

Síkbeli polárkoordináta-rendszerben a test helyvektora, sebessége és gyorsulása általános esetben:

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dots = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dots = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi$$

Ha a test körpályán mozog, akkor $r = \text{konst.} \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$, tehát

sebessége $\mathbf{v} = r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$: érintő irányú, nagysága $v = r \dot{\varphi} = r \omega$, ahol $\dot{\varphi} = \omega$ a szögsebesség [s^{-1}];

gyorsulása $\mathbf{a} = -r \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r + r \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$, aminek

sugár (radiális) irányú komponense, a centripetális gyorsulás a sebességvektor irányának

változását okozza, ez a körpálya közepe felé mutat és nagysága $a_{cp} = r \omega^2 = v^2/r = v \omega$;

érintő (tangenciális) irányú komponense a sebességvektor nagyságának változását okozza,

nagysága $a_t = r \ddot{\varphi} = r \dot{\omega} = r \beta$, ahol $\beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ a szöggyorsulás [s^{-2}]. Ha a_t és v egy irányúak,

akkor a test (szög)sebessége nő, ha ellentétesek, akkor csökken.

Körmozgás esetén a testre ható erőket sugár irányú, érintő irányú és a körpálya síkjára merőleges komponensekre bontjuk (hengerkoordináta-rendszer).

Ha $a_t = 0$, akkor a test egyenletes körmozgást végez. ($a_{cp} = 0$ nem lehetséges, mert az azt jelentené, hogy a test egyenes vonalú mozgást végez.)

Vízszintes síkban fekvő körpálya esetén a nehézségi erő (ill. ferde felület esetén a megfelelő komponense) merőleges a körpálya síkjára, a kényszererő (felület, kötél, rúd) ellensúlyozza.

Függőleges síkban fekvő körpálya esetén viszont a nehézségi erőnek van tangenciális komponense (kivéve az alsó és a felső pontot) \rightarrow a sebesség nagysága változik (hacsak nincs egyéb tangenciális erő –pl. súrlódás–, de az alábbi feladatokban ilyennel nem találkozunk).

5/1. Asztalon $m = 0,5$ kg-os golyót $\ell = 0,5$ m-es fonálon $v_0 = 5$ m/s kezdősebességgel meglökünk úgy, hogy a kezdősebesség merőleges a fonálra.

Mekkora lesz 2 s múlva a golyó sebessége és a fonálerő? A csúszási súrlódási együttható $\mu = 0,2$.

MO.

A test mozgásegyenlete $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny} + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_s$, komponensei

a körpálya síkjára merőlegesen: $ma_\perp = F_{ny} - mg = 0 \rightarrow F_{ny} = mg$;

sugár irányban a fonálerő a kör középpontja felé mutat: $ma_{cp} = F_f$;

érintő irányban a súrlódási erő a sebességgel ellentétes irányba mutat: $ma_t = -F_s = -\mu F_{ny} = -\mu mg$.

Utóbbiból $a_t = -\mu g = \text{konst.} \rightarrow v(t) = v_0 - \mu g \cdot t$; behelyettesítve $v(2) = 5 - 0,2 \cdot 10 \cdot 2 = 1$ m/s ;

a fonálerő pedig $F_f = ma_{cp} = mr\omega^2 = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{\ell}$, behelyettesítve $F_f = 0,5 \cdot 1^2 / 0,5 = 1$ N.

Megjegyzés: itt nincs értelme negatív sebességnek, a $v(t) = v_0 - \mu g \cdot t$ függvény csak $v=0$ -ig érvényes! Onnantól a testre ható erők eredője zérus.

5/2. Egy $R = 10$ cm sugarú gömb belsejében a sugár fele magasságában elhelyezkedő vízszintes síkban egy golyó kering. Számítsuk ki a keringési időt!

MO. Mivel a testre érintő irányú erő nem hat, ezért állandó sebességgel kering.

A (függőleges) nehézségi erő és a (gömb adott pontbeli érintősíkjára merőleges, tehát a gömb középpontja felé mutató) nyomóerő eredője vízszintes kell legyen (különben a pálya nem vízszintes lenne), ez adja a test centripetális gyorsulását:

$$mg + F_{ny} = F_e = ma = ma_{cp},$$

Legyen α a nyomóerőnek a függőlegessel bezárt szöge.

Az erőket felrajzolva látható, hogy $F_e = mg \operatorname{tg}\alpha$.

Vagy megkaphatjuk ugyanezt a mozgásegyenlet

függőleges: $mg = F_{ny} \cos \alpha$ és

sugár irányú: $ma_{cp} = F_{ny} \sin \alpha$ komponenseiből kifejezve: $F_{ny} = mg / \cos \alpha$, $ma_{cp} = mg \sin \alpha / \cos \alpha$.

