

**Hajítás – összefoglalás**

A testre állandó erő hat, így a gyorsulása állandó:  $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m = \text{konst.}$ , méghozzá  $\mathbf{a} = -g \mathbf{k}$ .

Mutasson a koordináta-rendszerünk z tengelye az erővel ellentétes irányba:  $\mathbf{F}/m = -g \mathbf{k}$ , így ha a test a  $t=0$ -ban az  $\mathbf{r}_0$  pontból indul  $\mathbf{v}_0$  sebességgel:

$$\mathbf{a} = -g \mathbf{k} = \dot{\mathbf{v}} \Rightarrow \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 - gt \mathbf{k} = \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \mathbf{k}.$$

Forgassuk úgy a koordináta-rendszerünket a z tengely körül úgy, hogy a  $\mathbf{v}_0$  kezdősebességnek csak x és z irányú komponense legyen:

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x} \mathbf{i} + v_{0z} \mathbf{k} = v_0 \cos\alpha \mathbf{i} + v_0 \sin\alpha \mathbf{k}$$

ahol  $\alpha$  a kezdősebességnek a vízszintessel bezárt szöge;

ezzel a test sebessége:

$$\mathbf{v}(t) = v_0 \cos\alpha \mathbf{i} + (v_0 \sin\alpha - gt) \mathbf{k},$$

vagyis  $v_x = v_0 \cos\alpha$ ,  $v_y = 0$ ,  $v_z(t) = v_0 \sin\alpha - gt$ .

A test helyvektora, ha az  $\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$  pontból indult:

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + (v_0 \cos\alpha) \cdot t) \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + (z_0 + (v_0 \sin\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2) \mathbf{k}$$

Ha lehet úgy választani, legyen  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ , ezzel

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos\alpha) \cdot t \mathbf{i} + ((v_0 \sin\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2) \mathbf{k},$$

vagyis  $x(t) = (v_0 \cos\alpha) \cdot t$ ,  $y(t) = 0$ ,  $z(t) = (v_0 \sin\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$ .

**A hajítás pályája:**

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha) \cdot t \Rightarrow t = x / (v_0 \cos\alpha),$$

$z(t) = (v_0 \sin\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ , amibe t-t behelyettesítve

$$z(x) = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2(v_0 \cos\alpha)^2} \cdot x^2, \text{ a pálya tehát parabola.}$$

**A hajítás magassága:**  $h = z_{\max}$ , azaz amikor  $dz/dt = v_z = 0$ :

$$v_0 \sin\alpha - gt_h = 0 \Rightarrow t_h = v_0 \sin\alpha / g \text{ időben éri el a pálya legfelső pontját}$$

$$\Rightarrow h = z(t_h) = v_0 \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} g \left( \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \right)^2 = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}.$$

(Vagy kiszámolható a pályából, a  $dz/dx=0$  feltételből.)

**A hajítás távolsága:** azonos z indulási és érkezési magasság esetén!  $d = x(t_d)$ , ahol  $z(t_d) = 0$ :

$$(v_0 \sin\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \Rightarrow t_d = 2 \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = 2 t_h \text{ (mivel a pálya szimmetrikus)}$$

$$\Rightarrow d = x(t_d) = v_0 \cos\alpha \cdot 2 \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

(Vagy kiszámolható a pálya egyenletéből:  $z(x) = 0$ .)

**4/1.** Egy függőlegesen feldobott kő sebessége 2 s múlva 4 m/s ...

a) ... felfelé,

b) ... lefelé.

Mekkora volt a kezdősebesség, és milyen maximális magasságot ért el?

**MO.**

(próbáljunk elszakadni attól, hogy külön írjuk fel a felfelé ill. a lefelé haladó mozgást!)

$$v_z(t) = v_0 \sin\alpha - gt = v_0 - gt$$

$v_z$  és  $v_0$  pozitív, ha felfelé mutat, ill. negatív, ha lefelé.

$$v_z(2) = v_0 - g \cdot 2 = v_0 - 20 \rightarrow v_0 = v_z(2) + g \cdot 2 = v_z(2) + 20 \quad [\text{m/s}]$$

a)  $v_z(2) = 4 \text{ m/s}$   $v_0 = 24 \text{ m/s}$  és  $h = v_0^2 / (2g) = 28,8 \text{ m}$

b)  $v_z(2) = -4 \text{ m/s}$   $v_0 = 16 \text{ m/s}$  és  $h = 12,8 \text{ m}$

**4/2.** 3,2 m magasról eldobunk egy követ  $v_0 = 2,8 \text{ m/s}$  kezdősebességgel, a vízszinteshez képest felfelé  $26^\circ$ -os szöggel.

a) Hol van a kő 0,1 s múlva?

b) Adjuk meg a test sebességének komponenseit 0,5 s-mal az elhajítás után!

c) Mikor ér a kő vissza ugyanabba a magasságba, amilyen magasról eldobtuk? Mekkora, milyen irányú ekkor a sebessége? Milyen távol van ekkor az eldobás helyétől?

d) Mikor és hol ér földet a kő? Mekkora sebességgel, milyen irányban csapódik be?

**MO.**

$$v_{0x} = 2,8 \cdot \cos 26^\circ \approx 2,517 \text{ m/s}, \quad v_{0z} = 2,8 \cdot \sin 26^\circ \approx 1,227 \text{ m/s}.$$

Legyenek a kiindulási pont koordinátái  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 3,2 \text{ m}$ .

a)  $x(t) = v_x t_a = v_{0x} t_a$ :  $x(0,1) = 2,517 \cdot 0,1 \approx 0,2517 \text{ m}$ ,

$z(t) = z_0 + v_{0z} t_a - \frac{1}{2} g t_a^2$ :  $z(0,1) = 3,2 + 1,227 \cdot 0,1 - 5 \cdot 0,1^2 \approx 3,273 \text{ m}$  (7,3 cm-rel magasabban).

b)  $v_x = v_{0x} = \text{konst.} \approx 2,517 \text{ m/s}$ ,  $v_z = v_{0z} - g t_b \approx 1,227 - 5 \approx -3,773 \text{ m/s}$  (már lefelé megy).

c) Visszaér az eredeti magasságra:  $z_0 + v_{0z} t_c - \frac{1}{2} g t_c^2 = z_0 \rightarrow t_c = 2v_{0z}/g \approx 0,2455 \text{ s}$  alatt.

