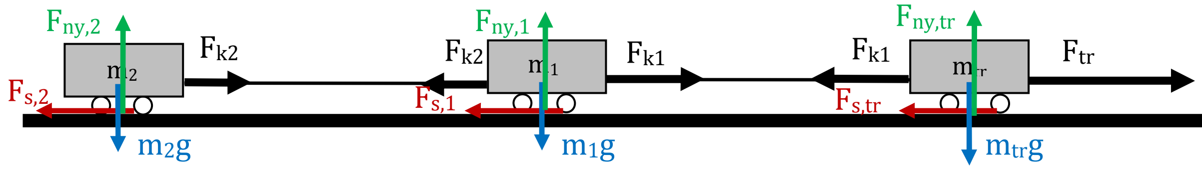
**4/1.** Egy traktor két pótkocsit vontat nyújthatatlan drótkötelekkel. Mekkora erő feszíti a köteleket, ha indításnál a traktor 1 perc alatt gyorsít fel 40 km/h sebességre?
A traktor tömege 3 t, a pótkocsik tömege 2-2 t, a gördülő ellenállási együttható 0,1 , g = 9,81 m/s$^2$.




**MO.** Jelölje

$\mathbf{F_{tr}}$ az út által az traktorra a mozgás irányába kifejtett erőt;

$\mathbf{F_{k1}}$ ill. $\mathbf{F_{k2}}$ a kötélerőket;

$\mathbf{F_{ny,tr}}$, $\mathbf{F_{ny,1}}$ és $\mathbf{F_{ny,2}}$ a talaj által a traktorra, ill. pótkocsikra kifejtett nyomóerőket;

$\mathbf{F_{s,tr}}$, $\mathbf{F_{s,1}}$ és $\mathbf{F_{s,2}}$ a gördülési súrlódási erőket.

A mozgásegyenletek
vektori alakban:

traktor: $m_{tr}\,\mathbf{a_{tr}} = m_{tr}\,\mathbf{g} + \mathbf{F_{ny,tr}} + \mathbf{F_{tr}} + \mathbf{F_{k1}} + \mathbf{F_{s,tr}}$

első pótkocsi: $m_1\,\mathbf{a_1} = m_1\,\mathbf{g} + \mathbf{F_{ny,1}} + \mathbf{F_{k1}} + \mathbf{F_{k2}} + \mathbf{F_{s,1}}$

második pótkocsi: $m_2\,\mathbf{a_2} = m_2\,\mathbf{g} + \mathbf{F_{ny,2}} + \mathbf{F_{k2}} + \mathbf{F_{s,2}}$

függőleges komponensei (a pozitív irányt felfelé választva):

traktor: $m_{tr}\,a_{tr,z} = -m_{tr}\,g + F_{ny,tr}$

első pótkocsi: $m_1\,a_{1,z} = -m_1\,g + F_{ny,1}$

második pótkocsi: $m_2\,a_{2,z} = -m_2\,g + F_{ny,2}$

Mivel a testek a felületen mozognak, a függőleges gyorsuláskomponensek nullák
→ ebből tudjuk a nyomóerőket: $F_{ny,tr} = m_{tr}\,g$ , $F_{ny,1} = m_1\,g$ , $F_{ny,2} = m_2\,g$ .

vízszintes komponensei (a haladási irányt választva pozitívnak):

traktor: $m_{tr}\,a_{tr,x} = F_{tr} - F_{k1} - F_{s,tr}$

első pótkocsi: $m_1\,a_{1,x} = F_{k1} - F_{k2} - F_{s,1}$

második pótkocsi: $m_2\,a_{2,x} = F_{k2} - F_{s,2}$

Mivel a kötél nyújthatatlan, ezért a gyorsulások megegyeznek: $a_{tr,x} = a_{1,x} = a_{2,x} = a$;
a súrlódási erők nagysága $F_s = \mu\,F_{ny} = \mu mg$, ezeket behelyettesítve:

traktor: $m_{tr}\,a = F_{tr} - F_{k1} - \mu m_{tr}g$

első pótkocsi: $m_1\,a = F_{k1} - F_{k2} - \mu m_1 g$

második pótkocsi: $m_2\,a = F_{k2} - \mu m_2 g$

Ezekből sorra kiszámolhatók a kérdéses erők, ha ismerjük a gyorsulást.
Mivel 1 perc alatt gyorsít a traktor 40 km/h sebességre állandó gyorsulással:

$a = \Delta v / \Delta t = (40/3{,}6 - 0) / 60 \approx 0{,}1852\ \mathrm{m/s^2}$ , tehát

$F_{k2} = m_2(a+\mu g) = 2000\cdot(0{,}1852+0{,}1\cdot 9{,}81) \approx 2332\ \mathrm{N}$ ,

$F_{k1} = F_{k2} + m_1(a+\mu g) = 2332 + 2000\cdot(0{,}1852+0{,}1\cdot 9{,}81) \approx 4665\ \mathrm{N}$ ,

$F_{tr} = F_{k1} + m_{tr}(a+\mu g) = 4665 + 3000\cdot(0{,}1852+0{,}1\cdot 9{,}81) \approx 8163\ \mathrm{N}$ .

**MEGJEGYZÉSEK:**

➢ A drótkötelek tömegét elhanyagoltuk. Ha figyelembe kellene venni a tömegüket, akkor nem lenne igaz, hogy a két végükön ébredő erő megegyezik, hanem a kötelekre is fel kellene írni mozgásegyenletet és abból tudnánk kiszámolni az erőket.