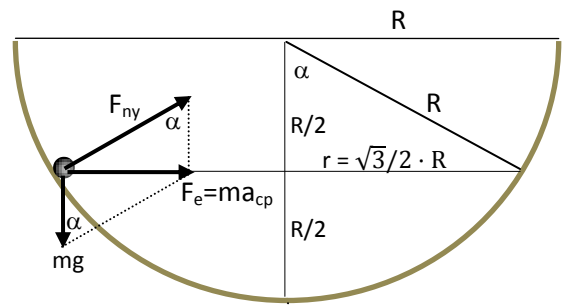
Másrészt $ma_{cp} = mr\omega^2$, ahol $\omega = 2\pi/T$ (T a periódusidő), és

r a körpálya sugara (a keringés síkjában): $r = R \sin \alpha$.

$$\text{Tehát } F_e = mr\omega^2 = m \cdot (R \sin \alpha) \cdot \omega^2 = mg \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \omega^2 = g / (R \cos \alpha) \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R \cos \alpha}{g}}$$

A geometriai feltételekből látható, hogy $\cos \alpha = (R/2) / R = 1/2$, tehát $\alpha = 60^\circ \Rightarrow T \approx 0,4443 \text{ s}$.

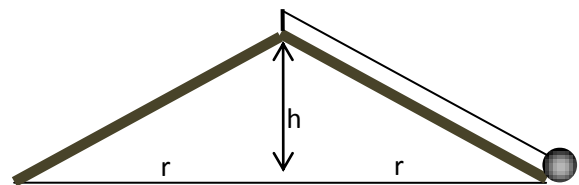
Egyéb keresztmetszetű vályúkra (parabola, stb.) ld. a gyakorló és zh feladatokat!



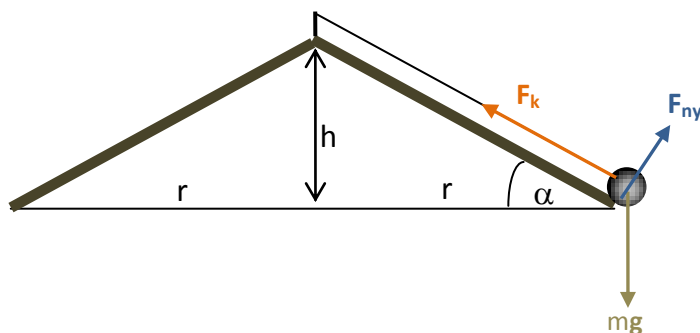
5/3. Egy körhinta kúp alakú, az alapkörének sugara $r = 3 \text{ m}$, a közepén a magassága $h = 2,2 \text{ m}$.

a) Milyen fordulatszámnál kezdenek el a körhinta ülései emelkedni?

b) Mekkora ekkor a kötélerő, ha a benne ülő gyerek tömege az üléssel együtt 36 kg ?



MO.



A test (gyerek+ülés) mozgásegyenlete vektori alakban:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_{ny}$$

Mivel a test vízszintes síkban kering körpályán (azokat a fordulatszámokat vizsgálva, amikor még nem emelkedik el az ülés a kúpos részről), a gyorsulása a vízszintes síkú körpálya közepe felé mutató centripetális gyorsulás. Az erőket sugár irányú és függőleges komponensekre bontva tehát

$$ma_{cp} = F_k \cos \alpha - F_{ny} \sin \alpha \quad (\text{I.})$$

$$0 = F_k \sin \alpha + F_{ny} \cos \alpha - mg \quad (\text{II.})$$

(Az érintő irányú gyorsulást figyelmen kívül hagyjuk, mert nem azt vizsgáljuk, hogy a fordulatszám fokozatosan nő, hanem különböző állandó szögsebességű állapotokat hasonlítunk össze.)

a) Először vizsgáljuk meg általánosan: fejezzük ki a nyomóerőt a fordulatszám függvényében!

a (II.) egyenletből $F_k = (mg - F_{ny} \cos\alpha) / \sin\alpha$,

ezt behelyettesítve az (I.) egyenletbe

$$ma_{cp} = (mg - F_{ny} \cos\alpha) \cos\alpha / \sin\alpha - F_{ny} \sin\alpha = mg / \operatorname{tg}\alpha - F_{ny} / \sin\alpha.$$

Mivel $ma_{cp} = mr\omega^2 = mr(2\pi f)^2$, ezért

$$mr(2\pi f)^2 = mg / \operatorname{tg}\alpha - F_{ny} / \sin\alpha \rightarrow F_{ny} = mg \cos\alpha - mr(2\pi f)^2 \sin\alpha.$$

Látható, hogy a nyomóerő a nyugalmi $mg \cos\alpha$ értékről az 'f' fordulatszám növelésével csökken.

Az ülések akkor kezdenek el emelkedni, amikor a $F_{ny} = 0$:

$$mg \cos\alpha - mr(2\pi f_{krit})^2 \sin\alpha = 0 \rightarrow f_{krit}^2 = \frac{g}{4\pi^2 r \operatorname{tg}\alpha} = \frac{g}{4\pi^2 r \left(\frac{h}{r}\right)} = \frac{g}{4\pi^2 h} \rightarrow f_{krit} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}},$$

behelyettesítve $f_{krit} \approx 0,3393 \text{ s}^{-1}$.

Jelen esetben elég lett volna az elemelkedés pillanatát ($F_{ny}=0$) vizsgálni, ekkor a mozgásegyenletek

$$ma_{cp} = F_k \cos\alpha$$

$$0 = F_k \sin\alpha - mg$$

A másodikból $F_k = mg / \sin\alpha$, ezt beírva az elsőbe $mr(2\pi f_{krit})^2 = (mg / \sin\alpha) \cos\alpha \rightarrow \text{stb.}$

b) A (II.) egyenletből $F_{ny} = 0$ esetén: $F_k = mg / \sin\alpha \approx 608,8 \text{ N}$.

