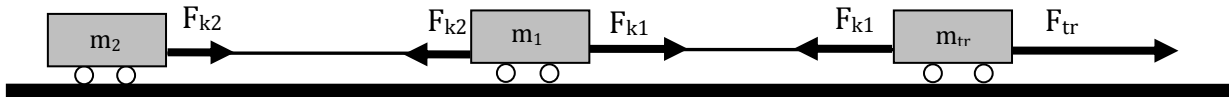


3/1. Egy traktor két pótkocsit vontat nyújthatatlan drótkötelekkel. Mekkora erő feszíti a köteleket, ha indításnál a traktor 1 perc alatt gyorsít fel 40 km/h sebességre?

A traktor tömege 3 t, a pótkocsik tömege 2-2 t, a gördülő ellenállási együttható 0,1, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.



MO. Jelölje

F_{tr} az út által az traktorra a mozgás irányába kifejtett erőt;

F_{k1} ill. F_{k2} a kötél erőket;

$F_{ny, tr}$, $F_{ny,1}$ és $F_{ny,2}$ a talaj által a traktorra, ill. pótkocsikra kifejtett nyomóerőket;

$F_{s, tr}$, $F_{s,1}$ és $F_{s,2}$ a gördülési súrlódási erőket.

A mozgásegyenletek

vektori alakban:

$$\text{traktor: } m_{tr} \mathbf{a}_{tr} = m_{tr} \mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny, tr} + \mathbf{F}_{tr} + \mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{s, tr}$$

$$\text{első pótkocsi: } m_1 \mathbf{a}_1 = m_1 \mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny,1} + \mathbf{F}_{k1} + \mathbf{F}_{k2} + \mathbf{F}_{s,1}$$

$$\text{második pótkocsi: } m_2 \mathbf{a}_2 = m_2 \mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny,2} + \mathbf{F}_{k2} + \mathbf{F}_{s,2}$$

függőleges komponensei (a pozitív irányt felfelé választva):

$$\text{traktor: } m_{tr} a_{tr,z} = -m_{tr} g + F_{ny, tr}$$

$$\text{első pótkocsi: } m_1 a_{1,z} = -m_1 g + F_{ny,1}$$

$$\text{második pótkocsi: } m_2 a_{2,z} = -m_2 g + F_{ny,2}$$

Mivel a testek a felületen mozognak, a függőleges gyorsuláskomponensek nullák

→ ebből tudjuk a nyomóerőket: $F_{ny, tr} = m_{tr} g$, $F_{ny,1} = m_1 g$, $F_{ny,2} = m_2 g$.

vízszintes komponensei (a haladási irányt választva pozitívnak):

$$\text{traktor: } m_{tr} a_{tr,x} = F_{tr} - F_{k1} - F_{s, tr}$$

$$\text{első pótkocsi: } m_1 a_{1,x} = F_{k1} - F_{k2} - F_{s,1}$$

$$\text{második pótkocsi: } m_2 a_{2,x} = F_{k2} - F_{s,2}$$

Mivel a kötélnyújthatatlan, ezért a gyorsulások megegyeznek: $a_{tr,x} = a_{1,x} = a_{2,x} = a$;

a súrlódási erők nagysága $F_s = \mu F_{ny} = \mu mg$, ezeket behelyettesítve:

$$\text{traktor: } m_{tr} a = F_{tr} - F_{k1} - \mu m_{tr} g$$

$$\text{első pótkocsi: } m_1 a = F_{k1} - F_{k2} - \mu m_1 g$$

$$\text{második pótkocsi: } m_2 a = F_{k2} - \mu m_2 g$$

Ezekből sorra kiszámolhatók a kérdéses erők, ha ismerjük a gyorsulást.

Mivel 1 perc alatt gyorsít a traktor 40 km/h sebességre állandó gyorsulással:

$$a = \Delta v / \Delta t = (40/3,6 - 0) / 60 \approx 0,1852 \text{ m/s}^2, \text{ tehát}$$

$$F_{k2} = m_2(a + \mu g) = 2000 \cdot (0,1852 + 0,1 \cdot 9,81) \approx 2332 \text{ N},$$

$$F_{k1} = F_{k2} + m_1(a + \mu g) = 2332 + 2000 \cdot (0,1852 + 0,1 \cdot 9,81) \approx 4665 \text{ N},$$

$$F_{tr} = F_{k1} + m_{tr}(a + \mu g) = 4665 + 3000 \cdot (0,1852 + 0,1 \cdot 9,81) \approx 8163 \text{ N}.$$

MEGJEGYZÉSEK:

➤ A drótkötelek tömegét elhanyagoltuk. Ha figyelembe kellene venni a tömegüket, akkor nem lenne igaz, hogy a két végükön ébredő erő megegyezik, hanem a kötelekre is fel kellene írni mozgásegyenletet és abból tudnánk kiszámolni az erőket.

- Vegyük észre, hogy a fenti feladatban a gyorsulás az egyes testek mozgásegyenletéből kifejezve

$$a = \frac{F_{tr} - F_{k1} - F_{s,tr}}{m_{tr}} = \frac{F_{k1} - F_{k2} - F_{s,1}}{m_1} = \frac{F_{k2} - F_{s,2}}{m_2},$$

vagyis az egyes testekre előre- ill. hátrafelé ható erők különbsége arányos a tömegükkel (ugyanaz igaz kötelekre is).

