Síkbeli polárkoordináta-rendszerben a test helyvektora, sebessége és gyorsulása általános esetben:

$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e_r}$

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \cdots = \dot{r}\mathbf{e_r} + r\dot{\varphi}\mathbf{e_\varphi}$

$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \cdots = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e_r} + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{e_\varphi}$

Ha a test <u>körpályán</u> mozog, akkor r = konst. → $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, tehát

sebessége $\mathbf{v} = r\dot{\varphi}\mathbf{e_\varphi}$: érintő irányú, nagysága $v = r\dot{\varphi} = r\omega$, ahol $\dot{\varphi} = \omega$ a szögsebesség $[s^{-1}]$;

gyorsulása $\mathbf{a} = -r\dot{\varphi}^2\mathbf{e_r} + r\ddot{\varphi}\mathbf{e_\varphi}$, aminek

sugár (radiális) irányú komponense, a centripetális gyorsulás a sebességvektor irányának változását okozza, ez a körpálya közepe felé mutat és nagysága $a_{cp} = r\omega^2 = v^2/r = v\omega$;

érintő (tangenciális) irányú komponense a sebességvektor nagyságának változását okozza, nagysága $a_t = r\ddot{\varphi} = r\dot{\omega} = r\beta$, ahol $\beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ a szöggyorsulás $[s^{-2}]$. Ha a_t és v egy irányúak, akkor a test (szög)sebessége nő, ha ellentétesek, akkor csökken.

Körmozgás esetén a testre ható erőket sugár irányú, érintő irányú és a körpálya síkjára merőleges komponensekre bontjuk (hengerkoordináta-rendszer).

Ha $a_t = 0$, akkor a test egyenletes körmozgást végez. ($a_{cp} = 0$ nem lehetséges, mert az azt jelentené, hogy a test egyenes vonalú mozgást végez.)

Vízszintes síkban fekvő körpálya esetén a nehézségi erő (ill. ferde felület esetén a megfelelő komponense) merőleges a körpálya síkjára, a kényszererő (felület, kötél, rúd) ellensúlyozza.

Függőleges síkban fekvő körpálya esetén viszont a nehézségi erőnek van tangenciális komponense (kivéve az alsó és a felső pontot) → a sebesség nagysága változik (hacsak nincs egyéb tangenciális erő –pl. súrlódás–, de az alábbi feladatokban ilyennel nem találkozunk).

5/1. Asztalon m = 0,5 kg-os golyót ℓ = 0,5 m-es fonálon v_0 = 5 m/s kezdősebességgel meglökünk úgy, hogy a kezdősebesség merőleges a fonálra.
Mekkora lesz 2 s múlva a golyó sebessége és a fonálerő? A csúszási súrlódási együttható μ = 0,2.

MO.

A test mozgásegyenlete $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F_{ny}} + \mathbf{F_f} + \mathbf{F_s}$, komponensei

a körpálya síkjára merőlegesen: $ma_\perp = F_{ny} - mg = 0 \;\rightarrow\; F_{ny} = mg$;

sugár irányban a fonálerő a kör középpontja felé mutat: $ma_{cp} = F_f$;

érintő irányban a súrlódási erő a sebességgel ellentétes irányba mutat: $ma_t = -F_s = -\mu F_{ny} = -\mu mg$.

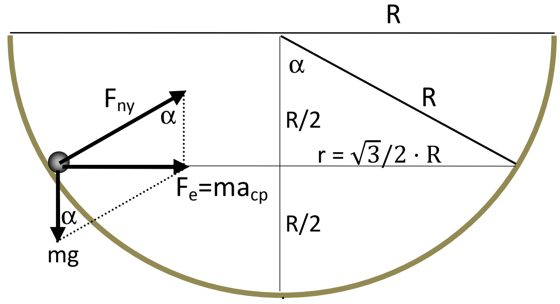
Utóbbiból $a_t = -\mu g = \text{konst.}$ → $v(t) = v_0 - \mu g\cdot t$; behelyettesítve $v(2) = 5 - 0{,}2\cdot 10\cdot 2 = 1\ \text{m/s}$;

a fonálerő pedig $F_f = ma_{cp} = mr\omega^2 = \frac{mv^2}{r} = \frac{mv^2}{\ell}$, behelyettesítve $F_f = 0{,}5\cdot 1^2/0{,}5 = 1$ N.

Megjegyzés: itt nincs értelme negatív sebességnek, a $v(t) = v_0 - \mu g\cdot t$ függvény csak v=0 -ig érvényes! Onnantól a testre ható erők eredője zérus.

5/2. Egy R = 10 cm sugarú gömb belsejében a sugár fele magasságában elhelyezkedő vízszintes síkban egy golyó kering. Számítsuk ki a keringési időt!

MO. Mivel a testre érintő irányú erő nem hat, ezért állandó sebességgel kering.