(Bonyolultabb megoldás, ha kifejezzük a kötélterőt a fordulatszám függvényében:

$$F_k = \dots = mg \sin\alpha + mr \cos\alpha (2\pi f)^2, \text{ majd behelyettesítjük } f_{krit} \text{ értékét.})$$

5/4. Függőleges síkban körpályán haladó repülőgép sebessége 1080 km/h.

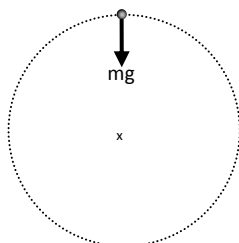
a) Mekkora legyen a körpálya sugara, hogy a legfelső pontban a pilóta „súlytalan” legyen?

b) És mekkora legyen a körpálya sugara, ha azt szeretnénk elérni, hogy a pilóta 'g' gyorsulást érezzen a talpa felé?

A b) esetben a pilóta azt látná, hogy amit elenged, a lába felé esik; ha vizet önt, akkor az a lába felé folyik, és meg is tudja inni a pohárból, ahogy ezt az alábbi videón is lehet látni:

https://www.youtube.com/watch?v=g99ho_ExApU

MO. $v = 1080 \text{ km/h} = 300 \text{ m/s}$

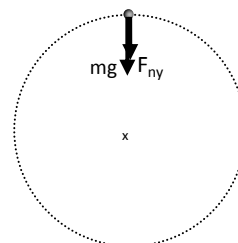


a) A legfelső pontban a pilótára csak a nehézségi erő hat, mivel súlytalan, azaz a repülőgép nem hat rá nyomóerővel:

$$ma = mg$$

A gyorsulása a körpálya középpontja felé mutató centripetális gyorsulás, tehát

$$mg = ma_{cp} = mv^2/R \Rightarrow R = v^2/g = 9000 \text{ m.}$$



b) A legfelső pontban a repülőgép függőlegesen lefelé nyomja a pilótát (fejjel lefelé ül a gépben).

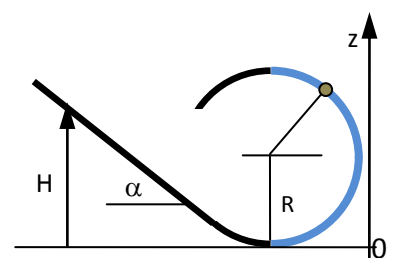
$$ma = mg + F_{ny}$$

Mivel a nyomóerő éppen mg nagyságú:

$$mg + F_{ny} = 2mg = ma_{cp} = mv^2/R$$

$$\Rightarrow R = v^2/2g = 4500 \text{ m.}$$

5/5. Az α hajlásszögű egyenes lejtő érintő irányban csatlakozik az R sugarú körív keresztmetszetű vályúhoz. A súrlódás elhanyagolható. Egy testet kezdősebesség nélkül elengedünk a lejtő H magasságú pontjából. Adjuk meg a testre ható nyomóerőt tetszőleges kiindulási H magasság esetén a z koordináta függvényében a vályú jobb oldali (kékre színezett) részére!



MO.

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny}$$

érintő irányú: $ma_t = mR\ddot{\varphi} = -mg \cos\varphi$

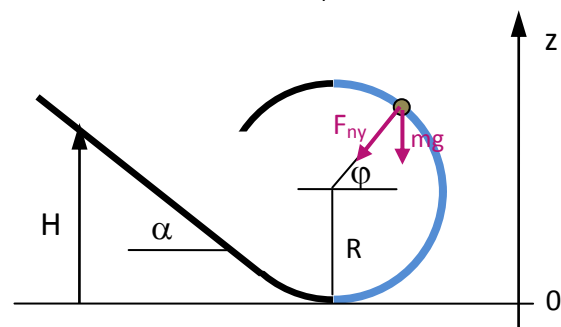
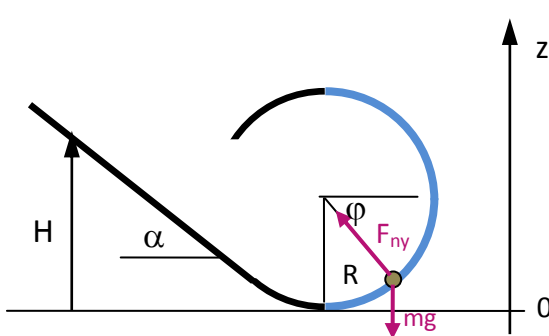
sugár irányú: $ma_{cp} = mR\dot{\varphi}^2 = F_{ny} \pm mg \sin\varphi$

A centripetális gyorsulást az mg sugárirányú komponensének és a nyomóerőnek az eredője adja, ebből tehát ki tudjuk fejezni a nyomóerőt, ha ismerjük a centripetális gyorsulást az adott pontban, amihez szükség van a (szög)sebesség helyfüggésére.

Elvileg a fenti differenciálegyenlet-rendszer megoldása a $\varphi(t)$ és az $\omega(t)$ függvény, amiből előállítható az $\omega(\varphi)$ függvény – ez azonban most így nem lenne megoldható, de közvetlenül az $\omega(\varphi)$ függvényt meg tudnánk határozni (ld. az 5/14. feladatot). Viszont mivel a súrlódás elhanyagolható, egyszerűbben ki tudjuk fejezni a sebességet energia-megmaradást felírva a magassággal:

$$mgH = mgz + \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v^2 = 2g(H-z)$$

A $v(z)$ függvény ismeretében pedig a sugár irányú egyenletből kifejezhető $F_{ny}(z)$.