Eddigre vízszintesen  $x(t_c) = v_x t_c = v_{0x} t_c \approx 0,6178 \text{ m}$ -tesz meg, ilyen távol van a kiindulási ponttól.

$v_x = \text{konst.}$ ;  $v_z = v_{0z} - g t_c = v_{0z} - g \cdot (2v_{0z}/g) = -v_{0z}$ , vagyis a sebességének függőleges komponense ugyanakkora, mint a kezdősebessége volt, csak most lefelé mutat:  $v_z(t_c) = -v_{0z} \approx -1,227 \text{ m/s}$ .

A sebesség nagysága tehát most is 2,8 m/s, és a vízszintessel most is  $26^\circ$ -os szöget zár be, de most lefelé, azaz  $-26^\circ$ -ot.

d) Földet érés:  $z_0 + v_{0z} t_d - \frac{1}{2} g t_d^2 = 0$ , azaz  $3,2 + 1,227 t_d - 5 t_d^2 = 0 \rightarrow t_d \approx 0,9321 \text{ s}$  alatt.

Eddigre vízszintesen  $x(t_d) = v_x t_d = v_{0x} t_d \approx 2,346 \text{ m}$ -t tesz meg.

$v_x = \text{konst.}$ ;  $v_z(t_d) = v_{0z} - g t_d \approx -8,094 \text{ m/s}$ . A sebesség nagysága tehát  $v(t_d) \approx 8,476 \text{ m/s}$ ,

a vízszintessel bezárt szöge  $\text{arc tg}(-8,094/2,517) \approx -72,73^\circ$ .

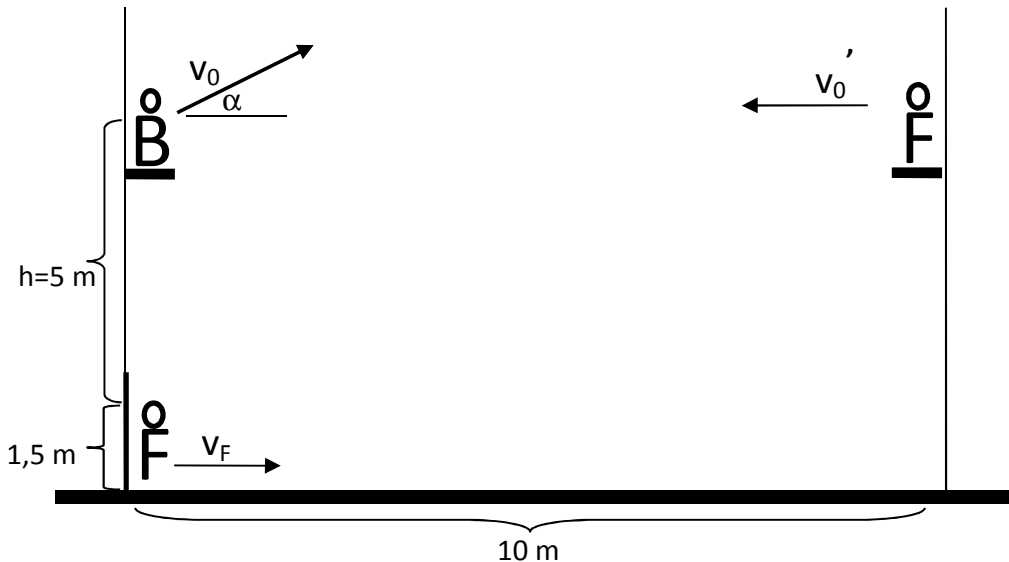
**4/3.** Béni áll az emeleti erkélyen. Abban a pillanatban, amikor Frédi kilép az utcára, Béni  $v_0 = 2 \text{ m/s}$  sebességgel elhajít egy hógolyót. Frédi sebessége  $v_F = 1 \text{ m/s}$ .

a) Milyen  $\alpha$  szögben kell elhajítania, hogy a hógolyó Frédi fejére essék?

b) Mennyi idő múlva találja el?

c) A kaputól milyen távolságra találja el?

- d) Frédi felmegy az utca másik oldalán lévő ház erkélyére és megcélozza a vele egy magasságban lévő barátját. Béni megijed, az elhajítás pillanatában leugrik az erkélyről (szabadesésnek vegyük!). Mi történik, ha Frédi  $v_0' = 20$  m/s kezdősebességgel vízszintesen hajította?
- e) Mekkora minimális  $v_0^*$  kezdősebességgel kell Frédinek vízszintesen hajítania, hogy még éppen eltalálja Bényt?



#### MO.

A hógolyó akkor esik Béni fejére, amikor a hógolyó és Frédi fejének helyvektora megegyezik. Frédi fejének magasságát vegyük  $z = 0$  -nak (1,5 m-rel a járda fölött);

Frédi fejének vízszintes komponense  $x_F = v_F \cdot t = 1 \cdot t$

( $x=0$  a kapunál van és az  $x$  tengely arra mutat, amerre Frédi megy);

a hógolyó vízszintes komponense  $x_h = (v_0 \cdot \cos \alpha) \cdot t = (2 \cdot \cos \alpha) \cdot t$ ;

a hógolyó függőleges komponense  $z_h = h + (v_0 \cdot \sin \alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 5 + (2 \cdot \sin \alpha) \cdot t - 5 t^2$ .

a) A vízszintes komponensek ( $x_F = x_h$ ) egyenlőségéből

$\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \pm 60^\circ$ . (Vegyük észre, hogy a hógolyó mindig Frédi feje fölött van!)