A (függőleges) nehézségi erő és a (gömb adott pontbeli érintősíkjára merőleges, tehát a gömb középpontja felé mutató) nyomóerő eredője vízszintes kell legyen (különben a pálya nem vízszintes lenne), ez adja a test centripetális gyorsulását:

$m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny} = \mathbf{F}_e = m\mathbf{a} = m\mathbf{a}_{cp}$,

Legyen α a nyomóerőnek a függőlegessel bezárt szöge.

Az erőket felrajzolva látható, hogy $F_e = mg\,\mathrm{tg}\alpha$.

Vagy megkaphatjuk ugyanezt a mozgásegyenlet

függőleges: $mg = F_{ny} \cos\alpha$ és

sugár irányú: $ma_{cp} = F_{ny} \sin\alpha$ komponenseiből kifejezve: $F_{ny} = mg/\cos\alpha$, $ma_{cp} = mg \sin\alpha/\cos\alpha$.

Másrészt $ma_{cp} = mr\omega^2$, ahol $\omega = 2\pi/T$ (T a periódusidő), és

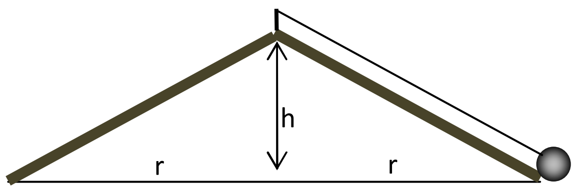
r a körpálya sugara (a keringés síkjában): $r = R \sin\alpha$.

Tehát $F_e = mr\omega^2 = m\cdot(R \sin\alpha)\cdot\omega^2 = mg\,\mathrm{tg}\alpha \Rightarrow \omega^2 = g/(R\cos\alpha) \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R\cos\alpha}{g}}$

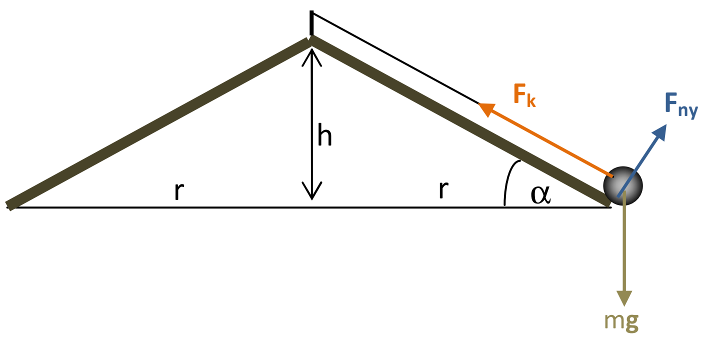
A geometriai feltételekből látható, hogy $\cos\alpha = (R/2) / R = ½$, tehát $\alpha = 60°$ $\Rightarrow T \approx 0{,}4443$ s .

Egyéb keresztmetszetű vályúkra (parabola, stb.) ld. a gyakorló és zh feladatokat!

5/3. Egy körhinta kúp alakú, az alapkörének sugara r = 3 m, a közepén a magassága h = 2,2 m.
a) Milyen fordulatszámnál kezdenek el a körhinta ülései emelkedni?
b) Mekkora ekkor a kötélerő, ha a benne ülő gyerek tömege az üléssel együtt 36 kg?



MO.



A test (gyerek+ülés) mozgásegyenlete vektori alakban:

$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_{ny}$

Mivel a test vízszintes síkban kering körpályán (azokat a fordulatszámokat vizsgálva, amikor még nem emelkedik el az ülés a kúpos részről), a gyorsulása a vízszintes síkú körpálya közepe felé mutató centripetális gyorsulás. Az erőket sugár irányú és függőleges komponensekre bontva tehát

$ma_{cp} = F_k \cos\alpha - F_{ny} \sin\alpha$ (I.)

$0 = F_k \sin\alpha + F_{ny} \cos\alpha - mg$ (II.)

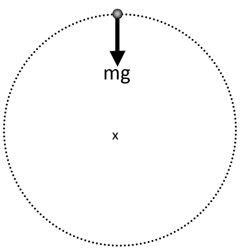
(Az érintő irányú gyorsulást figyelmen kívül hagyjuk, mert nem azt vizsgáljuk, hogy a fordulatszám fokozatosan nő, hanem különböző állandó szögsebességű állapotokat hasonlítunk össze.)