Az alsó íven $ma_{cp} = F_{ny} - mg \sin\varphi$,
és itt $\sin\varphi = (R-z)/R$, tehát
 $ma_{cp} = F_{ny} - mg(R-z)/R = F_{ny} + mg(z-R)/R$

A felső íven $ma_{cp} = F_{ny} + mg \sin\varphi$,
és itt $\sin\varphi = (z-R)/R$, tehát
 $ma_{cp} = F_{ny} + mg(z-R)/R$

Tehát attól függetlenül, hogy a test az alsó vagy felső íven van és az mg sugárirányú komponense befelé vagy kifelé mutat, ma_{cp} kifejezése megegyezik. (Mivel mg -nek a sugárirányú vetületére van szükségünk, felírhatjuk az mg és az \mathbf{e}_r egységvektor skalárszorzatát, abból is megkaphatjuk ezt.)

F_{ny} -t kifejezve ma_{cp} -vel és abba a fenti v^2 -et behelyettesítve

$$F_{ny} = ma_{cp} - mg(z-R)/R = mv^2/R - mg(z-R)/R = 2mg(H-z)/R - mg(z-R)/R = mg(2H-3z+R)/R$$

($F_{ny} = 0$, ha $z = (2H+R)/3$, annál feljebb tehát nem jut el a test a vályúban, elválik a falától.)

Gyakorló feladatok a zárthelyire

5/6. Körpályán egyenletesen lassuló mozgással mozgó anyagi pont egy félkör megtétele közben elveszti sebessége felét. Hol áll meg?

MO.

$$\beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \text{konst.} \Rightarrow \omega = \dot{\varphi} = \omega_0 - \beta t, \quad \varphi = \omega_0 t - \beta/2 \cdot t^2$$

először t_1 idő alatt a sebessége a felére csökken: $\omega(t_1) = \omega_0 - \beta t_1 = \omega_0/2$ (1)

és megtesz egy félkört, azaz $\varphi(t_1) = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2}\beta \cdot t_1^2 = \pi$ (2)

majd további t_2 idő alatt a sebessége $\omega_0/2$ -ről nullára csökken: $\omega(t_2) = \omega_0/2 - \beta t_2 = 0$ (3)

(1)-ből $t_1 = \omega_0/(2\beta)$, (3)-ból $t_2 = t_1$, (2)-ből $\beta = 3/(8\pi) \cdot \omega_0^2$, amivel

$\varphi(t_2) = \omega_0/2 \cdot t_2 - \frac{1}{2}\beta \cdot t_2^2 = \pi/3$, azaz még egy hatod kört tesz meg.

5/7. Egy ω szögsebességgel forgó vízszintes korongon egy m tömegű anyagi pont helyezkedik el. A tapadási súrlódási tényező μ_t . Milyen r sugáron belül marad a koronghoz képest nyugalomban a fenti tömegpont?

MO.

Mivel $F_t = ma_{cp} = mr\omega^2$ és $F_t \leq \mu_t mg$, $mr\omega^2 \leq \mu_t mg \rightarrow r \leq \mu_t / \omega^2$.

5/8. Milyen φ szöggel kell az $R = 50$ m sugarú kanyarban az úttestet megdőnteni, ha a rajta haladó autók sebessége 72 km/h? A cél az, hogy ónos esőben (amikor $\mu=0$) se csússzanak meg oldalirányban az autók.

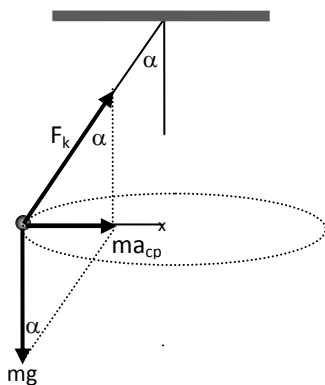
MO.

A nehézségi erő és a (lejtő síkjára merőleges) nyomóerő eredője vízszintesen a körpálya közepe felé mutat és a test centripetális gyorsulását adja.

Az erőket felrajzolva látható, hogy $ma_{cp} = mg \operatorname{tg}\varphi$,

azaz $ma_{cp} = mv^2/R = mg \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = v^2 / (gR) = 0,8 \Rightarrow \varphi \approx 38,66^\circ$.

5/9. (DRS. 6.9, volt Bevezető fizikán) Kúpinga hossza ℓ , a kúpszög 2α . Mekkora a keringési idő?



MO. A nehézségi erő és a kötédirányú húzóerő eredője vízszintesen a körpálya közepe felé mutat és a test centripetális gyorsulását adja.

Az erőket felrajzolva látható, hogy

$ma_{cp} = mg \operatorname{tg}\alpha$,

másrészt $ma_{cp} = mr\omega^2$.

A körpálya sugara $r = \ell \sin\alpha$.

Tehát $ma_{cp} = mr\omega^2 = m \ell \sin\alpha \cdot \omega^2 = mg \operatorname{tg}\alpha$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell \cos \alpha}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cos \alpha}{g}}$$

5/10. Félgömbben a sugár egynegyedénél ill. háromnegyedénél kering egy-egy golyó, vízszintes síkban, súrlódás nélkül. Mennyi a keringési idők aránya?