- Vegyük észre, hogy a fenti feladatban a gyorsulás az egyes testek mozgásegyenletéből kifejezve
$$a = \frac{F_{tr} - F_{k1} - F_{s,tr}}{m_{tr}} = \frac{F_{k1} - F_{k2} - F_{s,1}}{m_1} = \frac{F_{k2} - F_{s,2}}{m_2},$$
vagyis az egyes testekre előre- ill. hátrafelé ható erők különbsége arányos a tömegükkel (ugyanez igaz kötelekre is).
- Tekintsük a 3 testet egy rendszernek és adjuk össze a 3 testre felírt mozgásegyenletet:
$$(m_{tr}+m_1+m_2)a = F_{tr} - F_{s,tr} - F_{s,1} - F_{s,2}$$
Ekkor az $F_{k1}$, $F_{k2}$ kötélerők kiesnek, mivel ők a 3 testből álló rendszerben belső erők. A 3 testből álló rendszer gyorsulását a külső erők eredője határozza meg:
$$a = \frac{F_{tr} - F_{s,tr} - F_{s,1} - F_{s,2}}{m_{tr}+m_1+m_2}.$$

**4/2.** Mekkora lejtővel párhuzamos erő szükséges ahhoz, hogy állandó gyorsulással 2 s alatt nyugalmi helyzetből indulva felhúzzunk egy 6 kg tömegű testet egy 30°-os, 1 m magas lejtőn, ha a súrlódási együttható 0,2?

**MO.** A mozgásegyenlet
vektori alakban: $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{F_{ny}} + \mathbf{F_s}$ $\mathbf{F}$ az általunk kifejtett lejtővel párhuzamos húzóerő
Az erőket merőleges komponensekre kell bontani, de lejtő esetén nem függőleges és vízszintes, hanem lejtőre merőleges és lejtővel párhuzamos komponensekre bontjuk:
lejtőre merőleges (kifelé pozitív): $ma_\perp = 0 - mg\cdot\cos\alpha + F_{ny} + 0$
lejtővel párhuzamos (felfelé pozitív): $ma_\| = F - mg\cdot\sin\alpha + 0 - F_s$
Mivel a testek a felületen mozognak, a lejtőre merőleges gyorsuláskomponens nulla
→ ebből tudjuk a nyomóerőt: $F_{ny} = mg\cdot\cos\alpha$ ;
a súrlódási erő nagysága pedig $F_s = \mu\, F_{ny} = \mu mg\cdot\cos\alpha$, ezt behelyettesítve a lejtővel párhuzamos egyenletbe: $ma = F - mg\cdot\sin\alpha - \mu mg\cdot\cos\alpha$ .

A gyorsulás kiszámolható az időből, kezdősebességből és a megtett útból:
a lejtő hossza, azaz a megtett út $s = h/\sin\alpha = 2$ m; $v_0 = 0 \rightarrow s = ½\, a\, t^2 \rightarrow a = 2s/t^2 = 1\ m/s^2$.
A mozgásegyenletből
$\Rightarrow F = m\,(a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha) = 6\cdot(1 + 10\cdot\sin 30° + 0{,}2\cdot 10\cdot\cos 30°) \approx 46{,}39$ N.

**MEGJEGYZÉSEK:**
- Általánosan a lejtővel párhuzamosan a pozitív irányt választhatjuk felfelé vagy lefelé is. Azt az irányt célszerű pozitívnak választani, amerre a test mozog; ekkor a súrlódási erő negatív előjelű lesz (fékez), a gravitációs erő $mg\cdot\sin\alpha$ komponensének előjele pedig az irányválasztástól függ (pozitív, vagyis gyorsít, ha a test lefelé mozog, ill. negatív, vagyis fékez, ha a test felfelé mozog).
- Ha a gyorsulás negatívra jön ki, akkor a test lassul. Ha lefelé haladva lassul $v=0$ -ra, akkor ott a test megáll és a tapadási súrlódási erő miatt ott is marad (ha egyéb erő nem hat rá). Ha felfelé haladva lassul $v=0$ -ra, akkor a tapadási súrlódási együttható értékétől függ, hogy egy helyben marad vagy elkezd visszacsúszni lefelé. Ha visszacsúszik, akkor a csúszási súrlódási erő iránya megváltozik (mivel azt a sebesség iránya szabja meg).
- Ha van olyan erő ($m\mathbf{g}$ -n és $\mathbf{F_{ny}}$ -n kívül, pl. egy külső húzó/tolóerő), aminek van a lejtőre merőleges komponense, akkor módosul a mozgásegyenletnek a lejtőre merőleges komponense és emiatt változik $F_{ny}$ nagysága, és azzal együtt $F_s$ nagysága is. Ha a külső erő „belenyomja” a testet a lejtőbe, akkor $F_{ny}$ (és $F_s$) nagysága nő, ha „elemeli”, akkor csökken.

Itt egy látványos bizonyíték arra, hogy a súrlódási erő a nyomóerővel arányos (ebben az esetben a tapadási súrlódási erő a cipő és a fal között): http://www.videoman.gr/106419

**4/3.** Egy kettős lejtő egyik oldala $\alpha = 50°$-ot, a másik $\beta = 58°$-ot zár be a vízszintessel. Két testet összekötünk egy (nyújthatatlan, elhanyagolható tömegű) L = 2 m hosszú kötéllel. Az 50°-os oldalra tesszük az $m_1$ = 14 dkg-os testet, az 58°-os oldalra az $m_2$ = 10 dkg-os testet, úgy, hogy a kötélnek pont a fele az egyik, fele a másik oldalon van.
A testek és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható 0,12, a tapadási súrlódási együttható 0,15.
Mekkora, milyen irányú a testek gyorsulása, melyik test ér fel a lejtő tetejére és mikor, ha
**a)** a 14 dkg-os testet meglökjük lefelé 1 m/s-os sebességgel;
**b)** a 10 dkg-os testet meglökjük lefelé 1 m/s-os sebességgel;
**c)** a testeket kezdősebesség nélkül tesszük a lejtőre?