- Tekintsük a 3 testet egy rendszernek és adjuk össze a 3 testre felírt mozgásegyenletet:

$$(m_{tr} + m_1 + m_2)a = F_{tr} - F_{s,tr} - F_{s,1} - F_{s,2}$$

Ekkor az F_{k1} , F_{k2} kötélérők kiesnek, mivel ők a 3 testből álló rendszerben belső erők. A 3 testből álló rendszer gyorsulását a külső erők eredője határozza meg:

$$a = \frac{F_{tr} - F_{s,tr} - F_{s,1} - F_{s,2}}{m_{tr} + m_1 + m_2}.$$

3/2. Mekkora lejtővel párhuzamos erő szükséges ahhoz, hogy állandó gyorsulással 2 s alatt nyugalmi helyzetből indulva felhúzzunk egy 6 kg tömegű testet egy 30°-os, 1 m magas lejtőn, ha a súrlódási együttható 0,2?

MO. A mozgásegyenlet

vektori alakban: $\mathbf{ma} = \mathbf{F} + \mathbf{mg} + \mathbf{F}_{ny} + \mathbf{F}_s$ \mathbf{F} az általunk kifejtett lejtővel párhuzamos húzóerő
Az erőket merőleges komponensekre kell bontani, de lejtő esetén nem függőleges és vízszintes, hanem lejtőre merőleges és lejtővel párhuzamos komponensekre bontjuk:

lejtőre merőleges (kifelé pozitív): $ma_{\perp} = 0 - mg \cdot \cos\alpha + F_{ny} + 0$

lejtővel párhuzamos (felfelé pozitív): $ma_{\parallel} = F - mg \cdot \sin\alpha + 0 - F_s$

Mivel a testek a felületen mozognak, a lejtőre merőleges gyorsuláskomponens nulla

→ ebből tudjuk a nyomóerőt: $F_{ny} = mg \cdot \cos\alpha$;

a súrlódási erő nagysága pedig $F_s = \mu F_{ny} = \mu mg \cdot \cos\alpha$, ezt behelyettesítve a lejtővel párhuzamos egyenletbe: $ma = F - mg \cdot \sin\alpha - \mu mg \cdot \cos\alpha$.

A gyorsulás kiszámolható az időből, kezdősebességből és a megtett útból:

a lejtő hossza, azaz a megtett út $s = h/\sin\alpha = 2$ m; $v_0 = 0 \rightarrow s = \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow a = 2s/t^2 = 1$ m/s².

A mozgásegyenletből

⇒ $F = m(a + g \sin\alpha + \mu g \cos\alpha) = 6 \cdot (1 + 10 \cdot \sin 30^\circ + 0,2 \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ) \approx 46,39$ N.

MEGJEGYZÉSEK:

- Általánosan a lejtővel párhuzamosan a pozitív irányt választhatjuk felfelé vagy lefelé is. Azt az irányt célszerű pozitívnak választani, amerre a test mozog; ekkor a súrlódási erő negatív előjelű lesz (fékez), a gravitációs erő $mg \cdot \sin\alpha$ komponensének előjele pedig az irányválasztástól függ (pozitív, vagyis gyorsít, ha a test lefelé mozog, ill. negatív, vagyis fékez, ha a test felfelé mozog).

- Ha a gyorsulás negatívra jön ki, akkor a test lassul. Ha lefelé haladva lassul $v=0$ -ra, akkor ott a test megáll és a tapadási súrlódási erő miatt ott is marad (ha egyéb erő nem hat rá). Ha felfelé haladva lassul $v=0$ -ra, akkor a tapadási súrlódási együttható értékétől függ, hogy egy helyben marad vagy elkezd visszacsúszni lefelé. Ha visszacsúszik, akkor a csúzási súrlódási erő iránya megváltozik (mivel azt a sebesség iránya szabja meg).

- Ha van olyan erő (mg -n és F_{ny} -n kívül, pl. egy külső húzó/tolóerő), aminek van a lejtőre merőleges komponense, akkor módosul a mozgásegyenletnek a lejtőre merőleges komponense és emiatt változik F_{ny} nagysága, és azzal együtt F_s nagysága is. Ha a külső erő „belenyomja” a testet a lejtőbe, akkor F_{ny} (és F_s) nagysága nő, ha „elemeli”, akkor csökken.

Itt egy látványos bizonyíték arra, hogy a súrlódási erő a nyomóerővel arányos (ebben az esetben a tapadási súrlódási erő a cipő és a fal között): <http://www.videoman.gr/106419>

3/3. Egy kettős lejtő egyik oldala $\alpha = 50^\circ$ -ot, a másik $\beta = 58^\circ$ -ot zár be a vízszintessel. Két testet összekötünk egy (nyújthatatlan, elhanyagolható tömegű) $L = 2$ m hosszú kötéllel. Az 50° -os oldalra tesszük az $m_1 = 14$ dkg-os testet, az 58° -os oldalra az $m_2 = 10$ dkg-os testet, úgy, hogy a kötélnak pont a fele az egyik, fele a másik oldalon van.

A testek és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható $0,12$, a tapadási súrlódási együttható $0,15$. Mekkora, milyen irányú a testek gyorsulása, melyik test ér fel a lejtő tetejére és mikor, ha

- a 14 dkg-os testet meglökjük lefelé 1 m/s-os sebességgel;
- a 10 dkg-os testet meglökjük lefelé 1 m/s-os sebességgel;
- a testeket kezdősebesség nélkül tesszük a lejtőre?

MO. $m_1 = 0,14$ kg, $\alpha = 50^\circ$; $m_2 = 0,10$ kg; $\beta = 58^\circ$; $\mu = 0,12$; $\mu_t = 0,15$; $v_0 = 1$ m/s.

Az előző feladat mintájára tudjuk, hogy $F_{ny1} = m_1 g \cos\alpha$ ill. $F_{ny2} = m_2 g \cos\beta$; F_k a kötélerő.