A vízszinteshez képest  $60^\circ$ -os szögben kell eldobnia akár ferdén felfelé, akár ferdén lefelé.

b) A függőleges komponensek egyenlőségéből:

$$5 + (2 \cdot \sin 60^\circ) \cdot t_{1f} - 5 t_{1f}^2 = 0 \Rightarrow t_{1f} \approx 1,188 \text{ s, ha felfelé, ill.}$$

$$5 - (2 \cdot \sin 60^\circ) \cdot t_{1l} - 5 t_{1l}^2 = 0 \Rightarrow t_{1l} \approx 0,8417 \text{ s, ha lefelé dobja.}$$

c) Bármelyik vízszintes elmozdulásból  $x_F = x_h = 1 \cdot t_1 \approx 1,188 \text{ m}$  ill.  $x = 0,8417 \text{ m}$ .

d) Most Béni fejének és a másik hógolyónak a helyvektorát kell felírni:

$$\text{Béni feje: } x_B = 0, \quad z_B = h - \frac{1}{2} g t^2 = 5 - 5t^2,$$

$$\text{a második hógolyó: } x_{h2} = d - v_0' t = 10 - 20t, \quad z_{h2} = h - \frac{1}{2} g t^2 = 5 - 5t^2.$$

Ekkor tehát Béni feje és a hógolyó mindig egy magasságban van – a kérdés tehát az, hogy vízszintesen átér-e a hógolyó Béni fejéhez, mielőtt leesnének a  $z = 0$ -ra:

$$5 - 5t_2^2 = 0 \Rightarrow t_2 = 1 \text{ s alatt esnek le,}$$

$$\text{de } x_{h2} = 10 - 20t_3 = 0 \Rightarrow t_3 = 0,5 \text{ s alatt a hógolyó már eléri Béni fejét}$$

és eltalálja  $z_B = z_{h2} = 5 - 5t_3^2 = 3,75 \text{ m}$  magasságban.

e) Ahhoz, hogy maximum  $t_2 = 1 \text{ s}$  alatt  $x_{h2} = d - v_0^* t_2 = 0$  legyen,  $v_0^* = 10 \text{ m/s}$ .

**4/4.** 360 km/h vízszintes sebességű, magasan repülő repülőgépről kiejtenek egy tárgyat. Milyen kezdősebességgel kell 10 s-mal később egy másik tárgyat utána dobni, hogy az első tárgy kiesése után 14 s-mal találja el a kiejtett tárgyat?

**MO.**

A repülő sebessége  $v_r = 360 \text{ km/h} = 100 \text{ m/s}$ .

Vegyük fel az x tengelyt abba az irányba, amerre a gép repül.

Az első test helyvektora  $\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_0 + v_r t \mathbf{i} - \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{k} = \mathbf{r}_0 + 100 t \mathbf{i} - 5 t^2 \mathbf{k}$ .

A testek a gép elhagyása után megtartják a vízszintes sebességüket. A vízszintes sebesség nem változik, mivel a közegellenállás elhanyagolható, tehát vízszintes irányú erő nem hat a testekre.

Az első test tehát mindig a repülőgép alatt van. Ez azt jelenti, hogy a második testet függőleges kezdősebességgel kell kihajítani a gépről.

A második testet 10 s-mal később dobják ki, ezért a függőleges komponensében szereplő idő  $t-10$ :

$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_0 + v_r t \mathbf{i} + [v(t-10) - \frac{1}{2}g(t-10)^2] \mathbf{k} = \mathbf{r}_0 + 100 t \mathbf{i} + [v(t-10) - 5(t-10)^2] \mathbf{k}$ .

Mivel  $\mathbf{r}_1(14) = \mathbf{r}_2(14)$ , azaz  $z_1(14) = z_2(14)$ :  $-5 \cdot 14^2 = v \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 \Rightarrow v = -225 \text{ m/s}$ .

**4/5.** Két ferde hajítás kezdősebességének nagysága és a hajítás távolsága azonos. Az egyik hajítás maximális magassága a másik négyszerese. Számítsuk ki a hajítási idők arányát!

**MO.**

A kezdősebességek megegyeznek:  $v_{01} = v_{02}$ , a hajítás szöge  $\alpha_1$  ill.  $\alpha_2$ .

A két hajítás távolsága megegyezik:

$$d_1 = v_{01}^2 \sin 2\alpha_1 / g = d_2 = v_{02}^2 \sin 2\alpha_2 / g \Rightarrow \sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2 \quad [1]$$

A maximális magasságok aránya 1:4 :

$$h_1 = v_{01}^2 \sin^2 \alpha_1 / (2g) = 4h_2 = 4 \cdot v_{02}^2 \sin^2 \alpha_2 / (2g) \Rightarrow \sin^2 \alpha_1 = 4 \sin^2 \alpha_2 \Rightarrow \sin \alpha_1 = 2 \sin \alpha_2 \quad [2]$$

A kérdés:  $\frac{t_{h1}}{t_{h2}} = \frac{\frac{v_{01} \sin \alpha_1}{g}}{\frac{v_{02} \sin \alpha_2}{g}} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$  (felhasználva, hogy  $v_{01} = v_{02}$ ).

Mivel a [2] egyenletből  $\sin \alpha_1 = 2 \sin \alpha_2 \Rightarrow \frac{t_{h1}}{t_{h2}} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = 2$  a hajítási idők aránya.

Bár nem volt kérdés, de az [1] egyenletből kiindulva meghatározható a két hajítás szöge is:

$$\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2 \Rightarrow 2\alpha_1 = 180^\circ - 2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1 \Rightarrow \sin \alpha_2 = \sin(90^\circ - \alpha_1) = \cos \alpha_1$$

Felhasználva, hogy  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = 2$ :  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \operatorname{tg} \alpha_1 = 2 \Rightarrow \alpha_1 = 63,43^\circ, \alpha_2 = 26,57^\circ$ .