**MO.** $m_1 = 0{,}14$ kg, $\alpha = 50°$; $m_2 = 0{,}10$ kg; $\beta = 58°$; $\mu = 0{,}12$; $\mu_t = 0{,}15$; $v_0 = 1$ m/s.
Az előző feladat mintájára tudjuk, hogy $F_{ny1} = m_1 g \cos\alpha$ ill. $F_{ny2} = m_2 g \cos\beta$; $F_k$ a kötélerő.
Pozitív iránynak a kezdősebesség irányát vesszük fel.

**a)** $m_1 a_a = m_1 g \sin\alpha - F_k - \mu m_1 g \cos\alpha$
$m_2 a_a = -m_2 g \sin\beta + F_k - \mu m_2 g \cos\beta$
$\rightarrow\ a_a = (m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha - m_2 g\sin\beta - \mu m_2 g\cos\beta) / (m_1+m_2) \approx 0{,}2201\ \mathrm{m/s^2}$
Tehát a kezdősebesség irányában gyorsulnak is a testek:
$v = v_0 + a_a t = 1 + 0{,}2201t$ ; $s = v_0 t + ½\, a_a t^2 = 1\cdot t + ½\cdot 0{,}2201\cdot t^2$
A kötél felének megfelelő utat, azaz 1 m-t kell megtennie a 10 dkg-os testnek, hogy felérjen:
$s = L/2 = 1 = v_0 t_a + ½ a_a t_a^2 = 1\cdot t_a + ½\cdot 0{,}2201\cdot t_a^2 \rightarrow t_a \approx 0{,}9090$ s alatt ér fel a 10 dkg-os test.

**b)** $m_1 a_b = -m_1 g \sin\alpha + F_k - \mu m_1 g \cos\alpha$
$m_2 a_b = m_2 g \sin\beta - F_k - \mu m_2 g \cos\beta$
$\rightarrow\ a_b = (-m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha + m_2 g\sin\beta - \mu m_2 g\cos\beta) / (m_1+m_2) \approx -1{,}650\ \mathrm{m/s^2}$
Tehát a testek most lassulnak:
$v = v_0 + a_b t = 1 - 1{,}650t \rightarrow t^* = 1/1{,}650 \approx 0{,}6061$ s alatt megállnak, ezalatt
$s^* = v_0 t^* + ½\, a_b t^{*2} = 1\cdot t^* - ½\cdot 1{,}650\cdot t^{*2} = 1\cdot 0{,}6061 - ½\cdot 1{,}650\cdot 0{,}6061^2 \approx 0{,}3030$ m-t tesznek meg, vagyis nem ér fel a 14 dkg-os test, hanem az **a)** részben kiszámolt gyorsulással indulnak el a testek ebből a helyzetből (zérus kezdősebességgel), és a 10 dkg-os test fog felérkezni
$s = ½\, a_a t^2 = ½\cdot 0{,}2201\cdot t^2 = L/2 + s^* \approx 1{,}303 \rightarrow t \approx 3{,}441$ s alatt (összesen 4,047 s alatt).

**c)** Nem tudjuk, megindulnak-e a testek egyáltalán, és ha igen, merrefelé; vagyis nem tudjuk, tapadási vagy csúszási súrlódást kell-e figyelembe vennünk, illetve milyen irányba vegyük fel őket. Megoldhatjuk úgy a feladatot, hogy tetszőlegesen kiválasztjuk az egyik irányt, felírjuk annak megfelelő előjelekkel az egyenleteket, és ha pozitív gyorsulást kapunk, akkor azzal számolunk tovább; de ha negatívra jön ki a gyorsulás, akkor fel kell írni az egyenleteket a másik iránynak megfelelő előjelekkel és újra megoldani. Mivel ez elég sok számolás, tájékozódásként számoljuk ki a gravitációs erő lejtővel párhuzamos komponensét az egyes testekre, és vegyük azt az irányt pozitívnak, amerre ezek alapján (vagyis a súrlódás elhanyagolásával) indulnának.
$m_1 g \sin\alpha \approx 1{,}072$ N $>$ $m_2 g \sin\beta \approx 0{,}8480$ N, tehát a 14 dkg-os test indulna lefelé.
Ha nem lenne súrlódás, a két erő különbsége, azaz
$m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\beta \approx 0{,}2244$ N gyorsítaná a testeket.

Kérdés, hogy a tapadási súrlódási erő tudja-e ezt ellensúlyozni.

$F_{t,max,1} = \mu_t\, m_1 g\cos\alpha \approx 0{,}1350$ N; $F_{t,max,2} = \mu_t\, m_2 g\cos\beta \approx 0{,}0795$ N, $F_{t,max,1} + F_{t,max,2} \approx 0{,}2145$ N

$F_{t,max,1} + F_{t,max,2} < m_1 g\sin\alpha - m_2 g\sin\beta$ , tehát a testek elkezdenek csúszni.

Hasonlóan a fentiekhez (most $v_0 = 0$):

$t = \sqrt{\frac{2s}{a_a}} = \sqrt{\frac{2\cdot(L/2)}{a_a}} = \sqrt{\frac{2}{0{,}2201}} \approx 3{,}014$ s kell ahhoz, hogy a 10 dkg-os test felérjen.

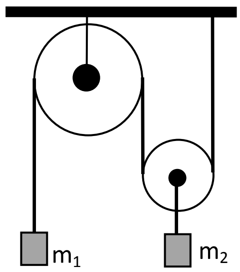
**MEGJEGYZÉS:**

Ha $F_{t,max,1} + F_{t,max,2} > m_1 g\sin\alpha - m_2 g\sin\beta$ lenne, akkor

$F_{t,1} \le F_{t,max,1}$ és $F_{t,2} \le F_{t,max,2}$ és $F_{t,1} + F_{t,2} = m_1 g\sin\alpha - m_2 g\sin\beta$ .