Pozitív iránynak a kezdősebesség irányát vesszük fel.

a) $m_1 a_a = m_1 g \sin\alpha - F_k - \mu m_1 g \cos\alpha$

$$m_2 a_a = -m_2 g \sin\beta + F_k - \mu m_2 g \cos\beta$$

$$\rightarrow a_a = (m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha - m_2 g \sin\beta - \mu m_2 g \cos\beta) / (m_1 + m_2) \approx 0,2201 \text{ m/s}^2$$

Tehát a kezdősebesség irányában gyorsulnak is a testek:

$$v = v_0 + a_a t = 1 + 0,2201 t; \quad s = v_0 t + \frac{1}{2} a_a t^2 = 1 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 0,2201 \cdot t^2$$

A kötélen felének megfelelő utat, azaz 1 m-t kell megtennie a 10 dkg-os testnek, hogy felérjen:

$$s = L/2 = 1 = v_0 t_a + \frac{1}{2} a_a t_a^2 = 1 \cdot t_a + \frac{1}{2} \cdot 0,2201 \cdot t_a^2 \rightarrow t_a \approx 0,9090 \text{ s alatt ér fel a } 10 \text{ dkg-os test.}$$

b) $m_1 a_b = -m_1 g \sin\alpha + F_k - \mu m_1 g \cos\alpha$

$$m_2 a_b = m_2 g \sin\beta - F_k - \mu m_2 g \cos\beta$$

$$\rightarrow a_b = (-m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha + m_2 g \sin\beta - \mu m_2 g \cos\beta) / (m_1 + m_2) \approx -1,650 \text{ m/s}^2$$

Tehát a testek most lassulnak:

$$v = v_0 + a_b t = 1 - 1,650 t \rightarrow t^* = 1/1,650 \approx 0,6061 \text{ s alatt megállnak, ezalatt}$$

$$s^* = v_0 t^* + \frac{1}{2} a_b t^{*2} = 1 \cdot t^* - \frac{1}{2} \cdot 1,650 \cdot t^{*2} = 1 \cdot 0,6061 - \frac{1}{2} \cdot 1,650 \cdot 0,6061^2 \approx 0,3030 \text{ m-t tesznek}$$

meg, vagyis nem ér fel a 14 dkg-os test, hanem az **a)** részben kiszámolt gyorsulással indulnak el a testek ebből a helyzetből (zérus kezdősebességgel), és a 10 dkg-os test fog felérkezni

$$s = \frac{1}{2} a_a t^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,2201 \cdot t^2 = L/2 + s^* \approx 1,303 \rightarrow t \approx 3,441 \text{ s alatt (összesen } 4,047 \text{ s alatt).}$$

c) Nem tudjuk, megindulnak-e a testek egyáltalán, és ha igen, merrefelé; vagyis nem tudjuk, tapadási vagy csúszási súrlódást kell-e figyelembe vennünk, illetve milyen irányba vegyük fel őket.

Megoldhatjuk úgy a feladatot, hogy tetszőlegesen kiválasztjuk az egyik irányt, felírjuk annak megfelelő előjelekkel az egyenleteket, és ha pozitív gyorsulást kapunk, akkor azzal számolunk tovább; de ha negatívra jön ki a gyorsulás, akkor fel kell írni az egyenleteket a másik iránynak megfelelő előjelekkel és újra megoldani. Mivel ez elég sok számolás, tájékozódásként számoljuk ki a gravitációs erő lejtővel párhuzamos komponensét az egyes testekre, és vegyük azt az irányt pozitívnak, amerre ezek alapján (vagyis a súrlódás elhanyagolásával) indulnának.

$$m_1 g \sin\alpha \approx 1,072 \text{ N} > m_2 g \sin\beta \approx 0,8480 \text{ N}, \text{ tehát a } 14 \text{ dkg-os test indulna lefelé.}$$

Ha nem lenne súrlódás, a két erő különbsége, azaz

$$m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\beta \approx 0,2244 \text{ N gyorsítaná a testeket.}$$

Kérdés, hogy a tapadási súrlódási erő tudja-e ezt ellensúlyozni.

$$F_{t,max,1} = \mu_t m_1 g \cos \alpha \approx 0,1350 \text{ N}; \quad F_{t,max,2} = \mu_t m_2 g \cos \beta \approx 0,0795 \text{ N}, \quad F_{t,max,1} + F_{t,max,2} \approx 0,2145 \text{ N}$$

$F_{t,max,1} + F_{t,max,2} < m_1 g \sin \alpha - m_2 g \sin \beta$, tehát a testek elkezdnek csúszni.

Hasonlóan a fentiekhez (most $v_0 = 0$):

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a_a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (L/2)}{a_a}} = \sqrt{\frac{2}{0,2201}} \approx 3,014 \text{ s} \text{ kell ahhoz, hogy a } 10 \text{ dkg-os test felérjen.}$$

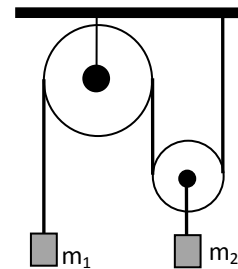
MEGJEGYZÉS:

Ha $F_{t,max,1} + F_{t,max,2} > m_1 g \sin \alpha - m_2 g \sin \beta$ lenne, akkor

$$F_{t,1} \leq F_{t,max,1} \text{ és } F_{t,2} \leq F_{t,max,2} \text{ és } F_{t,1} + F_{t,2} = m_1 g \sin \alpha - m_2 g \sin \beta .$$

Két test esetén a helyzet bonyolult, de egyetlen test esetén F_t értéke meghatározható.

3/4. (DRS 3.8) Az ábrán látható elrendezésben a csigák és a kötéltömege elhanyagolható, a kötélt nyújthatatlan, a csigák súrlódásmentesek. Mekkora az egyes tömegek gyorsulása és az egyes köteleket feszítő erő, ha $m_1 = 0,6 \text{ kg}$ és $m_2 = 0,8 \text{ kg}$?