[Vagy:  $\sin 2\alpha_1 = 2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = \sin 2\alpha_2 = 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \Rightarrow 2 \cos \alpha_1 = \cos \alpha_2 \Rightarrow \dots$ ]

### Gyakorló feladatok a zárthelyire:

**4/6.** Milyen szög alatt kell vízszintes terepen elhajítani egy testet, hogy a hajítási magasság megegyezzen a hajítási távolsággal?

**MO.**

$$h = d: v_0^2 \sin^2 \alpha / (2g) = v_0^2 \sin 2\alpha / g \Rightarrow 2 \sin 2\alpha = \sin^2 \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 4 \Rightarrow \alpha \approx 76^\circ$$

**4/7.**  $h = 40$  m magas torony tetejéről  $45^\circ$ -os szög alatt (fölfelé) elhajítanak egy testet  $v_0 = 40$  m/s kezdősebességgel. Mekkora a távolság a kiindulási és földre érkezési pont között?

**MO.** A test helyvektorának

függőleges komponense  $z(t) = h + (v_0 \sin\alpha) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = 40 - (40 \cdot \sin 45^\circ) \cdot t - 5 \cdot t^2$ ,

földet éréskor  $z(t^*) = 0 \Rightarrow t^* = 6,83$  s ;

vízszintes komponense:  $x(t) = (v_0 \cos\alpha) \cdot t = (40 \cdot \cos 45^\circ) \cdot t$ ,

földet éréskor  $x(t^*) = 193,1$  m .

A távolság a kiindulási és földet érési pont között  $d = \sqrt{40^2 + 193,1^2} \approx 197,2$  m

(Nem a „hajítás távolsága” képlet alkalmazandó, mivel a kiindulási és a földet érési pont nem azonos magasságon van.)

**4/8.** 7920 m magasságban állandó, 960 km/h vízszintes sebességgel haladó repülőgépről leesett az egyik ajtó. Szupermen is azon a repülőgépen utazott, de éppen aludt. 10 s-ig tartott, amíg felébresztették és elmondták neki, mi történt. Ekkor azonnal (0 s alatt) odaszaladt az ajtó helyén tátongó lyukhoz és ...

**a)** ... függőlegesen lefelé  $v_0$  kezdősebességgel elrugaszkodva utána ugrott az ajtónak.

Mekkora kezdősebességgel ugrott ki Szupermen, ha 3 s alatt érte utol az ajtót?

**b)** ... zérus kezdősebességgel, de különleges képességeit felhasználva állandó nagyságú, függőleges gyorsulással indult az ajtó után (ez a gyorsulás hozzáadódik a nehézségi erőből eredő gyorsulásához). Legalább mekkorának kellett lenni ennek a gyorsulásnak, hogy még a levegőben elérje az ajtót?

A g értékét vegyük  $9,9 \text{ m/s}^2$ -nek, a légellenállást hanyagoljuk el.

**MO.** Ha a légellenállást elhanyagolhatjuk, akkor a leesett ajtóra nem hat vízszintes irányú erő, megtartja a repülőgép sebességével megegyező vízszintes sebességkomponensét, mindig a repülőgép alatt lesz. A feladat megoldásához elég a z koordinátát felírni.

**a)** 10+3 s alatt az ajtó  $s = \frac{1}{2} \cdot 9,9 \cdot 13^2 = 836,6$  m -t zuhant.

Szupermen  $t_s = 3$  s alatt  $v_0$  kezdősebességről indulva tesz meg ekkora utat:

$s = v_0 t_s + \frac{1}{2} g \cdot t_s^2 \Rightarrow v_0 = (836,55 - \frac{1}{2} \cdot 9,9 \cdot 3^2) / 3 = 264$  m/s.

**b)** Az ajtó  $h = 7920$  m magasságból  $t_a = \sqrt{2h/g} = 40$  s alatt ér földet. Ennél 10 s -mal

kevesebb idő alatt kell Szupermennek földet érnie, ha még a levegőben el akarja kapni az ajtót.

$s = \frac{1}{2} (g+a)t^2 \Rightarrow a = 2s/t^2 - g = 2 \cdot 7920 / (40-10)^2 - 9,9 = 7,7$  m/s<sup>2</sup>.

**4/9.** 50 m/s kezdősebességgel függőlegesen felfelé hajítanak egy tárgyat. Ugyanakkor 50 m magasról szabadeséssel leesik egy másik tárgy. Mikor és milyen magasan találkoznak?

**4/10.** Mekkora kezdősebességgel kell az origóból a vízszinteshez képest  $60^\circ$ -os szög alatt eldobni egy labdát, hogy az a P (4,3) pontba érkezen?

... és még ld. a kirakott zh-kat!

### Egyéb: nem hajítás, de hasonló: konstans erő hatására mozgó test (zh-ban előfordulhat)

**4/11.** Egy  $m = 1$  g tömegű test a  $t_1 = 2$  s időben az  $x$  tengely pozitív felén van az origótól  $x_1 = 10$  cm-re, sebessége a  $+y$  tengely irányába mutat és nagysága  $v_1 = 10$  cm/s. A test a  $t_2 = 5$  s időpontban a  $P_2(-0,5$  cm, 15 cm, 0) pontban van, a sebessége a  $-x$  tengely irányába mutat és nagysága  $v_2 = 7$  cm/s. A testre állandó erő hat.

a) Mekkora az erő nagysága?

b) Mekkora a test sebessége a  $t_3 = 8$  s időpontban, és hol lesz a test akkor?