5/11. Az $y = (0,5\text{cm}^{-1})x^2$ egyenletű parabola y tengely körüli forogásával nyert paraboloid belsejében az $y = 2$ cm és az $y = 4,5$ cm magasan elhelyezkedő síkokban két golyó kering.

a) Milyen sebességgel keringenek?

b) Mennyi idő alatt tesznek meg egy fordulatot?

MO.

a) A nehézségi erő és a forgási paraboloid adott pontbeli érintősíkjára merőleges nyomóerő eredője vízszintesen a körpálya közepe felé mutat és a test centripetális gyorsulását adja.

A mértékegységek miatt írjuk fel a parabola egyenletét úgy, hogy bevezetünk egy 'a' paramétert:

$y = ax^2$, és tudjuk, hogy $a = 0,5 \text{ cm}^{-1}$. Behelyettesítéskor erre figyelni kell; legegyszerűbb cm-ben számolni, de akkor g-t is át kell számolni cm/s^2 -be: $g = 1000 \text{ cm/s}^2$.

A parabola érintője dy/dx , ahol tehát $dy/dx = d(ax^2)/dx = 2ax$, vagyis az érintőnek az x tengellyel bezárt α szögére $\text{tg}\alpha = dy/dx = 2ax$.

Az erőket felrajzolva látható, hogy $ma_{cp} = mg \text{ tg}\alpha$;

másrészt $ma_{cp} = mv^2/r$.

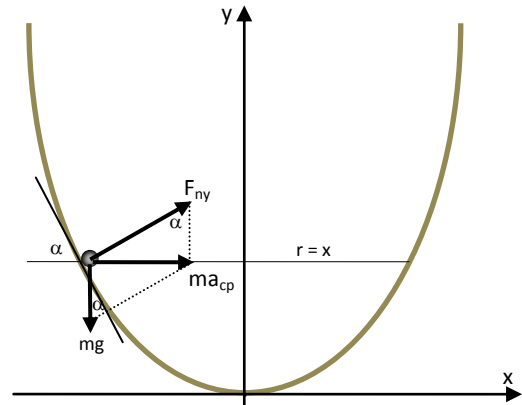
A körpálya sugara mindig az adott y magasság felhasználásával a parabola egyenletéből visszaszámolható

x érték, azaz $x_1 = 2 \text{ cm}$, $x_2 = 3 \text{ cm}$.

Ezekből $ma_{cp} = mv^2/r = mv^2/x = mg \text{ tg}\alpha = mg \cdot 2ax$

$$\Rightarrow v^2 = 2ax^2g \Rightarrow v_1 \approx 63,2 \text{ cm/s}, v_2 \approx 94,9 \text{ cm/s}.$$

b) $\omega = v/r = v/x = \sqrt{2ag} = 2\pi/T \Rightarrow T = 2\pi / \sqrt{2ag} \approx 0,2 \text{ s}$ a keringés helyétől függetlenül.



5/12. Egy R sugarú félgömb peremétől súrlódásmentesen legördülő m tömegű golyó mekkora erővel nyomja a félgömb fenekét?

MO.

A körpálya alsó pontján a félgömbre merőleges, függőlegesen felfelé mutató nyomóerő és a függőlegesen lefelé mutató nehézségi erő eredője felfelé mutat a körpálya közepe felé:

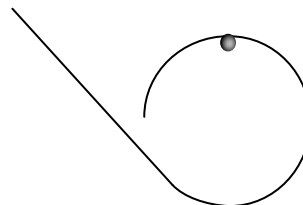
$$ma_{cp} = F_{ny} - G \Rightarrow F_{ny} = G + ma_{cp} = mg + mv^2 / R$$

A sebességet kiszámíthatjuk az energia-megmaradásból (a súrlódás elhanyagolható):

$$mgR = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gR$$

$$\text{Tehát } F_{ny} = mg + mv^2 / R = mg + 2mg = 3mg$$

5/13. Ferde lejtő átmegy függőleges körpályába. A lejtőn legalább milyen magasságból kell a testet elengedni, ha azt akarjuk, hogy végigmenjen a körpályán (a legfelső pontnál se váljon el)? A súrlódás elhanyagolható. Mekkora nyomóerő hat a testre a körpálya legalsó pontján?



MO.

A körpálya legfelső pontján a pálya által a testre kifejtett nyomóerő függőlegesen lefelé mutat, így $ma_{cp} = mg + F_{ny} \rightarrow F_{ny} = ma_{cp} - mg = mv^2/R - mg$.

A nyomóerő nem lehet negatív: $F_{ny} \geq 0: mv^2/R - mg \geq 0 \rightarrow v^2 \geq gR$.

ezt beírva a $v^2 \geq gR$ feltételbe $2g(h-2R) \geq gR \rightarrow h \geq 5/2 R$.

A körpálya legalsó pontján a pálya által a testre kifejtett nyomóerő függőlegesen felfelé mutat, így $ma_{cp} = F_{ny} - mg \rightarrow F_{ny} = ma_{cp} + mg = m v_{lent}^2 / R + mg$.

A sebesség az energia-megmaradásból kifejezve:

$$mgh = \frac{1}{2} m v_{lent}^2 \Rightarrow v_{lent}^2 = 2gh,$$

és ezt a nyomóerőbe beírva $F_{ny} = 2mg h/R + mg$.