MO. Mivel a kötélt és a csiga tömege elhanyagolható és a csiga súrlódásmentes, ezért a csigákon átvett kötélt az F_{k1} kötélerő nagysága a kötélt mentén állandó; az m_2 tömeget a mozgócsigához rögzítő kötéltben lévő erő nagysága pedig F_{k2} .

Kötéltel összekötött testek esetén az egyes erők előjelét nem a függőlegesen felvett z tengelyhez szokás viszonyítani, hanem a kötélt mentén szokás felvenni egy pozitív irányt.

Tételezzük fel, hogy m_1 fog lefelé gyorsulni. Ezzel a feltételezéssel a mozgásegyenletek:

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_{k1}$$

$$m_2 a_2 = F_{k2} - m_2 g$$

A két test gyorsulása most nem egyenlő. Látható, hogy ha az A pontot fixnek képzeljük el, ami körül a csiga elfordul, akkor amíg az O pont $\Delta \ell$ -nyit emelkedik, addig a B pont $2\Delta \ell$ -nyit emelkedik. Másrészt, mivel a kötélt hossza állandó, a csiga emelkedésekor „áttevérdik” $\Delta \ell$ -nyi a jobb oldali álló kötélt részről a túloldalra.

(A csiga peremén futó kötélt hossza változatlan, így a csiga mérete nem számít.)

$$\text{Mivel } a = \ddot{x} \rightarrow a_2 = a_1/2 .$$

Az F_{k1} és F_{k2} kötélerőkre felírjuk a mozgócsiga mozgásegyenletét:

$$m_{cs} a_{cs} = 2 F_{k1} - F_{k2} , \text{ amiből } F_{k2} = 2 F_{k1} , \text{ mivel } m_{cs} = 0 .$$

Ezeket behelyettesítve

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_{k1}$$

$$m_2 a_1/2 = 2 F_{k1} - m_2 g$$

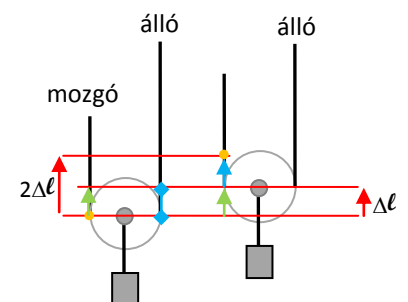
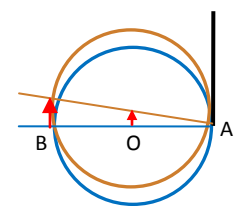
amiből

$$a_1 = \frac{2m_1 - m_2}{2m_1 + \frac{m_2}{2}} g = 2,50 \text{ m/s}^2 \text{ (pozitív, tehát tényleg lefelé gyorsul),}$$

$$a_2 = 1,25 \text{ m/s}^2 \text{ (tényleg felfelé),}$$

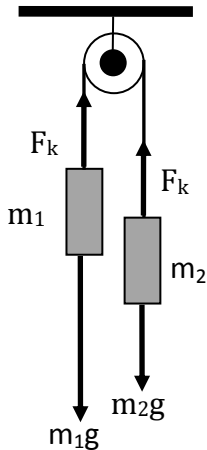
$$F_{k1} = m_1 (g - a_1) = 4,5 \text{ N}$$

$$F_{k2} = 2 F_{k1} = m_2 (g + a_2) = 9,0 \text{ N}$$



Gyakorló feladatok a zárthelyire:

3/5. (DRS 3.3, volt Bevezető fizikán) Csigán átvett nyújthatatlan kötélen egyik végén $m_1 = 2$ kg, másik végén $m_2 = 1$ kg tömegű test lóg. A kötélen súrlódásmentesen mozoghat. Írjuk fel az egyes testek mozgásegyenleteit! Határozzuk meg a kötélen fellépő feszítőerőt, és az egyes testek gyorsulását! (A csiga tömege elhanyagolható.)



MO.

Itt most látszik, hogy m_1 fog lefelé gyorsulni:

$$m_1 a = m_1 g - F_k$$

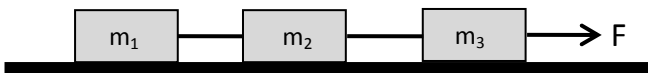
$$m_2 a = F_k - m_2 g$$

Ebből

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{g}{3} = 3,27 \text{ m/s}^2 \quad \text{és}$$

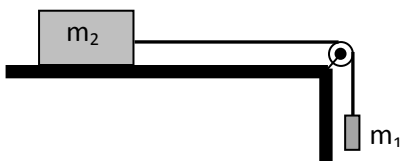
$$F = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{4g}{3} = 13,08 \text{ N}$$

3/6. (DRS 3.11) Vízszintes súrlódásmentes felületen $m_1 = 3$ kg tömegű test, kötélen hozzákötve $m_2 = 7$ kg tömegű test, kötélen hozzákötve $m_3 = 10$ kg tömegű test, és azt húzzuk $F = 100$ N erővel vízszintesen. A kötelek nyújthatatlanok, a tömegek elhanyagolható. Mekkora a testek gyorsulása és mekkorák a kötélerők?