**MO.** Állandó erő esetén a gyorsulás állandó:  $\mathbf{F}/m = \mathbf{a} = \text{konst.}$ , azaz  $\dot{\mathbf{v}} = \text{konst.}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}} = \text{konst.}$

$\Rightarrow$  integrálással a sebességvektor:  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{a} \cdot t + \mathbf{v}(0)$ ,

és a helyvektor:  $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot t^2 + \mathbf{v}(0) \cdot t + \mathbf{r}(0)$ .

A feladatban adott volt a helyvektor és a sebességvektor 2-2 időben:

$$t_1 = 2 \text{ s:} \quad \mathbf{r}(2) = 0,1 \mathbf{i} \text{ [m]}, \quad \mathbf{v}(2) = 0,1 \mathbf{j} \text{ [m/s]},$$

$$t_2 = 5 \text{ s:} \quad \mathbf{r}(5) = -0,005 \mathbf{i} + 0,15 \mathbf{j} \text{ [m]}, \quad \mathbf{v}(5) = -0,07 \mathbf{i} \text{ [m/s]}.$$

A fenti általános képletekbe behelyettesítve tehát

$$\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot 2^2 + \mathbf{v}(0) \cdot 2 + \mathbf{r}(0) = 0,1 \mathbf{i}, \quad \mathbf{a} \cdot 2 + \mathbf{v}(0) = 0,1 \mathbf{j}$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot 5^2 + \mathbf{v}(0) \cdot 5 + \mathbf{r}(0) = -0,005 \mathbf{i} + 0,15 \mathbf{j}, \quad \mathbf{a} \cdot 5 + \mathbf{v}(0) = -0,07 \mathbf{i}$$

3 ismeretlen vektorunk van:  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{v}(0)$  és  $\mathbf{r}(0)$  és 4 egyenletünk, a feladat túlhatározott;  $\mathbf{v}(2)$  és  $\mathbf{v}(5)$  értékéből megkapjuk  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{v}(0)$  értékét, és bármelyik  $\mathbf{r}$ -ből  $\mathbf{r}(0)$ -at.

a) A gyorsulást megkapjuk a sebességekből:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(5) - \mathbf{v}(2)}{5 - 2} = -\frac{0,07}{3} \mathbf{i} - \frac{0,1}{3} \mathbf{j} \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right].$$

Ennek nagysága  $a = \frac{1}{3} \sqrt{0,07^2 + 0,1^2} = \frac{\sqrt{0,0149}}{3} \approx 0,04 \text{ m/s}^2$ ,

a testre ható erő nagysága pedig  $F = ma \approx 10^{-3} \text{ kg} \cdot 0,04 \text{ m/s}^2 = 4 \cdot 10^{-5} \text{ N}$ .

b) A test kezdősebessége  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(t_1) - \mathbf{a}t_1 = \mathbf{v}(t_2) - \mathbf{a}t_2 = \frac{0,14}{3} \mathbf{i} + \frac{0,5}{3} \mathbf{j}$ ,

tehát a test sebessége  $\mathbf{v}(t) = \left( -\frac{0,07}{3}t + \frac{0,14}{3} \right) \mathbf{i} + \left( -\frac{0,1}{3}t + \frac{0,5}{3} \right) \mathbf{j}$ .

$t_3 = 8$  s-ban  $\mathbf{v}(8) = \mathbf{a} \cdot 8 + \mathbf{v}(0) = -0,14 \mathbf{i} - 0,1 \mathbf{j}$ , ennek nagysága  $v(8) = \sqrt{0,14^2 + 0,1^2} \approx 0,17 \text{ m/s}$ .

A test helyvektora  $t = 0$  s-ban

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(t_1) - \frac{1}{2} \mathbf{a}t_1^2 - \mathbf{v}(0) \cdot t_1 = \mathbf{r}(t_2) - \frac{1}{2} \mathbf{a}t_2^2 - \mathbf{v}(0) \cdot t_2 = \frac{0,16}{3} \mathbf{i} - \frac{0,80}{3} \mathbf{j},$$

tehát a test helyvektora

$$\mathbf{r}(t) = \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,07}{3} t^2 + \frac{0,14}{3} t + \frac{0,16}{3} \right) \mathbf{i} + \left( -\frac{1}{2} \cdot \frac{0,1}{3} t^2 + \frac{0,5}{3} t - \frac{0,80}{3} \right) \mathbf{j}.$$

$t_3 = 8$  s-ban  $\mathbf{r}(8) = \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot 8^2 + \mathbf{v}(0) \cdot 8 + \mathbf{r}(0) = \dots = -0,32 \mathbf{i} \text{ [m]}$

**Megjegyzés:** a fenti képletekbe a  $t = 0$  s-hoz tartozó  $\mathbf{v}(0)$  és  $\mathbf{r}(0)$  értékeket írtuk be, de a  $\mathbf{v}(t)$  és  $\mathbf{r}(t)$  függvényeket felírhatjuk tetszőleges  $t_0$  időhöz tartozó  $\mathbf{v}(t_0)$  és  $\mathbf{r}(t_0)$  értékekkel:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{a} \cdot (t - t_0) + \mathbf{v}(t_0), \quad \mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot (t - t_0)^2 + \mathbf{v}(t_0) \cdot (t - t_0) + \mathbf{r}(t_0).$$

Így kiszámolhatjuk  $\mathbf{v}(8)$ -at és  $\mathbf{r}(8)$ -at úgy is, hogy nem kell számolni  $\mathbf{v}(0)$ -t és  $\mathbf{r}(0)$ -t. Ráadásul esetünkben  $t_3$  és  $t_2$  között ugyanannyi idő telik el, mint  $t_2$  és  $t_1$  között,  $\Delta t = 3$  s, és mivel a gyorsulás állandó, ezért ugyanannyit változik a sebesség is ( $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \Delta t$ ), azaz

$$\mathbf{v}(8) = \mathbf{v}(5) + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(5) + [\mathbf{v}(5) - \mathbf{v}(2)] ,$$

$$\text{vagy az is igaz, hogy } \mathbf{v}(8) = \mathbf{v}(2) + 2 \cdot \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(2) + 2 \cdot [\mathbf{v}(5) - \mathbf{v}(2)] .$$