Mivel $h \geq 5/2 R$, ezért $F_{ny} \geq 2mg \cdot (5/2) + mg = 6mg$.

A nyomóerő a legalsó ponton $F_{ny} \geq 6mg$, tehát a test gyorsulása legalább $6g$! (Hullámvasút!)

5/14. R sugarú félgömb tetejéről (A pont) súrlódásmentesen csúszik le egy golyó.

a) Írjuk fel a golyó mozgásegyenletét! Bontsuk fel a golyóra ható erőket és a gyorsulást érintőleges és radiális komponensekre!

b) Mekkora a golyó szögsebessége a B pontnál?

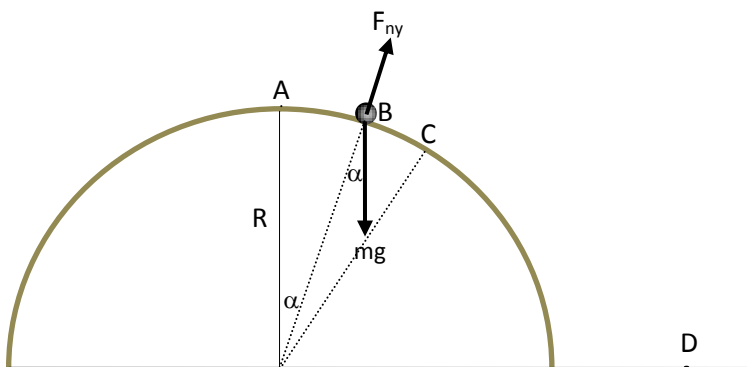
c) Mekkora erővel nyomja a golyó a gömböt a B pontnál?

d) A golyó a C pontnál hagyja el a gömböt. Mekkora az α_0 szög?

e) Mennyi a golyó sebessége a C pontnál?

f) A golyó a D pontnál ér földet. Milyen távol van a D pont a félgömbtől?

MO.



a) A golyótól a félgömb középpontjához húzott sugárnak a függőlegessel bezárt szöge α , a szögsebesség tehát $\omega = \dot{\alpha}$.

A golyó mozgásegyenlete vektori alakban: $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny}$.

Bontsuk fel a nehézségi erőt tangenciális és radiális komponensre,

és írjuk fel a test gyorsulását polárkoordináta-rendszerben:

tangenciális komponens: $ma_t = mR d\omega/dt = mg \sin \alpha$ (1)

radiális komponens: $ma_{cp} = mR\omega^2 = mg \cos \alpha - F_{ny}$ (2)

b) Szükségünk lesz az $\omega(\alpha)$ függvényre. Ezt kétféleképpen kaphatjuk meg:

A differenciálegyenlet-rendszer megoldásával: **EZT A MEGOLDÁST NEM KELL TUDNI ZH-N!**

Az (1) egyenlet átalakításával az ω szögsebesség időfüggése ($d\omega/dt$) helyett nézzük a szögsebességnek az α szögtől való függését ($d\omega/d\alpha$): $mR \frac{d\omega}{dt} = mR \frac{d\omega}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = mR\omega \frac{d\omega}{d\alpha} = mg \sin \alpha$.

Ezt szeparáljuk és integráljuk: $\int_0^\omega R\omega d\omega = \int_0^\alpha g \sin \alpha d\alpha$

$$\Rightarrow R \omega^2 / 2 = g (1 - \cos \alpha) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g(1 - \cos \alpha)}{R}}$$

Ugyanezt kifejezhetjük az energia-megmaradásból is:

a golyó R magasságban zérus sebességgel indul, és $R \cos \alpha$ magasságban $v = R\omega$ sebessége van:

$$mgR = mgR \cos \alpha + \frac{1}{2} m (R\omega)^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g(1 - \cos \alpha)}{R}}$$

c) A (2) egyenletből $F_{ny} = mg \cos \alpha - mR\omega^2$.

Az előbb kifejeztük ω -t az α függvényében, helyettesítsük be ide:

$$F_{ny} = mg \cos \alpha - 2mg(1 - \cos \alpha) = mg(3 \cos \alpha - 2).$$

d) A golyó akkor hagyja el a gömböt, amikor $F_{ny} = 0$, azaz $\cos \alpha_0 = 2/3 \Rightarrow \alpha_0 \approx 48,2^\circ$.

e) A golyó sebességének nagysága a C pontban $v_0 = R \cdot \omega(\alpha_0) = \sqrt{2gR(1 - \cos \alpha_0)} = \sqrt{2Rg/3} \approx 2,58\sqrt{R}$,
iránya pedig az érintő iránya, azaz

$$\mathbf{v}_0 = \cos \alpha_0 \sqrt{2gR(1 - \cos \alpha_0)} \mathbf{i} - \sin \alpha_0 \sqrt{2gR(1 - \cos \alpha_0)} \mathbf{k} \approx 1,72\sqrt{R} \mathbf{i} - 1,92\sqrt{R} \mathbf{k}.$$

f) Ha a félgömb középpontjába helyezük az origót, a golyó az

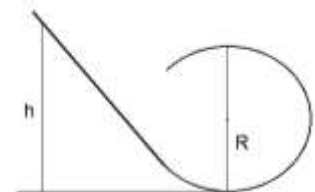
$$\mathbf{r}_0 = (R \sin \alpha_0) \mathbf{i} + R \cos \alpha_0 \mathbf{k} \approx 0,745R \mathbf{i} + 0,667R \mathbf{k} \text{ pontból indul (C pont).}$$

$$\text{Tehát } z(t) = 0,667R - 1,92\sqrt{R}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