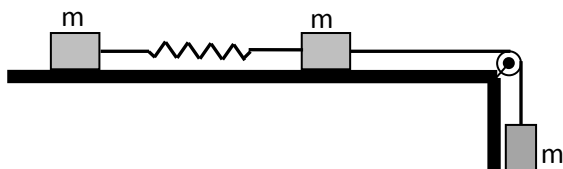


3/7. (DRS 3.5) Vízszintes asztalon $m_2 = 2$ kg tömegű test, az asztal szélén lévő csigán átvett kötélen hozzákötve $m_1 = 0,5$ kg tömegű test lóg függőlegesen. Mekkora a kötélen egymáshoz kötött testek gyorsulása és a kötélen feszítő erő, ha az m_2 tömegű test

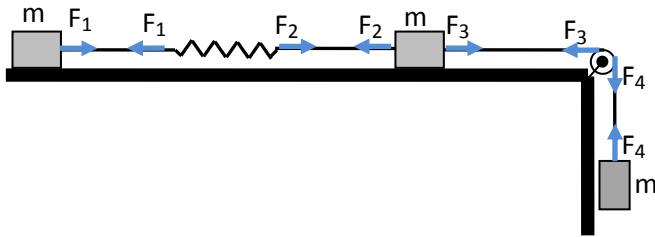
- a vízszintes felületen súrlódás nélkül csúszhat;
- és a vízszintes felület közötti súrlódási együttható $\mu = 0,2$?



3/8. (DRS 3.12, volt Bevezető fizikán) Mennyivel nyúlik meg a két test közé iktatott rugó, amikor az összekapcsolt rendszer egyenletesen gyorsuló mozgásban van? Mindhárom test tömege $m = 1$ kg, a súrlódási együttható $\mu = 0,2$, a rugóállandó $k = 4$ N/cm, a csiga, a rugó és a kötelek tömege elhanyagolható, a csiga súrlódásmentes, a kötelek nyújthatatlanok.



MO.



Kötélerők: egy-egy kötélszakasz két végén azonos nagyságú az erő, mert a kötelek tömege elhanyagolható.

$F_1 = F_2$, mert a rugó tömege elhanyagolható (ha lenne tömege, a két kötélrő különbsége gyorsítaná a rugót). Ez a kötélrő lesz arányos a rugó megnyúlásával: $F_1 = F_2 = F_r = k \cdot \Delta l$.

$F_3 = F_4$, mert a csiga tömege elhanyagolható és súrlódásmentes.

A mozgásegyenletek (F_1 helyett is F_2 -t, F_4 helyett is F_3 -at írva):

a lógó testre $ma = mg - F_3$

a középső testre $ma = F_3 - F_2 - F_s = F_3 - F_2 - \mu mg$

a bal oldali testre $ma = F_2 - F_s = F_2 - \mu mg$

Ezekből $a = \frac{mg - 2\mu mg}{3m} = \frac{1 - 2\mu}{3} g = \frac{1 - 2 \cdot 0,2}{3} \cdot 10 = 2 \text{ m/s}^2$.

A rugó megnyúlását F_2 -ből számoljuk, azt pedig a bal oldali test egyenletéből kapjuk meg:

$F_2 = ma + \mu mg = 1 \cdot (2 + 0,2 \cdot 10) = 4 \text{ N}$ $\Delta l = F_2 / k = 1 \text{ cm}$.

3/9 . Vízszintes asztallapon kiskocsi mozog. A kiskocsit egy csigán átvett kötélre akasztott súly mozgatja.

$m = 100 \text{ g}$ esetén a kiskocsi 3 s alatt,

$m = 200 \text{ g}$ esetén a kiskocsi 1 s alatt

teszi meg az 1 m -es utat nyugalmi helyzetből

kiindulva. Mekkora a kocsi tömege, és

mekkora a súrlódási együttható? $g = 10 \text{ m/s}^2$

MO.

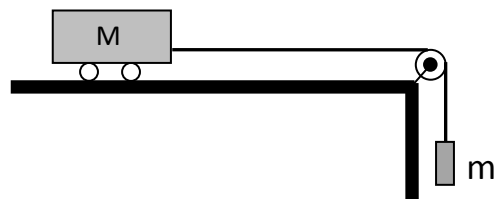
A mozgásegyenletek:

$$\left. \begin{aligned} Ma &= F_k - \mu Mg \\ ma &= mg - F_k \end{aligned} \right\} \Rightarrow M(a + \mu g) = m(g - a)$$

$m_1 = 0,1 \text{ kg}$ esetén $a_1 = 2s / t_1^2 = 2 \cdot 1 / 3^2 = 2/9 \text{ m/s}^2$: $M(2/9 + 10\mu) = 0,1(10 - 2/9)$

$m_2 = 0,2 \text{ kg}$ esetén $a_2 = 2s / t_2^2 = 2 \cdot 1 / 1^2 = 2 \text{ m/s}^2$: $M(2 + 10\mu) = 0,2(10 - 2)$

$\Rightarrow M = 0,35 \text{ kg}, \mu = 0,257$



3/10. $\alpha = 20^\circ$ hajlásszögű lejtőre $m = 0,5 \text{ kg}$ tömegű testet helyezünk. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható $\mu = 0,2$, a tapadási súrlódási együttható $\mu_t = 0,4$.

a) Mekkora súrlódási erő hat a testre?

b) α értékét növelve milyen α_{krit} szögnél csúszik meg a test? Mekkora súrlódási erő hat rá onnantól?