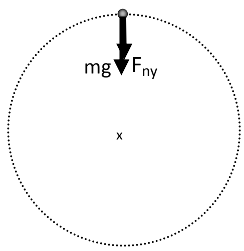
a) Először vizsgáljuk meg általánosan: fejezzük ki a nyomóerőt a fordulatszám függvényében!
a (II.) egyenletből $F_k = (mg - F_{ny} \cos\alpha) / \sin\alpha$,
ezt behelyettesítve az (I.) egyenletbe
$ma_{cp} = (mg - F_{ny} \cos\alpha) \cos\alpha / \sin\alpha - F_{ny} \sin\alpha = mg / \mathrm{tg}\alpha - F_{ny} / \sin\alpha$.
Mivel $ma_{cp} = mr\omega^2 = mr(2\pi f)^2$, ezért
$mr(2\pi f)^2 = mg / \mathrm{tg}\alpha - F_{ny} / \sin\alpha \quad \rightarrow \quad F_{ny} = mg \cos\alpha - mr(2\pi f)^2 \sin\alpha$.
Látható, hogy a nyomóerő a nyugalmi $mg\cos\alpha$ értékről az ’f’ fordulatszám növelésével csökken.
Az ülések akkor kezdenek el emelkedni, amikor a $F_{ny} = 0$:

$$mg \cos\alpha - mr(2\pi f_{krit})^2 \sin\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad f_{krit}{}^2 = \frac{g}{4\pi^2\, r\, tg\alpha} = \frac{g}{4\pi^2\, r \left(\frac{h}{r}\right)} = \frac{g}{4\pi^2\, h} \quad \rightarrow \quad f_{krit} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}},$$

behelyettesítve $f_{krit} \approx 0{,}3393\ s^{-1}$.
Jelen esetben elég lett volna az elemelkedés pillanatát (F_{ny}=0) vizsgálni, ekkor a mozgásegyenletek
$ma_{cp} = F_k \cos\alpha$
$0 = F_k \sin\alpha - mg$
A másodikból $F_k = mg / \sin\alpha$, ezt beírva az elsőbe $mr(2\pi f_{krit})^2 = (mg/\sin\alpha) \cos\alpha \rightarrow$ stb.
b) A (II.) egyenletből $F_{ny} = 0$ esetén: $F_k = mg / \sin\alpha \approx 608{,}8$ N.
(Bonyolultabb megoldás, ha kifejezzük a kötélerőt a fordulatszám függvényében:
$F_k = \ldots = mg \sin\alpha + mr \cos\alpha\, (2\pi f)^2$, majd behelyettesítjük f_{krit} értékét.)

5/4. Függőleges síkban körpályán haladó repülőgép sebessége 1080 km/h.
a) Mekkora legyen a körpálya sugara, hogy a legfelső pontban a pilóta „súlytalan” legyen?
b) És mekkora legyen a körpálya sugara, ha azt szeretnénk elérni, hogy a pilóta ’g’ gyorsulást érezzen a talpa felé?
A b) esetben a pilóta azt látná, hogy amit elenged, a lába felé esik; ha vizet önt, akkor az a lába felé folyik, és meg is tudja inni a pohárból, ahogy ezt az alábbi videón is lehet látni:
https://www.youtube.com/watch?v=g99ho_ExApU
MO. v = 1080 km/h = 300 m/s

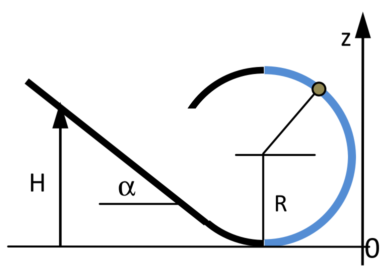




a) A legfelső pontban a pilótára csak a nehézségi erő hat, mivel súlytalan, azaz a repülőgép nem hat rá nyomóerővel:
$m\mathbf{a} = m\mathbf{g}$
A gyorsulása a körpálya középpontja felé mutató centripetális gyorsulás, tehát
$mg = ma_{cp} = mv^2/R \quad \Rightarrow \quad R = v^2/g = 9000$ m.

b) A legfelső pontban a repülőgép függőlegesen lefelé nyomja a pilótát (fejjel lefelé ül a gépben).
$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny}$
Mivel a nyomóerő éppen mg nagyságú:
$mg + F_{ny} = 2mg = ma_{cp} = mv^2/R$
$\Rightarrow \quad R = v^2/2g = 4500$ m.

5/5. Az α hajlásszögű egyenes lejtő érintő irányban csatlakozik az R sugarú körív keresztmetszetű vályúhoz. A súrlódás elhanyagolható. Egy testet kezdősebesség nélkül elengedünk a lejtő H magasságú pontjából. Adjuk meg a testre ható nyomóerőt tetszőleges kiindulási H magasság esetén a z koordináta függvényében a vályú jobb oldali (kékre színezett) részére!



MO.