Két test esetén a helyzet bonyolult, de egyetlen test esetén $F_t$ értéke meghatározható.

**4/4. (DRS 3.8)** Az ábrán látható elrendezésben a csigák és a kötél tömege elhanyagolható, a kötél nyújthatatlan, a csigák súrlódásmentesek. Mekkora az egyes tömegek gyorsulása és az egyes köteleket feszítő erő, ha $m_1$ = 0,6 kg és $m_2$ = 0,8 kg?




**MO.** Mivel a kötél és a csiga tömege elhanyagolható és a csiga súrlódásmentes, ezért a csigákon átvetett kötélben az $F_{k1}$ kötélerő nagysága a kötél mentén állandó; az $m_2$ tömeget a mozgócsigához rögzítő kötélben lévő erő nagysága pedig $F_{k2}$.

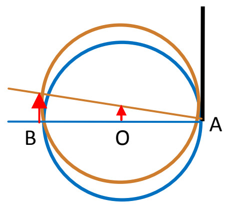
Kötéllel összekötött testek esetén az egyes erők előjelét nem a függőlegesen felvett z tengelyhez szokás viszonyítani, hanem a kötél mentén szokás felvenni egy pozitív irányt.

Tételezzük fel, hogy $m_1$ fog lefelé gyorsulni. Ezzel a feltételezéssel a mozgásegyenletek:

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_{k1}$$

$$m_2 a_2 = F_{k2} - m_2 g$$

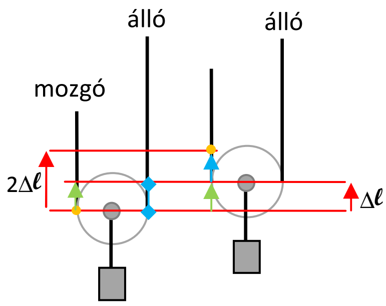
A két test gyorsulása most nem egyenlő. Látható, hogy ha az A pontot fixnek képzeljük el, ami körül a csiga elfordul, akkor amíg az O pont $\Delta\ell$-nyit emelkedik, addig a B pont $2\Delta\ell$-nyit emelkedik. Másrészt, mivel a kötél hossza állandó, a csiga emelkedésekor „áttevődik” $\Delta\ell$-nyi a jobb oldali álló kötélrészről a túloldalra. (A csiga peremén futó kötél hossza változatlan, így a csiga mérete nem számít.)




Mivel $a = \ddot{x} \rightarrow a_2 = a_1/2$ .

Az $F_{k1}$ és $F_{k2}$ kötélerőkre felírjuk a mozgócsiga mozgásegyenletét:

$m_{cs}\, a_{cs} = 2\,F_{k1} - F_{k2}$ , amiből $F_{k2} = 2\,F_{k1}$ , mivel $m_{cs} = 0$ .




Ezeket behelyettesítve

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_{k1}$$

$$m_2 a_1/2 = 2\,F_{k1} - m_2 g$$

amiből

$a_1 = \frac{2m_1 - m_2}{2m_1 + \frac{m_2}{2}}\, g = 2{,}50\ \mathrm{m/s^2}$ (pozitív, tehát tényleg lefelé gyorsul),

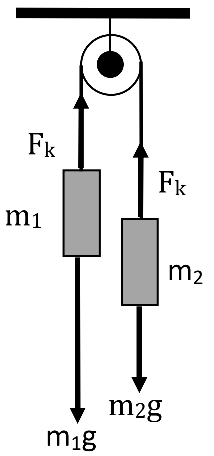
$a_2 = 1{,}25\ \mathrm{m/s^2}$ (tényleg felfelé),

$F_{k1} = m_1\,(g - a_1) = 4{,}5$ N

$F_{k2} = 2\,F_{k1} = m_2\,(g + a_2) = 9{,}0$ N

**Gyakorló feladatok a zárthelyire:**

**4/5. (DRS 3.3, volt Bevezető fizikán)** Csigán átvetett nyújthatatlan kötél egyik végén $m_1 = 2$ kg, másik végén $m_2 = 1$ kg tömegű test lóg. A kötél súrlódásmentesen mozoghat. Írjuk fel az egyes testek mozgásegyenleteit! Határozzuk meg a kötélben fellépő feszítőerőt, és az egyes testek gyorsulását! (A csiga tömege elhanyagolható.)




**MO.**
Itt most látszik, hogy $m_1$ fog lefelé gyorsulni:

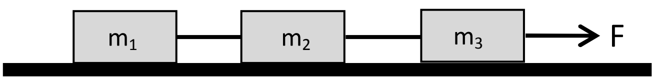
$$m_1 a = m_1 g - F_k$$
$$m_2 a = F_k - m_2 g$$

Ebből

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{g}{3} = 3{,}27\ m/s^2$$ és

$$F = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{4g}{3} = 13{,}08\ N$$

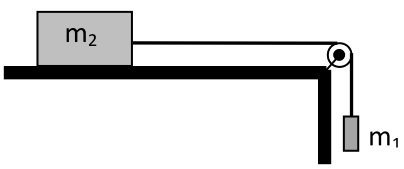
**4/6. (DRS 3.11)** Vízszintes súrlódásmentes felületen $m_1 = 3$ kg tömegű test, kötéllel hozzákötve $m_2 = 7$ kg tömegű test, kötéllel hozzákötve $m_3 = 10$ kg tömegű test, és azt húzzuk F = 100 N erővel vízszintesen. A kötelek nyújthatatlanok, a tömegük elhanyagolható. Mekkora a testek gyorsulása és mekkorák a kötélerők?