MO.

a) A test mozgásegyenlete:

$$ma = mg \sin \alpha - F_t$$

Ha a test tapad a lejtőn, akkor $a = 0$

$$\rightarrow F_t = mg \sin \alpha = 0,5 \cdot 10 \cdot \sin 20^\circ \approx 1,710 \text{ N tapadási súrlódási erő kell hasson a testre.}$$

Ellenőrizni kell, hogy ez kisebb-e, mint a tapadási súrlódási erő maximális lehetséges értéke, ami

$$F_{t,\max} = \mu_t mg \cos \alpha = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 10 \cdot \cos 20^\circ \approx 1,879 \text{ N.}$$

$\alpha = 20^\circ$ hajlásszögű lejtőn tehát a test még tényleg nem csúszik meg, mert max. 1,879 N tapadási súrlódási erő léphetne fel a test és a lejtő között, de csak 1,710 N erő gyorsítja, ezért a test és a lejtő között fellépő tapadási súrlódási erő $F_t = 1,710 \text{ N}$.

b) Határesetben F_t eléri $F_{t,\max}$ értékét, vagyis

$$ma = mg \sin \alpha_{\text{krit}} - F_{t,\max} = mg \sin \alpha_{\text{krit}} - \mu_t mg \cos \alpha_{\text{krit}} = 0$$

$$\rightarrow \sin \alpha_{\text{krit}} = \mu_t \cos \alpha_{\text{krit}} \rightarrow \mu_t = 0,4 = \tan \alpha_{\text{krit}} \rightarrow \alpha_{\text{krit}} = 21,80^\circ.$$

A lejtő hajlásszögét tovább növelve a csúszó testet

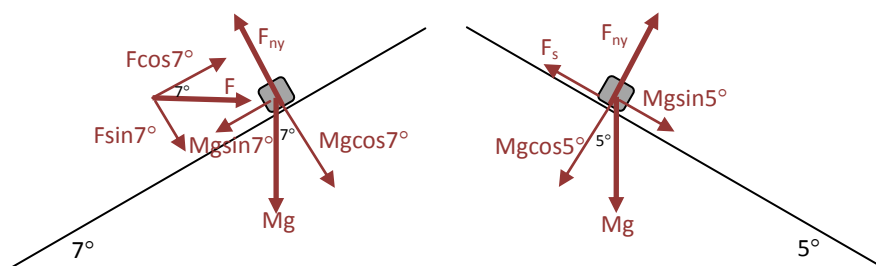
$$F_s = \mu mg \cos \alpha = 0,2 \cdot 0,5 \cdot 10 \cdot \cos \alpha \text{ csúszási súrlódási erő fékezi. } (\alpha_{\text{krit}} \text{ esetén ez } 0,9285 \text{ N.})$$

3/11. Egy kamionos a következőt mesélte a 2013. március 14-i kalandjairól az M1-es autópályáról.

a) Egyszer csak egy 7° -os emelkedő aljához érkezett, ami úgy el volt jegesedve, hogy a súrlódás egészen zérusra csökkent. Szerencsére viszont a szél éppen hátulról fúj és nagyon erős volt, így a meglazult ponyváját vitorlaként kifeszítette és úgy jutott fel az emelkedőn. A szél állandó erővel vízszintesen fúj, és őt állandó, $v = 18 \text{ km/h}$ sebességgel vitte fel a lejtőn. Mekkora erőt fejtett ki a szél a kamionra? A kamion tömege $M = 20 \text{ t}$.

b) A domb teteje után a túloldalán 5° -os lejtővel folytatódott az út, ami szélárnyékban volt, megszűnt a szél ereje; viszont nagyon havas volt, így a kamionra $\mu_g = 0,12$ gördülési súrlódási együtthatóval most már gördülési ellenállási erő hatott (az üzemanyaga már elfogyott, nem tudott motorral menni, csak gurult). Ekkor kapta meg a kamionos a BM-től az sms-t, és azt rögtön el is olvasta, ami 30 s-ig tartott. Mekkora lett a sebessége és mekkora utat tett meg ezalatt a 30 s alatt? (A kamion a lejtő tetejéről $v = 18 \text{ km/h}$ sebességről indult, amikor elkezdte olvasni az sms-t.)

MO.



a) A kamion az emelkedőn állandó sebességgel halad, tehát a gyorsulása zérus.

$$\text{A lejtővel párhuzamos komponensek } Mg \cdot \sin 7^\circ - F \cdot \cos 7^\circ = 0 \rightarrow F = Mg \cdot \tan 7^\circ \approx 24557 \text{ N}$$

b) A kamiont a lejtőn az Mg lejtővel párhuzamos komponensének és a súrlódási erőnek az eredője gyorsítja: $Ma = Mg \sin 5^\circ - F_s$

$$F_s = \mu_g \cdot F_{ny} = \mu_g \cdot Mg \cos 5^\circ, \text{ mivel a lejtőre merőleges komponensből látjuk, hogy } F_{ny} = Mg \cos 5^\circ.$$

Tehát $a = g (\sin 5^\circ - \mu_g \cdot \cos 5^\circ) = -0,324 \text{ m/s}^2$, a kamion lassulni fog:

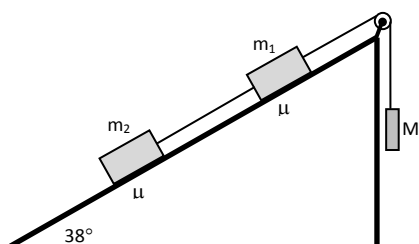
$$v = v_0 + a \cdot t = (18/3,6) - 0,324 \cdot t = 5 - 0,324 \cdot t$$

és **megáll** $t = 5/0,324 \approx 15,44 \text{ s}$ alatt.

$$\text{Így tehát a megtett út } s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 5 \cdot 15,44 - \frac{1}{2} \cdot 0,324 \cdot 15,44^2 \approx \mathbf{38,6 \text{ m}} [= v_0^2 / (2a)]$$

3/12. Az ábra szerint elhanyagolható tömegű nyújthatatlan kötéllel egymáshoz kötünk egy M , m_1 és m_2 tömegű testet és 38° -os hajlásszögű lejtőre tesszük. A lejtő tetején egy ideális (súrlódásmentes, elhanyagolható tömegű) csiga van. Az m_1 és m_2 tömegű testek és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható $\mu = 0,08$.