$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny}$

érintő irányú: $ma_t = mR\ddot{\varphi} = -mg\cos\varphi$

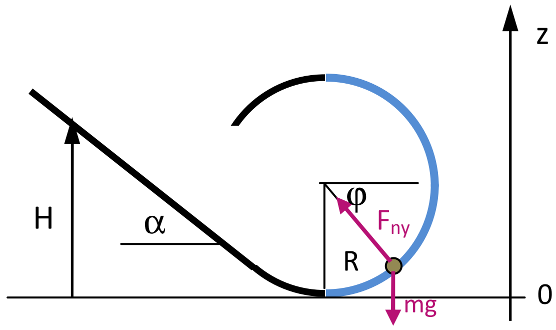
sugár irányú: $ma_{cp} = mR\dot{\varphi}^2 = F_{ny} \pm mg\sin\varphi$

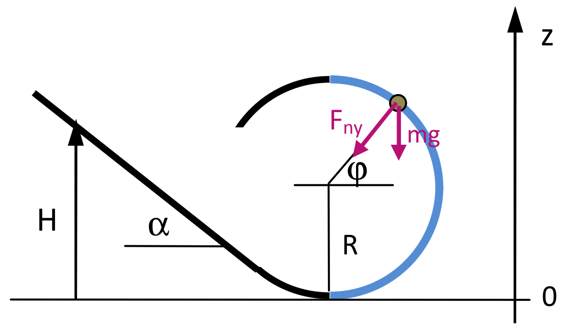
A centripetális gyorsulást az m**g** sugárirányú komponensének és a nyomóerőnek az eredője adja, ebből tehát ki tudjuk fejezni a nyomóerőt, ha ismerjük a centripetális gyorsulást az adott pontban, amihez szükség van a (szög)sebesség helyfüggésére.

Elvileg a fenti differenciálegyenlet-rendszer megoldása a $\varphi(t)$ és az $\omega(t)$ függvény, amiből előállítható az $\omega(\varphi)$ függvény – ez azonban most így nem lenne megoldható, de közvetlenül az $\omega(\varphi)$ függvényt meg tudnánk határozni (ld. az 5/14. feladatot). Viszont mivel a súrlódás elhanyagolható, egyszerűbben ki tudjuk fejezni a sebességet energia-megmaradást felírva a magassággal:

$mgH = mgz + ½\,mv^2 \quad \rightarrow \quad v^2 = 2g(H-z)$

A $v(z)$ függvény ismeretében pedig a sugár irányú egyenletből kifejezhető $F_{ny}(z)$.





Az alsó íven $ma_{cp} = F_{ny} - mg\sin\varphi$,
és itt $\sin\varphi = (R-z)/R$, tehát
$ma_{cp} = F_{ny} - mg(R-z)/R = F_{ny} + mg(z-R)/R$

A felső íven $ma_{cp} = F_{ny} + mg\sin\varphi$,
és itt $\sin\varphi = (z-R)/R$, tehát
$ma_{cp} = F_{ny} + mg(z-R)/R$

Tehát attól függetlenül, hogy a test az alsó vagy felső íven van és az m**g** sugárirányú komponense befelé vagy kifelé mutat, ma_{cp} kifejezése megegyezik. (Mivel m**g**-nek a sugárirányú vetületére van szükségünk, felírhatjuk az m**g** és az $\mathbf{e}_r$ egységvektor skalárszorzatát, abból is megkaphatjuk ezt.)

F_{ny}-t kifejezve ma_{cp}-vel és abba a fenti v^2-et behelyettesítve

$F_{ny} = ma_{cp} - mg(z-R)/R = mv^2/R - mg(z-R)/R = 2mg(H-z)/R - mg(z-R)/R = mg(2H-3z+R)/R$

($F_{ny} = 0$, ha $z = (2H+R)/3$, annál feljebb tehát nem jut el a test a vályúban, elválik a falától.)

Gyakorló feladatok a zárthelyire

5/6. Körpályán egyenletesen lassuló mozgással mozgó anyagi pont egy félkör megtétele közben elveszti sebessége felét. Hol áll meg?

MO.

$\beta = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \text{konst.} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \dot{\varphi} = \omega_0 - \beta t, \quad \varphi = \omega_0 t - \beta/2 \cdot t^2$

először t_1 idő alatt a sebessége a felére csökken: $\omega(t_1) = \omega_0 - \beta t_1 = \omega_0/2$ (1)

és megtesz egy félkört, azaz $\varphi(t_1) = \omega_0 t_1 - ½\beta\cdot t_1^2 = \pi$ (2)

majd további t_2 idő alatt a sebessége $\omega_0/2$-ről nullára csökken: $\omega(t_2) = \omega_0/2 - \beta t_2 = 0$ (3)

(1)-ből $t_1 = \omega_0/(2\beta)$, (3)-ból $t_2 = t_1$, (2)-ből $\beta = 3/(8\pi)\cdot\omega_0^2$, amivel

$\varphi(t_2) = \omega_0/2\cdot t_2 - ½\beta\cdot t_2^2 = \pi/3$, azaz még egy hatod kört tesz meg.