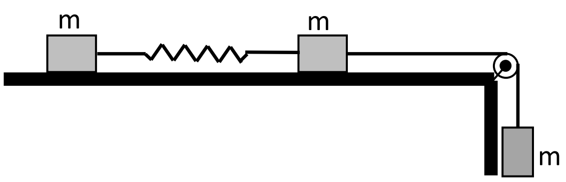

**4/7. (DRS 3.5)** Vízszintes asztalon $m_2 = 2$ kg tömegű test, az asztal szélén lévő csigán átvetett kötéllel hozzákötve $m_1 = 0{,}5$ kg tömegű test lóg függőlegesen. Mekkora a kötéllel egymáshoz kötött testek gyorsulása és a kötelet feszítő erő, ha az $m_2$ tömegű test

**a)** a vízszintes felületen súrlódás nélkül csúszhat;

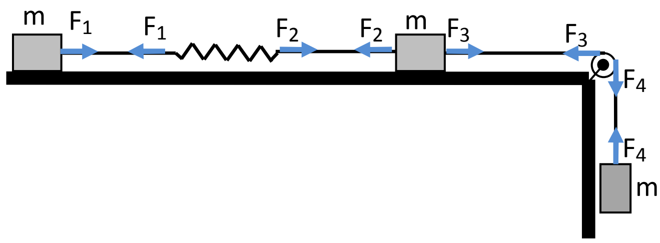
**b)** és a vízszintes felület közötti súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$?




**4/8. (DRS 3.12, volt Bevezető fizikán)** Mennyivel nyúlik meg a két test közé iktatott rugó, amikor az összekapcsolt rendszer egyenletesen gyorsuló mozgásban van? Mindhárom test tömege m = 1 kg, a súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$, a rugóállandó k = 4 N/cm, a csiga, a rugó és a kötelek tömege elhanyagolható, a csiga súrlódásmentes, a kötelek nyújthatatlanok.

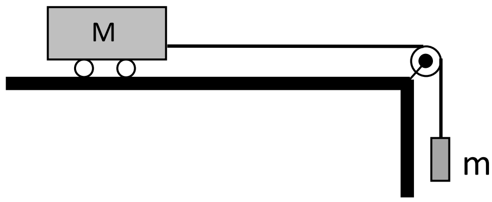


**MO.**




Kötélerők: egy-egy kötélszakasz két végén azonos nagyságú az erő, mert a kötelek tömege elhanyagolható.
$F_1 = F_2$, mert a rugó tömege elhanyagolható (ha lenne tömege, a két kötélerő különbsége gyorsítaná a rugót). Ez a kötélerő lesz arányos a rugó megnyúlásával: $F_1 = F_2 = F_r = k\cdot\Delta l$.
$F_3 = F_4$, mert a csiga tömege elhanyagolható és súrlódásmentes.
A mozgásegyenletek ($F_1$ helyett is $F_2$-t, $F_4$ helyett is $F_3$-at írva):
a lógó testre $ma = mg - F_3$
a középső testre $ma = F_3 - F_2 - F_s = F_3 - F_2 - \mu mg$
a bal oldali testre $ma = F_2 - F_s = F_2 - \mu mg$
*Ezekből* $a = \frac{mg-2\mu mg}{3m} = \frac{1-2\mu}{3}g = \frac{1-2\cdot 0{,}2}{3}\cdot 10 = 2$ m/s$^2$.
A rugó megnyúlását $F_2$-ből számoljuk, azt pedig a bal oldali test egyenletéből kapjuk meg:
$F_2 = ma + \mu mg = 1\cdot(2+0{,}2\cdot 10) = 4$ N $\qquad \Delta l = F_2 / k = 1$ cm.

**4/9 .** Vízszintes asztallapon kiskocsi mozog. A kiskocsit egy csigán átvetett kötélre akasztott súly mozgatja.
$m = 100$ g esetén a kiskocsi 3 s alatt,
$m = 200$ g esetén a kiskocsi 1 s alatt
teszi meg az 1 m-es utat nyugalmi helyzetből kiindulva. Mekkora a kocsi tömege, és mekkora a súrlódási együttható? $g = 10$ m/s$^2$




**MO.**
A mozgásegyenletek:

$$\left.\begin{aligned} Ma &= F_k - \mu Mg \\ ma &= mg - F_k \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad M(a+\mu g) = m(g-a)$$

$m_1 = 0{,}1$ kg esetén $a_1 = 2s / t_1^2 = 2\cdot 1 / 3^2 = 2/9$ m/s$^2$ : $\quad M(2/9+10\mu) = 0{,}1(10-2/9)$
$m_2 = 0{,}2$ kg esetén $a_2 = 2s / t_2^2 = 2\cdot 1 / 1^2 = 2$ m/s$^2$ : $\quad M(2+10\mu) = 0{,}2(10-2)$
$\Rightarrow \quad M = 0{,}35$ kg, $\mu = 0{,}257$

**4/10.** $\alpha = 20°$ hajlásszögű lejtőre $m = 0{,}5$ kg tömegű testet helyezünk. A test és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható $\mu = 0{,}2$ , a tapadási súrlódási együttható $\mu_t = 0{,}4$.
**a)** Mekkora súrlódási erő hat a testre?
**b)** $\alpha$ értékét növelve milyen $\alpha_{krit}$ szögnél csúszik meg a test? Mekkora súrlódási erő hat rá onnantól?

**MO.**

**a)** A test mozgásegyenlete:

$ma = mg\sin\alpha - F_t$

Ha a test tapad a lejtőn, akkor $a = 0$

$\rightarrow \quad F_t = mg\sin\alpha = 0{,}5\cdot10\cdot\sin20° \approx 1{,}710$ N tapadási súrlódási erő kell hasson a testre.

Ellenőrizni kell, hogy ez kisebb-e, mint a tapadási súrlódási erő maximális lehetséges értéke, ami $F_{t,max} = \mu_t\, mg\cos\alpha = 0{,}4\cdot0{,}5\cdot10\cdot\cos20° \approx 1{,}879$ N.