- a) Mekkora a testek gyorsulása és mekkorák a kötélerők?
 b) Ha az M tömegű testet eltávolítjuk, mekkora erővel kell húzni a kötelet, hogy az m_1 és m_2 tömegű testek gyorsulása ne változzon?
 c) Hányszorosára nő a testek gyorsulása, ha az M tömeg kétszeresére nő? (a kötelet nem húzzuk)



$$M = 7 \text{ kg}$$

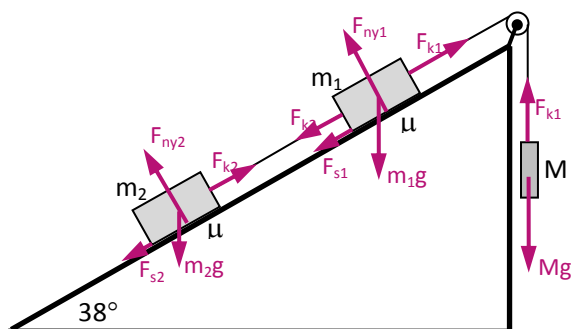
$$m_1 = 5 \text{ kg}$$

$$m_2 = 3 \text{ kg}$$

$$\mu = 0,08$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

MO.



a) Az m_1 -re ill. m_2 -re a lejtő által kifejtett nyomóerő $F_{ny1} = m_1 g \cos 38^\circ$ ill. $F_{ny2} = m_2 g \cos 38^\circ$, a súrlódási erők $F_{s1} = \mu F_{ny1} = \mu m_1 g \cos 38^\circ$ ill. $F_{s2} = \mu F_{ny2} = \mu m_2 g \cos 38^\circ$.

Tegyük fel, hogy az M tömeg lefelé gyorsul (mert súrlódási erők nélkül jobbra $Mg = 70 \text{ N}$, balra $(m_1+m_2)g \sin 38^\circ \approx 49,25 \text{ N}$ hat a csigánál), így a lejtővel párhuzamosan

$$M a = Mg - F_{k1}$$

$$m_1 a = F_{k1} - F_{k2} - m_1 g \sin 38^\circ - F_{s1} = F_{k1} - F_{k2} - m_1 g \sin 38^\circ - \mu m_1 g \cos 38^\circ$$

$$m_2 a = F_{k2} - m_2 g \sin 38^\circ - F_{s2} = F_{k2} - m_2 g \sin 38^\circ - \mu m_2 g \cos 38^\circ$$

Ezekből
$$a = \frac{M - (m_1 + m_2)(\sin 38^\circ - \mu \cos 38^\circ)}{m_1 + m_2 + M} g \approx 1,047 \text{ m/s}^2$$

A gyorsulásra pozitív érték jött ki, tehát tényleg ebbe az irányba gyorsulnak a testek.

[Ha azzal a feltételezéssel írtuk volna fel az egyenleteket, hogy az M tömeg felfelé gyorsul, akkor $a = -1,72 \text{ m/s}^2$ jönne ki.]

A kötélerők:

$$F_{k2} = \frac{M m_2 (1 + \sin 38^\circ + \mu \cos 38^\circ)}{m_1 + m_2 + M} g \approx 23,50 \text{ N}; F_{k1} = \frac{M (m_1 + m_2) (1 + \sin 38^\circ + \mu \cos 38^\circ)}{m_1 + m_2 + M} g \approx 62,67 \text{ N}.$$

b) Ha m_1 és m_2 marad és a gyorsulásuk változatlan, akkor a kötélerők is változatlanok. Ez azt jelenti, hogy a kötelet a fent kiszámolt $F_{k1} \approx 62,67 \text{ N}$ nagyságú erővel kell húzni.

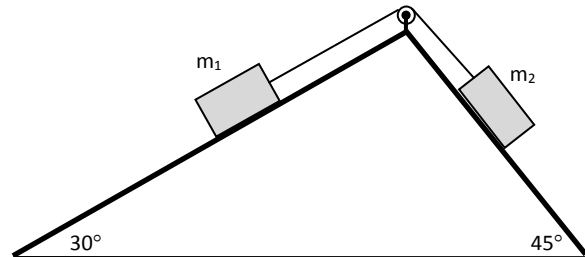
Megjegyzés: Azért nem $Mg = 70 \text{ N}$ nagyságú erővel, mert az az erő ahhoz volt szükséges, hogy mindhárom testet gyorsítsa, de most kisebb az össztömeg. Az $Mg - F_{k1} \approx 7,33 \text{ N}$ erő magát az M tömegű testet gyorsítja, így lesz annak is $7,33/7 \approx 1,047 \text{ m/s}^2$ nagyságú gyorsulása.

[Az $F_{k1} - m_1 g \sin 38^\circ - F_{s1} - m_2 g \sin 38^\circ - F_{s2} \approx 8,38 \text{ N}$ erő gyorsítja az $m_1 + m_2$ tömegeket ($8,38/8 \approx 1,047 \text{ m/s}^2$), az $F_{k1} - m_1 g \sin 38^\circ - F_{s1} - F_{k2} \approx 5,24 \text{ N}$ az m_1 tömeget ($5,24/5 \approx 1,047 \text{ m/s}^2$) és az $F_{k2} - m_2 g \sin 38^\circ - F_{s2} \approx 3,14 \text{ N}$ az m_2 tömeget ($3,14/3 \approx 1,047 \text{ m/s}^2$).]

c) A gyorsulás nem kétszeresére nő, mert ugyan Mg értéke kétszeresére nő, de az m_1 és m_2 testekre ható ellentétes irányú erők változatlanok. Az a) pontban felírt egyenletekbe $M = 14 \text{ kg}$ -ot behelyettesítve $a^* \approx 3,896 \text{ m/s}^2$, ez $\sim 3,7$ -szerese az előző gyorsulásnak.