A helyvektor számolásánál pedig

$$\mathbf{r}(8) = \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot (8-5)^2 + \mathbf{v}(5) \cdot (8-5) + \mathbf{r}(5) \quad \text{vagy} \quad \mathbf{r}(8) = \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot (8-2)^2 + \mathbf{v}(2) \cdot (8-2) + \mathbf{r}(2) .$$

### Nehezebb hajítási feladatok, zh-ban nem várhatóak ilyenek:

**4/12.** Egy  $\alpha = 30^\circ$  hajlásszögű,  $h = 1,6$  m magas lejtő tetejéről elengedünk egy ládát. Ugyanebben az időpontban a lejtő tetejéről egy labdát úgy dobunk el, hogy az a lejtő legalján éppen a ládába essen. Mekkora és milyen irányú kezdősebességgel kell a labdát eldobni? A láda és a lejtő közötti súrlódási együttható  $\mu = \sqrt{3}/8$ .

**MO.**

A láda súrlódással csúszik lefelé a lejtőn, a mozgásegyenlete

$$\text{lejtőre merőlegesen:} \quad ma_{\perp} = 0 = F_{ny} - mg \cos\alpha$$

$$\text{lejtővel párhuzamosan:} \quad ma_{\parallel} = mg \sin\alpha - \mu F_{ny}$$

tehát a gyorsulása a lejtő síkjában

$$a = a_{\parallel} = (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) g = (\sin 30^\circ - \frac{\sqrt{3}}{8} \cos 30^\circ) \cdot 10 = (0,5 - \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot 10 = 3,125 \text{ m/s}^2 .$$

Zérus kezdősebességről indulva  $s = h / \sin\alpha = 1,6 / \sin 30^\circ = 3,2$  m-t tesz meg a láda a fenti gyorsulással:

$$s = \frac{a}{2} t^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2}{3,125}} \approx 1,43 \text{ s} \quad \text{alatt ér le a láda.}$$

Ennyi idő alatt kell a labdának ugyanabba a pontba érkeznie, azaz ha az origóból indul, vízszintesen  $h / \tan\alpha = 1,6 / \tan 30^\circ \approx 2,77$  m-t tesz meg és az  $x \approx 2,77$  [m] pontba, függőlegesen  $h = 1,6$  m-t tesz meg és a  $z = -1,6$  [m] pontba érkezik.

$$\text{azaz} \quad x = (v_0 \cos\alpha) t = (v_0 \cos\alpha) \cdot 1,43 = 2,77$$

$$z = (v_0 \sin\alpha) t - g/2 t^2 = (v_0 \sin\alpha) \cdot 1,43 - g/2 \cdot 1,43^2 = -1,6$$

$$\rightarrow v_0 \approx 6,34 \text{ m/s}, \quad \alpha \approx 72,2^\circ .$$

**4/13.** Állandó hajlásszögű egyenes lejtőn csúszunk lefelé a szánkókkal  $v_{sz} = 3$  m/s állandó sebességgel. A súrlódási együttható  $\mu = 0,14$ . A szánkó elején van egy csúzli, ami vízszintesen,  $v_0 = 16$  m/s kezdősebességgel tud kilőni egy golyót. A lejtő végénél van egy céltábla. Milyen magasságban kell a mozgó szánkóból a csúzlit kilőni, hogy eltaláljuk a céltáblát?

**MO.**

A lejtő hajlásszögét abból tudjuk kiszámolni, hogy a szánkó – amit gyorsít a nehézségi erőnek a lejtővel párhuzamos komponense és fékez a súrlódási erő – állandó sebességgel csúszik, vagyis a (lejtővel párhuzamos) gyorsulása zérus:  $ma_{\parallel} = mg \sin\alpha - \mu F_{ny} = 0$ .

$$\text{A lejtőre merőleges mozgásegyenletből:} \quad ma_{\perp} = F_{ny} - mg \cos\alpha \quad \text{tudjuk, hogy} \quad F_{ny} = mg \cos\alpha,$$

$$\text{és így a lejtővel párhuzamos mozgásegyenlet} \quad ma_{\parallel} = mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha = 0$$

$$\rightarrow \mu = 0,14 = \tan\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \arctan 0,14 \approx 8^\circ .$$

$$\text{A szánkó sebességének vízszintes komponense} \quad v_{sz,x} = v_{sz} \cdot \cos\alpha \approx 2,971 \text{ m/s} ,$$

$$\text{függőleges komponense} \quad v_{sz,z} = v_{sz} \cdot \sin\alpha \approx 0,416 \text{ m/s} .$$

$$\text{A kilőtt golyó sebességének vízszintes komponense} \quad v_{g0,x} = v_{sz,x} + v_0 \approx 2,971 + 16 = 18,971 \text{ m/s} ,$$

$$\text{kezdősebességének függőleges komponense} \quad v_{g0,z} = v_{sz,z} \approx 0,416 \text{ m/s} .$$