$\alpha = 20°$ hajlásszögű lejtőn tehát a test még tényleg nem csúszik meg, mert max. 1,879 N tapadási súrlódási erő léphetne fel a test és a lejtő között, de csak 1,710 N erő gyorsítja, ezért a test és a lejtő között fellépő tapadási súrlódási erő $F_t = 1{,}710$ N.

**b)** Határesetben $F_t$ eléri $F_{t,max}$ értékét, vagyis

$ma = mg\sin\alpha_{krit} - F_{t,max} = mg\sin\alpha_{krit} - \mu_t\, mg\cos\alpha_{krit} = 0$

$\rightarrow \quad \sin\alpha_{krit} = \mu_t\cos\alpha_{krit} \quad \rightarrow \quad \mu_t = 0{,}4 = \mathrm{tg}\alpha_{krit} \quad \rightarrow \quad \alpha_{krit} = 21{,}80°.$

A lejtő hajlásszögét tovább növelve a csúszó testet

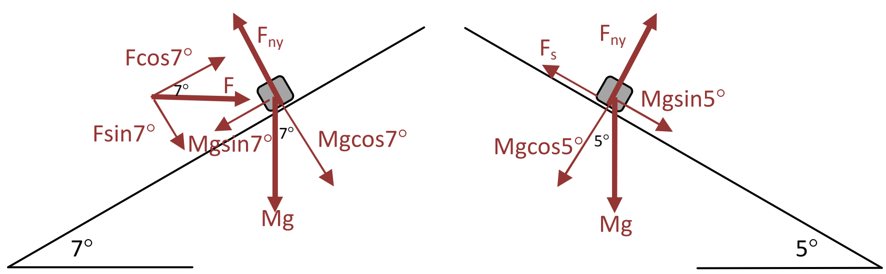
$F_s = \mu\, mg\cos\alpha = 0{,}2\cdot0{,}5\cdot10\cdot\cos\alpha$ csúszási súrlódási erő fékezi. ($\alpha_{krit}$ esetén ez 0,9285 N.)

**4/11.** Egy kamionos a következőt mesélte a 2013. március 14-i kalandjairól az M1-es autópályáról.

**a)** Egyszercsak egy 7°-os emelkedő aljához érkezett, ami úgy el volt jegesedve, hogy a súrlódás egészen zérusra csökkent. Szerencsére viszont a szél éppen hátulról fújt és nagyon erős volt, így a meglazult ponyváját vitorlaként kifeszítette és úgy jutott fel az emelkedőn. A szél állandó erővel vízszintesen fújt, és őt állandó, v = 18 km/h sebességgel vitte fel a lejtőn. Mekkora erőt fejtett ki a szél a kamionra? A kamion tömege M = 20 t.

**b)** A domb teteje után a túloldalon 5°-os lejtővel folytatódott az út, ami szélárnyékban volt, megszűnt a szél ereje; viszont nagyon havas volt, így a kamionra $\mu_g = 0{,}12$ gördülési súrlódási együtthatóval most már gördülési ellenállási erő hatott (az üzemanyaga már elfogyott, nem tudott motorral menni, csak gurult). Ekkor kapta meg a kamionos a BM-től az sms-t, és azt rögtön el is olvasta, ami 30 s-ig tartott. Mekkora lett a sebessége és mekkora utat tett meg ezalatt a 30 s alatt? (A kamion a lejtő tetejéről v = 18 km/h sebességről indult, amikor elkezdte olvasni az sms-t.)

**MO.**




**a)** A kamion az emelkedőn állandó sebességgel halad, tehát a gyorsulása zérus.

A lejtővel párhuzamos komponensek $Mg\cdot\sin7° - F\cdot\cos7° = 0 \rightarrow F = Mg\cdot\mathrm{tg}7° \approx 24557$ N

**b)** A kamiont a lejtőn az **Mg** lejtővel párhuzamos komponensének és a súrlódási erőnek az eredője gyorsítja: $Ma = Mg\sin5° - F_s$

$F_s = \mu_g \cdot F_{ny} = \mu_g \cdot Mg\cos5°$, mivel a lejtőre merőleges komponensből látjuk, hogy $F_{ny} = Mg\cos5°$.

Tehát $a = g\,(\sin5° - \mu_g\cdot\cos5°) = -0{,}324\ \mathrm{m/s^2}$, a kamion lassulni fog:

$v = v_0 + a\cdot t = (18/3{,}6) - 0{,}324\cdot t = 5 - 0{,}324\cdot t$

és **megáll** $t = 5/0{,}324 \approx 15{,}44$ s alatt.

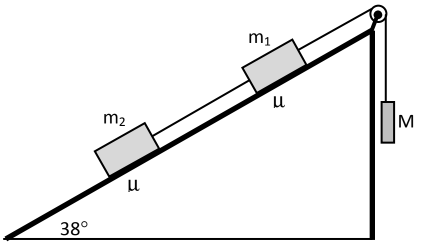
Így tehát a megtett út $s = v_0t + ½at^2 = 5\cdot15{,}44 - ½\cdot0{,}324\cdot15{,}44^2 \approx$ **38,6 m** $[\, = v_0^2/(2a)\,]$

**4/12.** Az ábra szerint elhanyagolható tömegű nyújthatatlan kötéllel egymáshoz kötünk egy M, $m_1$ és $m_2$ tömegű testet és 38°-os hajlásszögű lejtőre tesszük. A lejtő tetején egy ideális (súrlódásmentes, elhanyagolható tömegű) csiga van. Az $m_1$ és $m_2$ tömegű testek és a lejtő közötti csúszási súrlódási együttható $\mu$ = 0,08.

