) + K$

és tudjuk, hogy x = 0 –nál y = –L/2: $0=\frac{u_0}{v}\left(-\frac{L}{2}-\frac{4(-\frac{L}{2})^3}{3L^2}\right)+K=-\frac{u_0}{v}\frac{L}{3}+K$

vagyis $K=\frac{u_0}{v}\frac{L}{3}$ és $x=\frac{u_0}{v}\left(y-\frac{4y^3}{3L^2}+\frac{L}{3}\right)$.

b) A csónak átér, ha $y = L/2$, ezt behelyettesítve $x=\frac{2}{3}\frac{u_0}{v}L$.

2/13. A és B város 84 km-re vannak egymástól. Két biciklis elindul egy időben, az egyikük A-ból B-be 16 km/h, a másik B-ből A-ba 12 km/h sebességgel. Egy fecske is elindul velük egy időben A városból B város felé, de amikor találkozik a B-ből jövő biciklissel, visszafordul A felé, majd amikor találkozik az A-ból jövő biciklissel, visszafordul B felé, és így tovább. Mekkora utat tesz meg a fecske a biciklisták találkozásáig? A fecske sebessége 50 km/h óra, és egy szempillantás alatt meg tud fordulni.

MO. A megoldást nem úgy keressük, hogy a fecske és az egyik ill. másik biciklista találkozásának helyét és idejét számoljuk ki és a fecske által megtett utakat összegezzük, hanem a két biciklista találkozásáig eltelt összes időt számoljuk ki, mert a fecske addig végig repül, így az idő ismeretében az általa megtett út könnyebben kiszámolható.
A találkozásig eltelt idő
- az egyik biciklistához rögzített koordinátarendszerben: mivel a biciklisták egymással szembe haladnak, a másik biciklista sebessége az origóban lévőhöz képest 16+12 = 28 km/h, kezdetben a távolság köztük 84 km, tehát t = 84 / 28 = 3 h.
- az úthoz rögzített koordinátarendszerben: az origó A városban van, az onnan induló biciklista koordinátája $x_1 = 16\,t$, a B városból indulóé pedig $x_2 = 84 - 12\,t$. Találkozáskor $x_1 = x_2$: $16\,t = 84 - 12\,t \rightarrow t = 3$ h.
A fecske által megtett út s = 3 · 50 = 150 km.

2/14. Egy villamosvonalon a villamosok T időközönként járnak c sebességgel. A pálya mellett gépkocsi halad v sebességgel. Mennyi időközönként találkozik a gépkocsi villamosokkal?

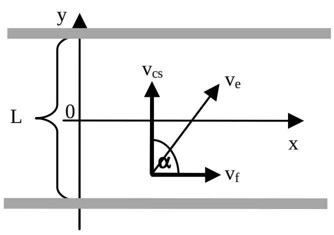
MO. Írjuk fel egy villamoshoz rögzített koordinátarendszerben az autó sebességét:
ha az autó és a villamosok ellenkező irányba mennek: $v_{rel} = v + c$
ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és v > c: $v_{rel} = v - c$
ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és v < c: $v_{rel} = c - v$
A villamosok távolsága egymástól d = c · T,
ekkora távolságot kell megtenni az autónak, tehát az ehhez szükséges idő
$\Delta t = c \cdot T / (v + c)$, ha az autó és a villamosok ellenkező irányba mennek,
$\Delta t = c \cdot T / (v - c)$, ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és v > c, és
$\Delta t = c \cdot T / (c - v)$, ha az autó és a villamosok egy irányba mennek és v < c .

2/15. Lelépjük egy szekér hosszát menet közben: a szekérrel egy irányba menve 'a' lépésnek mérjük, szembe menve pedig 'b' lépésnek mérjük. Milyen hosszú a szekér?

MO. A szekér sebessége v_{sz}, az emberé v_e.
Ha egy irányba mennek, akkor t_1 idő alatt ér el az ember a szekér végétől a szekér elejéig, ezalatt
$v_e t_1 = a$ (1) lépést tesz meg, és $v_e t_1 = v_{sz} t_1 + L$ (2)
Ha szembe mennek, akkor a t_2 idő alatt jut el az ember a szekér elejétől a végéhez, ezalatt
$v_e t_2 = b$ (3) lépést tesz meg, és $(v_e + v_{sz})\, t_2 = L$ (4)
Ez 4 egyenlet 5 ismeretlennel, ügyesen kell rendezgetni. Pl. (1)-et behelyettesítve (2)-be $v_{sz} t_1 = a - L$, másrészt (3)-at behelyettesítve (4)-be $v_{sz} t_2 = L - b$, és a két egyenletet elosztva $t_1/t_2 = (a-L)/(L-b)$. Ugyanakkor (1)-et elosztva (2)-vel $t_1/t_2 = a/b$. Ezeket összevetve $(a-L)/(L-b) = a/b$, amiből $L=\frac{2ab}{a+b}$

2/16. Folyóvíz sebessége 3 m/s, és van egy csónakunk, ami a vízhez képest 4 m/s sebességgel tud menni. Mekkora legyen a folyó sodrával bezárt szög, ha
a) a legrövidebb idő alatt;
b) a legrövidebb úton szeretnénk átérni a túlpartra?

MO. a) A csónak orra mutasson a túlsó part felé, azaz $\alpha = 90°$.



b) A csónak eredő sebessége legyen merőleges a folyó sodrára, azaz a $\beta = 138{,}6°$.