3/13. A kettős lejtő

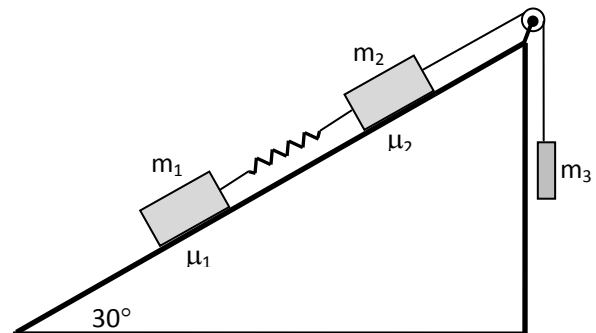
30° hajlásszögű oldalán $m_1 = 2 \text{ kg}$ tömegű, a 45° hajlásszögű oldalán $m_2 = 1 \text{ kg}$ tömegű test fekszik, a két test össze van kötve egy csigán átvetett kötéllal. A súrlódás elhanyagolható. Mekkora a testek gyorsulása?



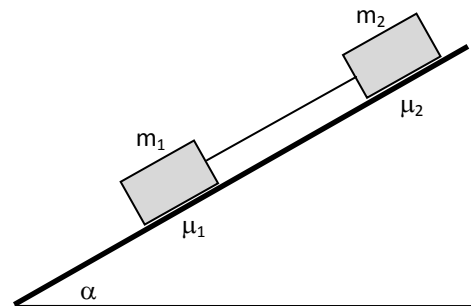
3/14. Mennyivel nyúlik meg a rugó?

$m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, $m_3 = 5 \text{ kg}$, $\mu_1 = 0,2$, $\mu_2 = 0,06$, $k = 0,5 \text{ N/cm}$.

A kötelek súlytalanok és nyújthatatlanok, a csiga súlytalan és súrlódásmentes, a lejtő nem tud elmozdulni.



3/15. α hajlásszögű lejtőre kötéllal összekötött két testet teszünk. A lejtő és az m_1 tömegű test közötti csúszási súrlódási együttható μ_1 , az m_2 tömegű testé pedig μ_2 . Mi a feltétele annak, hogy a két test között a kötélfeszesség legyen? Mekkora a kötél erő?



MO.

$$m_1 a = m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha - F_k$$

$$m_2 a = m_2 g \sin \alpha - \mu_2 m_2 g \cos \alpha + F_k$$

$$\rightarrow a = \left[\sin \alpha - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} \cos \alpha \right] g \quad \text{és} \quad F_k = \frac{m_1 m_2 (\mu_2 - \mu_1)}{m_1 + m_2} \cos \alpha g$$

A kötélfeszesség, ha $F_k \geq 0$, azaz ha $\mu_2 \geq \mu_1$ (az egyenlőség esetén feszességű kötéllal kell lenni)

VAGY: gyorsabb megoldás, ha a mozgásegyenleteket felírjuk a kötél erő nélkül, és azt mondjuk, hogy ha az alsó test gyorsulása legalább akkora, mint a felső test gyorsulása, akkor a kötélfeszesség marad.

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha \quad \rightarrow \quad a_1 = (\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) g, \quad \text{hasonlóan} \quad a_2 = (\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha) g$$

$$a_1 \geq a_2: \quad \sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha \geq \sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha \quad \rightarrow \quad \mu_2 \geq \mu_1$$

Nem zh-nak való feladat:

- a) Bizonyítsuk be: ha a testre ható erő mindig merőleges a test sebességére, akkor a test sebességének nagysága nem változik.
- b) Bizonyítsuk be: ha a testre ható erő mindig egyező irányú a test sebességével, akkor a test sebességének iránya nem változik.

MO.

Írjuk fel a test gyorsulását úgy, hogy deriváljuk a test sebességvektorát:

$$\mathbf{v} = v \mathbf{e}_v \rightarrow \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v} \mathbf{e}_v + v \dot{\mathbf{e}}_v \quad (\dot{\mathbf{e}}_v \text{ merőleges } \mathbf{e}_v \text{-re})$$

- a) Ha az erő, azaz a gyorsulás merőleges a test sebességére, akkor az \mathbf{e}_v irányú komponense zérus kell legyen, tehát $\dot{v} = 0$, $v = konst.$
- b) Ha az erő, azaz a gyorsulás egy irányú a sebességgel, vagyis az arra merőleges komponense zérus, akkor $\dot{\mathbf{e}}_v = 0$, vagyis $\mathbf{e}_v = konst.$

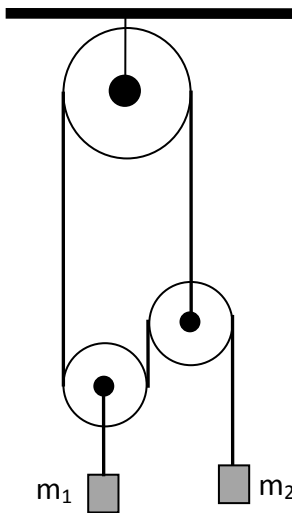
a) másként: nézzük meg, mit ad, ha deriváljuk a sebességvektor önmagával vett skaláris szorzatát:

$$\frac{d \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{v} \frac{d \mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

Ha \mathbf{v} és \mathbf{F} merőlegesek, akkor a skaláris szorzatuk zérus, tehát $\frac{d \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{dt} = 0$; de tudjuk, hogy

$\frac{d \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{dt} = \frac{d v \cdot v}{dt}$, vagyis a sebesség nagyságának négyzete állandó, azaz a sebesség nagysága állandó.

És egy cseles csigás feladat:



A kötélnyújthatatlan, a kötélnyújtás és a csigák tömege elhanyagolható, a csigák súrlódásmentesek. Határozzuk meg az m_1 és az m_2 tömeg gyorsulását és a kötélerőt!