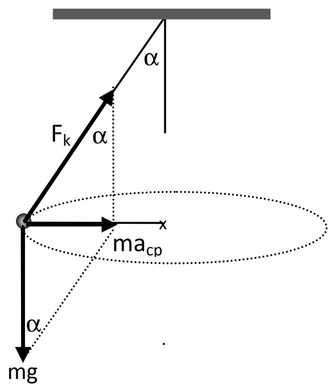
5/7. Egy ω szögsebességgel forgó vízszintes korongon egy m tömegű anyagi pont helyezkedik el. A tapadási súrlódási tényező μ_t. Milyen r sugáron belül marad a koronghoz képest nyugalomban a fenti tömegpont?

MO.
Mivel $F_t = ma_{cp} = mr\omega^2$ és $F_t \le \mu_t mg$, $mr\omega^2 \le \mu_t mg \rightarrow r \le \mu_t/\omega^2$.

5/8. Milyen φ szöggel kell az R = 50 m sugarú kanyarban az úttestet megdönteni, ha a rajta haladó autók sebessége 72 km/h? A cél az, hogy ónos esőben (amikor μ=0) se csússzanak meg oldalirányban az autók.

MO.
A nehézségi erő és a (lejtő síkjára merőleges) nyomóerő eredője vízszintesen a körpálya közepe felé mutat és a test centripetális gyorsulását adja.
Az erőket felrajzolva látható, hogy $ma_{cp} = mg\,\mathrm{tg}\varphi$,
azaz $ma_{cp} = mv^2/R = mg\,\mathrm{tg}\varphi \Rightarrow \mathrm{tg}\varphi = v^2 / (gR) = 0{,}8 \Rightarrow \varphi \approx 38{,}66°$.

5/9. (DRS. 6.9, volt Bevezető fizikán) Kúpinga hossza ℓ, a kúpszög 2α. Mekkora a keringési idő?



MO. A nehézségi erő és a kötélirányú húzóerő eredője vízszintesen a körpálya közepe felé mutat és a test centripetális gyorsulását adja.
Az erőket felrajzolva látható, hogy
$ma_{cp} = mg\,\mathrm{tg}\alpha$,
másrészt $ma_{cp} = mr\omega^2$.
A körpálya sugara $r = \ell \sin\alpha$.
Tehát $ma_{cp} = mr\omega^2 = m\ell\sin\alpha\cdot\omega^2 = mg\,\mathrm{tg}\alpha$

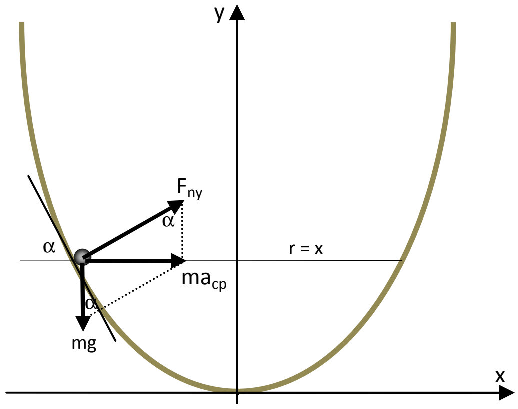
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\alpha}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\alpha}{g}}$$

5/10. Félgömbben a sugár egynegyedénél ill. háromnegyedénél kering egy-egy golyó, vízszintes síkban, súrlódás nélkül. Mennyi a keringési idők aránya?

5/11. Az $y = (0{,}5\text{cm}^{-1})x^2$ egyenletű parabola y tengely körüli forgatásával nyert paraboloid belsejében az y = 2 cm és az y = 4,5 cm magasan elhelyezkedő síkokban két golyó kering.
a) Milyen sebességgel keringenek?
b) Mennyi idő alatt tesznek meg egy fordulatot?

MO.

a) A nehézségi erő és a forgási paraboloid adott pontbeli érintősíkjára merőleges nyomóerő eredője vízszintesen a körpálya közepe felé mutat és a test centripetális gyorsulását adja.



A mértékegységek miatt írjuk fel a parabola egyenletét úgy, hogy bevezetünk egy ’a’ paramétert:
$y = ax^2$, és tudjuk, hogy $a = 0{,}5\ \mathrm{cm}^{-1}$. Behelyettesítéskor erre figyelni kell; legegyszerűbb cm-ben számolni, de akkor g-t is át kell számolni $\mathrm{cm/s^2}$-be: $g = 1000\ \mathrm{cm/s^2}$.
A parabola érintője dy/dx, ahol tehát
$dy/dx = d(ax^2)/dx = 2ax$, vagyis az érintőnek az x tengellyel bezárt ⍰ szögére $\mathrm{tg}\alpha = dy/dx = 2ax$.
Az erőket felrajzolva látható, hogy $ma_{cp} = mg\ \mathrm{tg}\alpha$;
másrészt $ma_{cp} = mv^2/r$.
A körpálya sugara mindig az adott y magasság felhasználásával a parabola egyenletéből visszaszámolható
x érték, azaz $x_1 = 2$ cm, $x_2 = 3$ cm.
Ezekből $ma_{cp} = mv^2/r = mv^2/x = mg\ \mathrm{tg}\alpha = mg \cdot 2ax$

$$\Rightarrow\ v^2 = 2ax^2g \quad \Rightarrow\ v_1 \approx 63{,}2\ \mathrm{cm/s},\ v_2 \approx 94{,}9\ \mathrm{cm/s}.$$

b) $\omega = v/r = v/x = \sqrt{2ag} = 2\pi/T \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi/\sqrt{2ag} \approx 0{,}2$ s a keringés helyétől függetlenül.