**a)** Mekkora a testek gyorsulása és mekkorák a kötélerők?

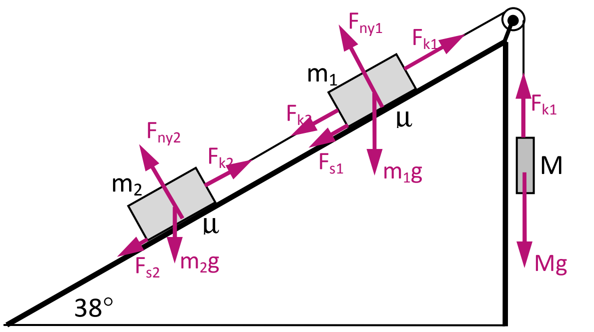
**b)** Ha az M tömegű testet eltávolítjuk, mekkora erővel kell húzni a kötelet, hogy az $m_1$ és $m_2$ tömegű testek gyorsulása ne változzon?

**c)** Hányszorosára nő a testek gyorsulása, ha az M tömeg kétszeresére nő? (a kötelet nem húzzuk)




M = 7 kg
$m_1$ = 5 kg
$m_2$ = 3 kg
$\mu$ = 0,08
g = 10 m/s$^2$

**MO.**




**a)** Az $m_1$-re ill. $m_2$-re a lejtő által kifejtett nyomóerő $F_{ny1} = m_1\, g \cos 38°$ ill. $F_{ny2} = m_2\, g \cos 38°$, a súrlódási erők $F_{s1} = \mu\, F_{ny1} = \mu\, m_1\, g \cos 38°$ ill. $F_{s2} = \mu\, F_{ny2} = \mu\, m_2\, g \cos 38°$.

Tegyük fel, hogy az M tömeg lefelé gyorsul (mert súrlódási erők nélkül jobbra Mg = 70 N, balra $(m_1+m_2)g \sin 38° \approx 49{,}25$ N hat a csigánál), így a lejtővel párhuzamosan

$$M\, a = Mg - F_{k1}$$
$$m_1\, a = F_{k1} - F_{k2} - m_1 g \sin 38° - F_{s1} = F_{k1} - F_{k2} - m_1 g \sin 38° - \mu\, m_1\, g \cos 38°$$
$$m_2\, a = F_{k2} - m_2 g \sin 38° - F_{s2} = F_{k2} - m_2 g \sin 38° - \mu\, m_2\, g \cos 38°$$

Ezekből $a = \frac{M-(m_1+m_2)(\sin 38° - \mu \cos 38°)}{m_1+m_2+M} g \approx 1{,}047$ m/s$^2$

A gyorsulásra pozitív érték jött ki, tehát tényleg ebbe az irányba gyorsulnak a testek.

[Ha azzal a feltételezéssel írtuk volna fel az egyenleteket, hogy az M tömeg felfelé gyorsul, akkor a = –1,72 m/s$^2$ jönne ki.]

A kötélerők:

$F_{k2} = \frac{M m_2 (1+\sin 38° + \mu \cos 38°)}{m_1+m_2+M} g \approx 23{,}50$ N; $F_{k1} = \frac{M(m_1+m_2)(1+\sin 38° + \mu \cos 38°)}{m_1+m_2+M} g \approx 62{,}67$ N.

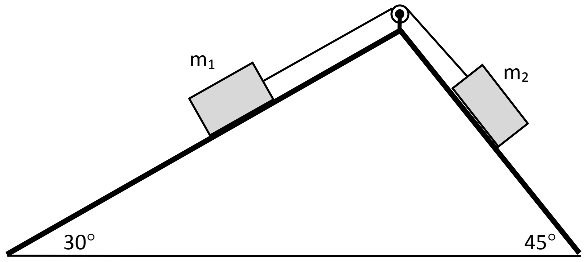
**b)** Ha $m_1$ és $m_2$ marad és a gyorsulásuk változatlan, akkor a kötélerők is változatlanok. Ez azt jelenti, hogy a kötelet a fent kiszámolt $F_{k1} \approx 62{,}67$ N nagyságú erővel kell húzni.

<u>Megjegyzés</u>: Azért nem Mg = 70 N nagyságú erővel, mert az az erő ahhoz volt szükséges, hogy mindhárom testet gyorsítsa, de most kisebb az össztömeg. Az $Mg-F_{k1} \approx 7{,}33$ N erő magát az M tömegű testet gyorsítja, így lesz annak is 7,33/7 ≈ 1,047 m/s$^2$ nagyságú gyorsulása.

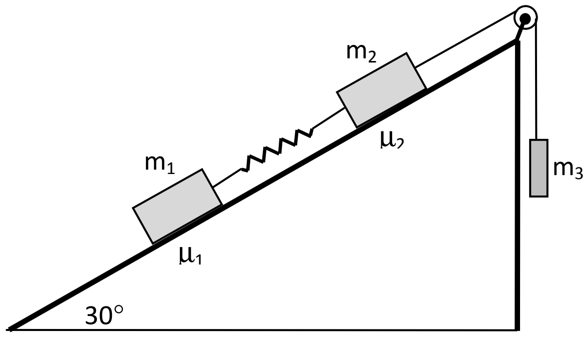
[Az $F_{k1}–m_1g\ sin38°–F_{s1}–m_2g\ sin38°–F_{s2} \approx 8{,}38$ N erő gyorsítja az $m_1+m_2$ tömegeket ($8{,}38/8 \approx 1{,}047 m/s^2$), az $F_{k1}–m_1g\ sin38°–F_{s1}– F_{k2} \approx 5{,}24$ N az $m_1$ tömeget ($5{,}24/5 \approx 1{,}047 m/s^2$) és az $F_{k2}–m_2g\ sin38°–F_{s2} \approx 3{,}14$ N az $m_2$ tömeget ($3{,}14/3 \approx 1{,}047 m/s^2$).]

**c)** A gyorsulás nem kétszeresére nő, mert ugyan Mg értéke kétszeresére nő, de az $m_1$ és $m_2$ testekre ható ellentétes irányú erők változatlanok. Az **a)** pontban felírt egyenletekbe M = 14 kg-ot behelyettesítve $a^* \approx 3{,}896$ m/s$^2$, ez ~3,7-szerese az előző gyorsulásnak.