A koordináta-rendszert az ábra szerint választva a golyó az  $x = 0, z = h$  pontból indul és az  $x = h/\operatorname{tg}\alpha, z = 0$  pontba kell megérkezzen, tehát

$$x: (v_{sz,x} + v_0) \cdot t = h / \operatorname{tg}\alpha$$

$$z: h - v_{sz,z} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 0.$$

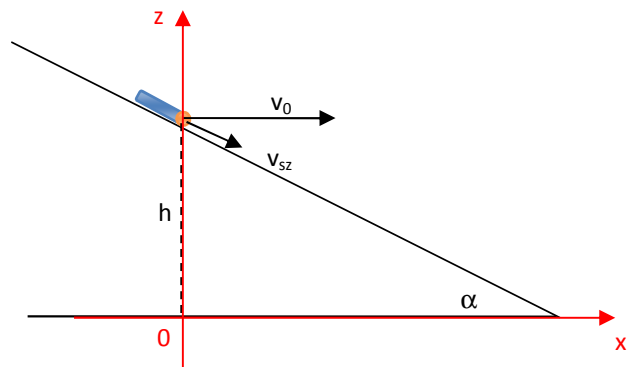
Az elsőből  $h$ -t kifejezve és átírva a másodikba

$$(v_{sz,x} + v_0) \cdot t \cdot \operatorname{tg}\alpha - v_{sz,z} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 0,$$

$$\text{amiből } t = 2 v_0 \operatorname{tg}\alpha / g \approx 0,448 \text{ s és}$$

visszahelyettesítve

$$h = 2 v_0 \operatorname{tg}\alpha (v_{sz} \sin\alpha + v_0 \operatorname{tg}\alpha) / g \approx 1,19 \text{ m}.$$



**4/14.** A 200 m magas hegy talppontjától (a hegycsúcs alatti ponttól) 500 m-re lévő puska irányzékát milyen (legkisebb) szögre kell állítani, hogy átlőjön a hegycsúcs fölött? Mennyi idő telik el, amíg a puskagolyó a hegy csúcsa fölé érkezik? A puskagolyó kezdősebessége 1000 m/s.

**MO.**

$$\text{vízszintesen } x = v_0 t \cos\alpha : 500 = 1000 t \cos\alpha \Rightarrow t \cos\alpha = 0,5$$

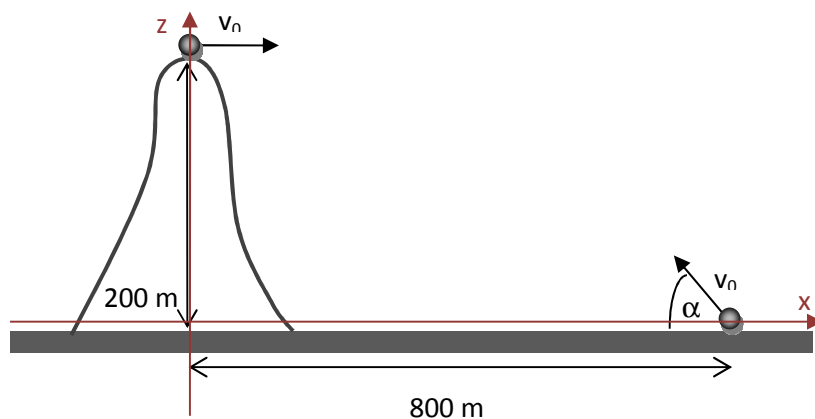
$$\text{függőlegesen } z = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 : 200 = 1000 t \sin\alpha - 5 t^2 \Rightarrow t \sin\alpha = t^2/200 + 0,2$$

Felhasználva, hogy  $(t \cos\alpha)^2 + (t \sin\alpha)^2 = t^2$ , egy  $t^2$ -ben másodfokú egyenletet kapunk:

$$0,25 + t^4/40000 + 0,002 t^2 + 0,04 = t^2, \text{ amiből } t_1 = 0,539 \text{ s és } t_2 = 199,8 \text{ s.}$$

A megfelelő szögek:  $\alpha_1 = 21,93^\circ$  (ez a minimális) és  $\alpha_2 = 89,86^\circ$  (ezt már veszélyes kipróbálni!)

**4/15.** A hegyről lövik a síkságon lévő lőállásokat. A hegyen és a síkságon lévő ágyúk egyformák, az ágyúgolyók kezdősebessége  $v_0 = 500$  m/s. A hegyen lévő ágyú csöve vízszintesen áll. A síkságon lévő ágyúból a golyót pont 1 s-mal azután lövik ki, hogy meglátták a hegyi ágyú torkolatüzét. Sikerül is az ágyúgolyót még a levegőben eltalálni és eltéríteni a céltól. Hol találja el egymást a két ágyúgolyó? Mekkora a síkságon lévő ágyú csövének a vízszintessel bezárt szöge?



**MO.** A hegycsúcsról kilőtt ágyúgolyó helyvektora, ha az origó a hegy talppontjában van, az  $x$  tengely a síkságon lévő ágyú felé mutat, és az ágyúgolyót  $t = 0$ -ban lőtték ki:

$$\mathbf{r}_1(t) = 500t \mathbf{i} + (200 - 10/2t^2) \mathbf{k},$$

a síkságon kilőtt ágyúgolyó helyvektora pedig

$$\mathbf{r}_2(t) = [800 - 500 \cdot \cos\alpha(t-1)] \mathbf{i} + [500 \cdot \sin\alpha(t-1) - 10/2(t-1)^2] \mathbf{k}$$

A két ágyúgolyó helyvektora egyenlő kell legyen; komponensenként felírva:

$$x \text{ koordináta: } 500t = 800 - 500 \cdot \cos\alpha(t-1)$$

$$z \text{ koordináta: } 200 - 10/2t^2 = 500 \cdot \sin\alpha(t-1) - 10/2(t-1)^2$$



Az első egyenletből  $\cos\alpha(t-1) = (800-500t)/500 = 1,6-t$ ,

a másodikból  $\sin\alpha(t-1) = (205-10t)/500 = 0,41-0,02t$ .

Ezeket négyzetre emelve és összeadva egy t-ben másodfokú egyenletet kapunk, aminek a megoldása  $t_1 \approx 1,42$  s és  $t_2 \approx 3040$  s.