5/12. Egy R sugarú félgömb peremétől súrlódásmentesen legördülő m tömegű golyó mekkora erővel nyomja a félgömb fenekét?

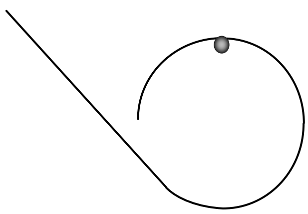
MO.

A körpálya alsó pontján a félgömbre merőleges, függőlegesen felfelé mutató nyomóerő és a függőlegesen lefelé mutató nehézségi erő eredője felfelé mutat a körpálya közepe felé:

$$ma_{cp} = F_{ny} - G \quad \Rightarrow \quad F_{ny} = G + ma_{cp} = mg + mv^2/R$$

A sebességet kiszámíthatjuk az energia-megmaradásból (a súrlódás elhanyagolható):
$mgR = ½\, mv^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gR$
Tehát $F_{ny} = mg + mv^2/R = mg + 2\,mg = 3\,mg$

5/13. Ferde lejtő átmegy függőleges körpályába. A lejtőn legalább milyen H magasságból kell a testet elengedni, ha azt akarjuk, hogy végigmenjen a körpályán (a legfelső pontnál se váljon el)? A súrlódás elhanyagolható.
Mekkora nyomóerő hat a testre a körpálya legalsó pontján?

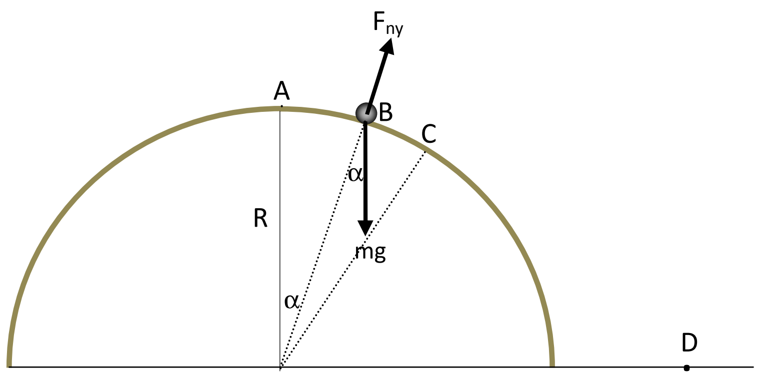


MO.

A körpálya legfelső pontján a pálya által a testre kifejtett nyomóerő függőlegesen lefelé mutat, így
$ma_{cp} = mg + F_{ny} \quad \rightarrow \quad F_{ny} = ma_{cp} - mg = mv_{fent}^2/R - mg$.
A nyomóerő nem lehet negatív: $F_{ny} \geq 0$: $mv_{fent}^2/R - mg \geq 0 \quad \rightarrow \quad v_{fent}^2 \geq gR$.
A sebesség energia-megmaradásból kifejezve: $mg\,H = mg\,2R + ½\, m\, v_{fent}^2 \quad \rightarrow \quad v_{fent}^2 = 2g(H-2R)$,
ezt beírva a $v^2 \geq gR$ feltételbe $2g(H-2R) \geq gR \quad \rightarrow \quad H \geq 5/2\ R$.

A körpálya legalsó pontján a pálya által a testre kifejtett nyomóerő függőlegesen felfelé mutat, így
$ma_{cp} = F_{ny} - mg \quad \rightarrow \quad F_{ny} = ma_{cp} + mg = m\,v_{lent}^2 / R + mg$.
A sebesség energia-megmaradásból kifejezve: $mg\,H = ½\, m\, v_{lent}^2 \quad \rightarrow \quad v_{lent}^2 = 2g\,H$,
és ezt a nyomóerőbe beírva $F_{ny} = 2mg\,H/R + mg$.
Mivel $H \geq 5/2\,R$, ezért $F_{ny} \geq 2mg\cdot(5/2) + mg = 6\,mg$.
A nyomóerő a legalsó ponton $F_{ny} \geq 6mg$, tehát a test gyorsulása legalább 6g! (Hullámvasút!)