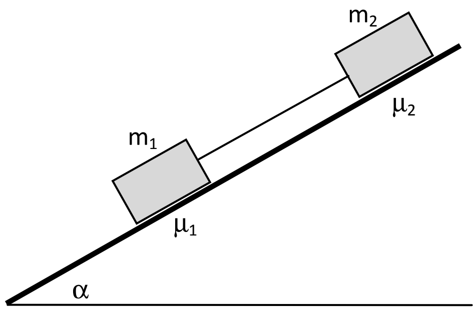
**4/13.** A kettős lejtő
30° hajlásszögű oldalán $m_1$ = 2 kg tömegű, a 45° hajlásszögű oldalán $m_2$ = 1 kg tömegű test fekszik, a két test össze van kötve egy csigán átvetett kötéllel. A súrlódás elhanyagolható. Mekkora a testek gyorsulása?




**4/14.** Mennyivel nyúlik meg a rugó?
$m_1$ = 2 kg, $m_2$ = 3 kg, $m_3$ = 5 kg, $\mu_1$ = 0,2, $\mu_2$ = 0,06, k = 0,5 N/cm.
A kötelek súlytalanok és nyújthatatlanok, a csiga súlytalan és súrlódásmentes, a lejtő nem tud elmozdulni.




**4/15.** $\alpha$ hajlásszögű lejtőre kötéllel összekötött két testet teszünk. A lejtő és az $m_1$ tömegű test közötti csúszási súrlódási együttható $\mu_1$, az $m_2$ tömegű testé pedig $\mu_2$. Mi a feltétele annak, hogy a két test között a kötél feszes legyen? Mekkora a kötélerő?




**MO.**

$m_1a = m_1g\ sin\alpha – \mu_1 m_1g\ cos\alpha – F_k$

$m_2a = m_2g\ sin\alpha – \mu_2 m_2g\ cos\alpha + F_k$

$\rightarrow\ a = \left[sin\alpha - \frac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}cos\alpha\right]g$ és $F_k = \frac{m_1 m_2(\mu_2-\mu_1)}{m_1+m_2}cos\alpha\ g$

A kötél feszes, ha $F_k \geq 0$, azaz ha $\mu_2 \geq \mu_1$ (az egyenlőség esetén feszes kötéllel kell letenni)

**VAGY**: gyorsabb megoldás, ha a mozgásegyenleteket felírjuk a kötélerő nélkül, és azt mondjuk, hogy ha az alsó test gyorsulása legalább akkora, mint a felső test gyorsulása, akkor a kötél feszes marad.

$m_1a_1 = m_1g\ sin\alpha – \mu_1 m_1g\ cos\alpha$ $\rightarrow$ $a_1 = (sin\alpha – \mu_1 cos\alpha)\ g$, hasonlóan $a_2 = (sin\alpha – \mu_2 cos\alpha)\ g$

$a_1 \geq a_2$ : $sin\alpha – \mu_1 cos\alpha \geq sin\alpha – \mu_2 cos\alpha$ $\rightarrow$ $\mu_2 \geq \mu_1$

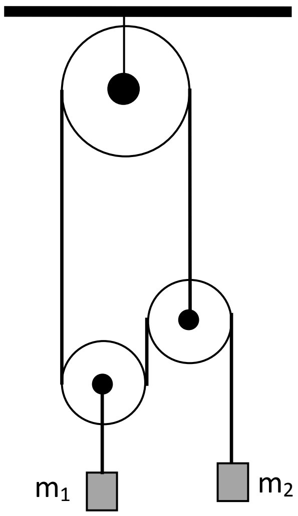
**Nem zh-nak való feladat:**

**a)** Bizonyítsuk be: ha a testre ható erő mindig merőleges a test sebességére, akkor a test sebességének nagysága nem változik.
**b)** Bizonyítsuk be: ha a testre ható erő mindig egyező irányú a test sebességével, akkor a test sebességének iránya nem változik.

**MO.**
Írjuk fel a test gyorsulását úgy, hogy deriváljuk a test sebességvektorát:
$\boldsymbol{v} = v\,\boldsymbol{e_v}$ → $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{v}\,\boldsymbol{e_v} + v\,\dot{\boldsymbol{e_v}}$ ( $\dot{\boldsymbol{e_v}}$ merőleges $\boldsymbol{e_v}$ -re )
**a)** Ha az erő, azaz a gyorsulás merőleges a test sebességére, akkor az $\boldsymbol{e_v}$ irányú komponense zérus kell legyen, tehát $\dot{v} = 0$ , $v = konst.$
**b)** Ha az erő, azaz a gyorsulás egy irányú a sebességgel, vagyis az arra merőleges komponense zérus, akkor $\dot{\boldsymbol{e_v}} = 0$ , vagyis $\boldsymbol{e_v} = konst.$

**a)** másként: nézzük meg, mit ad, ha deriváljuk a sebességvektor önmagával vett skaláris szorzatát:
$\frac{d\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{dt} = 2\boldsymbol{v}\frac{d\,\boldsymbol{v}}{dt} = 2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{F}}{m}$.
Ha **v** és **F** merőlegesek, akkor a skaláris szorzatuk zérus, tehát $\frac{d\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{dt} = 0$ ; de tudjuk, hogy $\frac{d\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\,v\cdot v}{dt}$ , vagyis a sebesség nagyságának négyzete állandó, azaz a sebesség nagysága állandó.

És egy cseles csigás feladat:




A kötél nyújthatatlan, a kötél és a csigák tömege elhanyagolható, a csigák súrlódásmentesek. Határozzuk meg az $m_1$ és az $m_2$ tömeg gyorsulását és a kötélerőt!