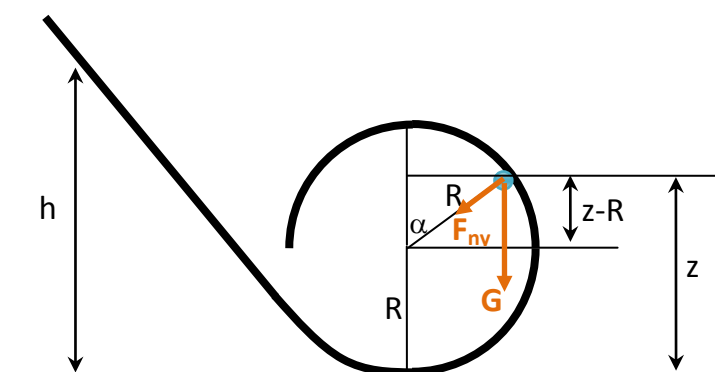
$$z = 0, \text{ ha } t_1 \approx 0,22\sqrt{R}.$$

és ekkor $x(t_1) = 0,745R + 1,72\sqrt{R}t_1 = 1,12R$, azaz a félgömbtől $0,12R$ távolságra ér földet a golyó.

5/15. Az egyenes lejtő érintőként csatlakozik a kör keresztmetszetű függőleges vályúhoz. A lejtőn h magasságból kezdősebesség nélkül elindul egy test. Adjuk meg azt a $z(h)$ függvényt, ami leírja, hogy a h magasság függvényében milyen z magasságban fog elválni a test a körpályától! Ábrázoljuk is a függvényt (ügyelve az értelmezési tartományra)! A test súrlódás nélkül csúszik.



MO.



A testre hat a \mathbf{G} nehézségi erő és a vályú falától származó \mathbf{F}_{ny} nyomóerő, tehát a mozgásegyenlet:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{G} + \mathbf{F}_{ny}, \text{ aminek}$$

érintő irányú komponense $ma_t = mg \sin \alpha$ és

radiális komponense $ma_{cp} = mg \cos \alpha + F_{ny}$;

utóbbiból a nyomóerő $F_{ny} = ma_{cp} - mg \cos \alpha$, ahol $\cos \alpha = (z-R)/R$.

Ahhoz, hogy a nyomóerőt ismerjük α függvényében, ismerni kell a_{cp} -t α függvényében. Mivel a súrlódás elhanyagolható, számolhatunk energia-megmaradásból:

$$mgh = mgz + \frac{1}{2} mv^2 \rightarrow v^2 = (R\omega)^2 = 2g(h-z)$$

$$a_{cp} = R\omega^2 = 2g(h-z)/R \quad \text{és} \quad F_{ny} = 2mg(h-z)/R - mg(z-R)/R = mg(2h-3z+R)/R.$$

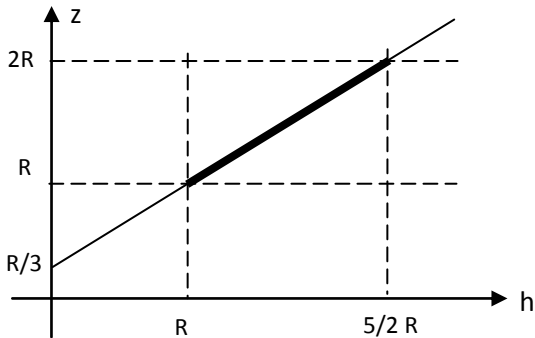
$$\text{Ott válik el a test a vályútól, ahol } F_{ny} = 0, \text{ azaz } mg(2h-3z+R)/R = 0 \rightarrow$$

$$\text{a keresett } z(h) \text{ függvény tehát } z = (2h+R)/3 = R/3 + 2/3 \cdot h$$

$R/3$ tengelymetszetű és $2/3$ meredekségű egyenes, de annak csak az a szakasza, ahol

z értéke R és $2R$ közé esik (mert a vályú alsó felében nem válik el a golyó, és $z = 2R$ esetén meg már

végigmegy a vályún). Az $R < z < 2R$ feltételből $R < h < 5/2 R$.



Körpálya általános gravitációs erővel

5/16. Milyen távolságban keringenek a Föld középpontjától az ún. álló műholdak? (szögsebességük megegyezik a Föld szögsebességével)

MO.

A testre egyetlen erő hat, a Föld vonzóereje, ez tartja körpályán:

$$ma_{cp} = mr\omega^2 = \gamma m \cdot m_{Föld} / r^2 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{\gamma m_{Föld}}{\omega^2}}, \text{ ahol } \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2},$$

$$m_{Föld} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, r_{Föld} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m},$$

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi/(24 \cdot 60 \cdot 60) = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

amiből $r = 42,3 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Számolhatunk úgy is, hogy γ és $m_{Föld}$ értéke helyett felhasználjuk azt, hogy a Föld felszínén

$$mg = \gamma m \cdot m_{Föld} / r_{Föld}^2, \text{ azaz } \gamma m_{Föld} = g r_{Föld}^2$$

$$\text{vagyis } mr\omega^2 = \gamma m \cdot m_{Föld} / r^2 = m \cdot g \cdot r_{Föld}^2 / r^2 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{g r_{Föld}^2}{\omega^2}}$$

5/17. Számítsuk ki a Hold centripetális gyorsulását kétféleképpen: a

a) gravitációs erőtvénnyt,

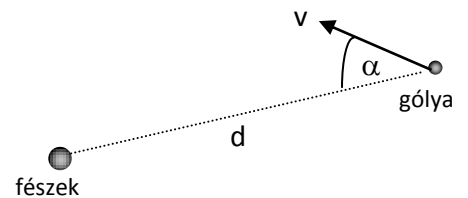
b) körmozgás adatait felhasználva.