A  $t_1$ -ből számolt szög  $\alpha_1 \approx 64,9^\circ$ , és az ágyúgolyók találkozásának helye

$$x_1(t_1) = 500 \cdot 1,42 = x_2(t_1) = 800 - 500 \cdot \cos 64,9^\circ \cdot 0,42 \approx 711 \text{ m}$$

$$z_1(t_1) = 200 - 5 \cdot 1,42^2 = z_2(t_1) = 500 \cdot \sin 64,9^\circ \cdot 0,42 - 5 \cdot 0,42^2 \approx 190 \text{ m}$$

$$\mathbf{r}(t_1) = 711 \mathbf{i} + 190 \mathbf{k} \text{ [m]}.$$

A  $t_2$ -ből számolt szög  $\alpha_2 \approx 178,9^\circ$ ,

és az ágyúgolyók találkozásának helye

$$x_1(t_2) = 500 \cdot 3040 = x_2(t_2) = 800 - 500 \cdot \cos 178,9^\circ \cdot 3039 \approx 1,52 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$z_1(t_2) = 200 - 5 \cdot 3040^2 = z_2(t_2) = 500 \cdot \sin 178,9^\circ \cdot 3039 - 5 \cdot 3039^2 \approx -4,62 \cdot 10^7 \text{ m}$$

ami nem lehetséges, mert a föld felszínét (a  $z = 0$ -t) előbb eléri az ágyúgolyók.

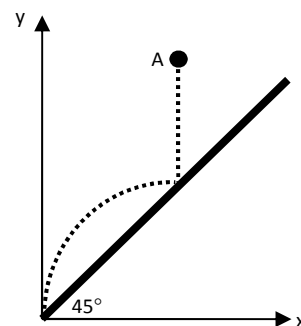
(Ha a Föld sokkal nagyobb lenne – vagy a Föld lapos lenne -, és a homogén erőtér közelítés érvényes lehetne ekkora távolságon is, és az ágyúgolyók földet érési pontja előtt elkezdődne egy  $4,62 \cdot 10^7$  m mély kráter, akkor lenne csak értelme ennek a megoldásnak.)

**4/16.** Melyek azok a pontok, amelyekből elejtve az A golyót, az a  $45^\circ$ -os lejtőről rugalmasan ütközve éppen a lejtő aljára pattan?

**MO.**

A golyó a lejtő fölött  $h$  magasságból indul, így a lejtőre érkezéskor  $v^*$  (függőleges irányú) sebessége lesz:

$$z = -h = -\frac{1}{2}gt_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow v^* = gt_1 = \sqrt{2gh}.$$



A lejtőről való elpattanáskor ez lesz a vízszintes irányú kezdősebessége, mivel a lejtő  $45^\circ$ -os.

Egyenesen a lejtő aljába pattan, így vízszintesen  $x = v^* t_2$ , függőlegesen  $z = \frac{1}{2} g t_2^2$  utat tesz meg, és mivel a lejtő  $45^\circ$ -os,  $x = z$ , azaz  $v^* t_2 = \frac{1}{2} g t_2^2$ .

Ebből  $t_2 = 2v^*/g$  és  $x = z = 2 v^{*2} / g$ ,  $v^*$ -t beírva  $x = z = 4h$ ,

azaz azok a pontok, ahonnan elejtve a golyót, az a lejtőn rugalmasan ütközve éppen a lejtő aljára pattan, a  $z = 5/4 x$  egyenes pontjai.

## EGY IGAZÁN HALADÓ HAJÍTÁSOS FELADAT: (nem zh-ra való)

**4/17.** A vízszinteshez képest mekkora szög alatt kell adott  $h$  magasságból adott  $v_0$  kezdősebességgel elhajítani egy tárgyat, hogy az a lehető legmesszebb érjen földet?

**MO.**

$h$  magasságból indulva  $t_d$  időben 0 legyen a  $z$  test koordinátája:

$$z(t_d) = 0 = h + (v_0 \sin \alpha) t_d - \frac{1}{2} g t_d^2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{2} g t_d^2 - (v_0 \sin \alpha) t_d$$

és eközben vízszintesen megtesz  $d$  távolságot:

$$x(t_d) = d = (v_0 \cos \alpha) t_d. \quad \text{Ennek keressük a maximumát, ha } \alpha \text{ változhat (} v_0 \text{ adott).}$$

Rendezzük az egyenleteket úgy, hogy  $t_d$ -t kifejezve az egyikből és áthelyettesítve a másikba felírjuk  $d$ -t  $\alpha$  függvényében, majd megkeressük a  $d(\alpha)$  függvény szélsőértékét (deriváljuk  $\alpha$  szerint és megoldjuk a  $dd/d\alpha = 0$  egyenletet).

Tehát  $d$ -ből  $t_d = d/(v_0 \cos \alpha) \rightarrow$

$$h = \frac{1}{2} g / (v_0 \cos \alpha)^2 \cdot d^2 - (v_0 \sin \alpha) / (v_0 \cos \alpha) \cdot d, \quad \text{azaz} \quad d^2 - (v_0^2/g) \cdot \sin 2\alpha \cdot d - 2h(v_0^2/g) \cos^2 \alpha = 0$$

$$\rightarrow d(\alpha) = \left(\frac{v_0^2}{2g}\right) \sin 2\alpha + \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2 \sin^2 2\alpha + 2h\left(\frac{v_0^2}{g}\right) \cos^2 \alpha} \quad \text{és}$$

$$\frac{dd}{d\alpha} = \left(\frac{v_0^2}{g}\right) \cos 2\alpha + \frac{\left(\frac{v_0^2}{g}\right) \sin 2\alpha \cos 2\alpha - 2h\left(\frac{v_0^2}{g}\right) \sin 2\alpha}{2 \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2 \sin^2 2\alpha + 2h\left(\frac{v_0^2}{g}\right) \cos^2 \alpha}} = 0$$

Hosszas rendezgetés után ebből megkapjuk, hogy  $ctg^2 \alpha = 1 + \frac{2gh}{v_0^2}$ .