5/14. R sugarú félgömb tetejéről (A pont) súrlódásmentesen csúszik le egy golyó.
a) Írjuk fel a golyó mozgásegyenletét! Bontsuk fel a golyóra ható erőket és a gyorsulást érintőleges és radiális komponensekre!
b) Mekkora a golyó szögsebessége a B pontnál?
c) Mekkora erővel nyomja a golyó a gömböt a B pontnál?
d) A golyó a C pontnál hagyja el a gömböt. Mekkora az α_0 szög?
e) Mennyi a golyó sebessége a C pontnál?
f) A golyó a D pontnál ér földet. Milyen távol van a D pont a félgömbtől?
MO.



a) A golyótól a félgömb középpontjához húzott sugárnak a függőlegessel bezárt szöge α, a szögsebesség tehát $\omega = \dot{\alpha}$.
A golyó mozgásegyenlete vektori alakban: $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{ny}$.
Bontsuk fel a nehézségi erőt tangenciális és radiális komponensre,
és írjuk fel a test gyorsulását polárkoordináta-rendszerben:
tangenciális komponens: $ma_t = mR\, d\omega/dt = mg \sin\alpha$ (1)
radiális komponens: $ma_{cp} = mR\omega^2 = mg\cos\alpha - F_{ny}$ (2)

b) Szükségünk lesz az $\omega(\alpha)$ függvényre. Ezt kétféleképpen kaphatjuk meg:
A differenciálegyenlet-rendszer megoldásával: **EZT A MEGOLDÁST NEM KELL TUDNI ZH-N!**
Az (1) egyenlet átalakításával az ω szögsebesség időfüggése ($d\omega/dt$) helyett nézhetjük a szögsebességnek az α szögtől való függését ($d\omega/d\alpha$): $mR\frac{d\omega}{dt} = mR\frac{d\omega}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt} = mR\omega\frac{d\omega}{d\alpha} = mg\sin\alpha$.
Ezt szeparáljuk és integráljuk: $\int_0^{\omega} R\omega\, d\omega \int = \int_0^{\alpha} g\,\sin\alpha\, d\alpha$
$\Rightarrow \quad R\,\omega^2/2 = g\,(1 - \cos\alpha\,) \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2g(1-\cos\alpha)}{R}}$.
Ugyanezt kifejezhetjük az energia-megmaradásból is:
a golyó R magasságban zérus sebességgel indul, és $R\cos\alpha$ magasságban $v = R\omega$ sebessége van:
$mg\,R = mg\,R\cos\alpha + ½\, m\,(R\omega)^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2g(1-\cos\alpha)}{R}}$

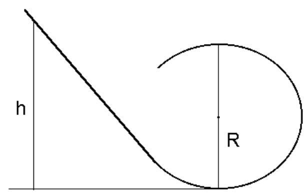
c) A (2) egyenletből $F_{ny} = mg\cos\alpha - mR\omega^2$.
Az előbb kifejeztük ω-t az α függvényében, helyettesítsük be ide:
$F_{ny} = mg\cos\alpha - 2\,mg\,(1 - \cos\alpha) = mg\,(3\cos\alpha - 2)$.

d) A golyó akkor hagyja el a gömböt, amikor $F_{ny} = 0$, azaz $\cos\alpha_0 = 2/3 \;\Rightarrow\; \alpha_0 \approx 48{,}2°$.

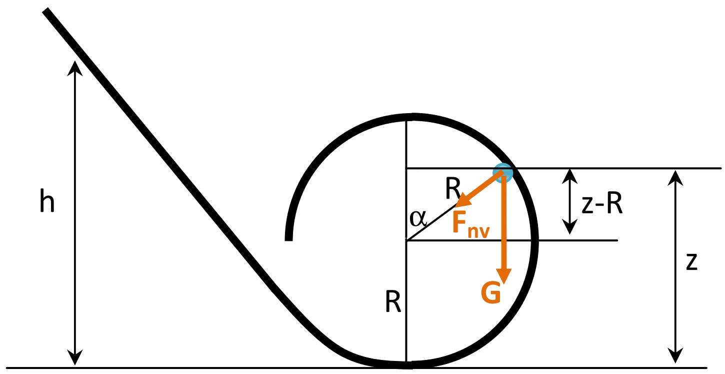
e) A golyó sebességének nagysága a C pontban $v_0 = R\cdot\omega(\alpha_0) = \sqrt{2gR(1-\cos\alpha_0)} = \sqrt{2Rg/3} \approx 2{,}58\sqrt{R}$,
iránya pedig az érintő iránya, azaz
$\mathbf{v}_0 = \cos\alpha_0\sqrt{2gR(1-\cos\alpha_0)}\,\mathbf{i} - \sin\alpha_0\sqrt{2gR(1-\cos\alpha_0)}\,\mathbf{k} \approx 1{,}72\sqrt{R}\,\mathbf{i} - 1{,}92\sqrt{R}\,\mathbf{k}$.

f) Ha a félgömb középpontjába helyezzük az origót, a golyó az
$\mathbf{r}_0 = (R\sin\alpha_0)\,\mathbf{i} + R\cos\alpha_0\,\mathbf{k} \approx 0{,}745R\,\mathbf{i} + 0{,}667R\,\mathbf{k}$ pontból indul (C pont).
Tehát $z(t) = 0{,}667R - 1{,}92\sqrt{R}t - ½\,gt^2$.
$z = 0$, ha $t_1 \approx 0{,}22\sqrt{R}$.
és ekkor $x(t_1) = 0{,}745R + 1{,}72\sqrt{R}t_1 = 1{,}12R$, azaz a félgömbtől $0{,}12R$ távolságra ér földet a golyó.