A Hold pályájának sugara kb. 60-szorosa a Föld sugarának ($R_{Föld} \approx 6400 \text{ km}$),

a Hold keringési ideje 27 nap.

Nem zh feladat: kancsal fecske, avagy inkább kancsal gólya (vagy még inkább normális molylepke)

A kancsal gólya szeretne a fészkére repülni. Ő azt hiszi, hogy egyenesen a fészke felé repül, de kancsalsága miatt mindig az őt a fészkekkel összekötő egyenessel állandó α szöget bezárva repül. A gólya sebességének nagysága állandó (v). Odaér-e valaha a fészkére?



MO. Síkbeli polárkoordináta-rendszerben a sebességvektor

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{r}\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi,$$

azaz a sebességvektor radiális komponense $v_r = \dot{r}$, tangenciális komponense $v_t = r\dot{\varphi}$.

Legyen a fészek az origóban, a gólya helyvektora \mathbf{r} . Bontsuk fel a gólya sebességét radiális és tangenciális komponensekre: $\mathbf{v} = -v \cos \alpha \mathbf{e}_r + v \sin \alpha \mathbf{e}_\varphi$.

A radiális komponenst tekintve tehát

$$(1) \dot{r} = -v \cos \alpha$$

Integrálva: $r = d - (v \cos \alpha) t$, azaz a gólya távolsága a fészektől lineárisan csökken,

és $t = d / (v \cos \alpha)$ idő alatt $r = 0$, vagyis a gólya beér a fészkébe!

A kérdést tehát megválasztuk, de nézzük meg azt is, milyen pályán repül a gólya.

A tangenciális komponenst tekintve

$$(2) r \dot{\varphi} = v \sin \alpha, \text{ ahol}$$

α a gólya kancsalságának szöge, ez konstans,

φ a fészektől a fecskéhez t időben húzott helyvektornak a 0 időben húzott helyvektorral bezárt szöge.

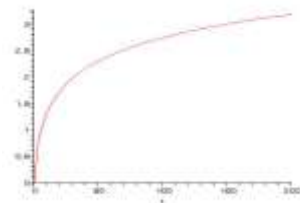
$$r(t)\text{-t behelyettesítve } (d - vt \cos \alpha) \frac{d\varphi}{dt} = v \sin \alpha,$$

$$\text{szeparálva és integrálva: } \int \frac{1}{d - v \cos \alpha \cdot t} dt = \frac{1}{v \sin \alpha} \int d\varphi \rightarrow \frac{1}{-v \cos \alpha} \ln \frac{d - v \cos \alpha \cdot t}{d} = \frac{\varphi}{v \sin \alpha},$$

$$\text{amiből } \varphi = -\text{tg} \alpha \cdot \ln \left(1 - \frac{v \cos \alpha}{d} t \right).$$

$t \rightarrow \frac{d}{v \cos \alpha}$ esetén ez a függvény végtelenhez tart, vagyis a gólya végtelen

sokszor fordul körbe, amíg beér a fészkébe, de ezt véges idő alatt és véges úton teszi.



Határozzuk meg a gólya pályáját!

Az egyik lehetőség, hogy az $r(t)$, $\varphi(t)$ függvényekből kiküszöböljük t -t:

$$r = d - (v \cos \alpha) t \Rightarrow t = (d - r) / (v \cos \alpha) \text{ és } \varphi = -\text{tg} \alpha \cdot \ln \left(1 - \frac{v \cos \alpha}{d} \cdot \frac{d - r}{v \cos \alpha} \right) = -\text{tg} \alpha \cdot \ln \frac{r}{d};$$

a másik lehetőség, hogy az (1) és (2) differenciálegyenletet elosztjuk egymással:

$$\frac{v_t}{v_r} = \frac{r d\varphi}{dr} = \frac{v \sin \alpha}{-v \cos \alpha} = -\text{tg} \alpha, \text{ szeparáljuk: } \int_0^\varphi d\varphi = -\text{tg} \alpha \cdot \int_d^r \frac{1}{r} dr \text{ és integráljuk:}$$

$$\varphi = -\text{tg} \alpha \cdot \ln \frac{r}{d}$$

Ez az ún. logaritmikus spirális egyenlete, melynek jellemzője, hogy egy-egy teljes fordulatot megtéve a középponttól mért távolság mértani sor szerint (mindig ugyanannyiadrészt) csökken:

$$r\text{-et kifejezve } \varphi(r)\text{-ből } r = d \cdot e^{-\varphi / \text{tg} \alpha}, \quad \frac{r_2}{r_1} = e^{-\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\text{tg} \alpha}}$$

egy fordulatot megtéve $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$,

$$\text{így } \frac{r_2}{r_1} = e^{-\frac{2\pi}{\text{tg} \alpha}} = \text{konst.}$$