5/15. Az egyenes lejtő érintőként csatlakozik a kör keresztmetszetű függőleges vályúhoz. A lejtőn h magasságból kezdősebesség nélkül elindul egy test. Adjuk meg azt a z(h) függvényt, ami leírja, hogy a h magasság függvényében milyen z magasságban fog elválni a test a körpályától! Ábrázoljuk is a függvényt (ügyelve az értelmezési tartományra)! A test súrlódás nélkül csúszik.

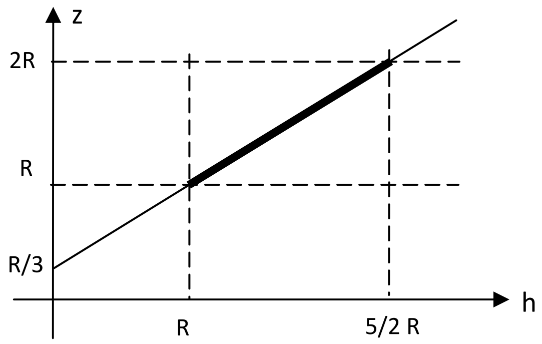


MO.



A testre hat a **G** nehézségi erő és a vályú falától származó $\mathbf{F}_{ny}$ nyomóerő, tehát a mozgásegyenlet: $m\mathbf{a} = \mathbf{G} + \mathbf{F}_{ny}$, aminek
érintő irányú komponense $ma_t = mg\sin\alpha$ és
radiális komponense $ma_{cp} = mg\cos\alpha + F_{ny}$;
utóbbiból a nyomóerő $F_{ny} = ma_{cp} - mg\cos\alpha$, ahol $\cos\alpha = (z-R)/R$.
Ahhoz, hogy a nyomóerőt ismerjük α függvényében, ismerni kell a_{cp}-t α függvényében. Mivel a súrlódás elhanyagolható, számolhatunk energia-megmaradásból:
$mgh = mgz + ½\,mv^2 \;\rightarrow\; v^2 = (R\omega)^2 = 2g(h-z)$
$a_{cp} = R\omega^2 = 2g(h-z)/R$ és $F_{ny} = 2mg(h-z)/R - mg\,(z-R)/R = mg(2h-3z+R)/R$.
Ott válik el a test a vályútól, ahol $F_{ny} = 0$, azaz $mg(2h-3z+R)/R = 0 \;\rightarrow$

a keresett z(h) függvény tehát $z = (2h+R)/3 = R/3 + 2/3 \cdot h$
R/3 tengelymetszetű és 2/3 meredekségű egyenes, de annak csak az a szakasza, ahol
z értéke R és 2R közé esik (mert a vályú alsó felében nem válik el a golyó, és z = 2R esetén meg már végigmegy a vályún). Az $R < z < 2R$ feltételből $R < h < 5/2\,R$.



Körpálya általános gravitációs erővel

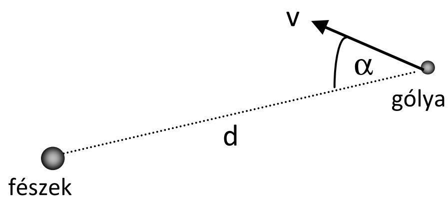
5/16. Milyen távolságban keringenek a Föld középpontjától az ún. álló műholdak? (szögsebességük megegyezik a Föld szögsebességével)
MO.
A testre egyetlen erő hat, a Föld vonzóereje, ez tartja körpályán:
$ma_{cp} = mr\omega^2 = \gamma\, m \cdot m_{Föld} / r^2 \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{\gamma\, m_{Föld}}{\omega^2}}$, ahol $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$,
$m_{Föld} = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $r_{Föld} = 6{,}37 \cdot 10^6$ m,
$\omega = 2\pi/T = 2\pi/(24 \cdot 60 \cdot 60) = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$

amiből $r = 42{,}3 \cdot 10^6$ m.
Számolhatunk úgy is, hogy γ és $m_{Föld}$ értéke helyett felhasználjuk azt, hogy a Föld felszínén
$mg = \gamma\, m \cdot m_{Föld} / r_{Föld}^2$, azaz $\gamma\, m_{Föld} = g\, r_{Föld}^2$
vagyis $mr\omega^2 = \gamma\, m \cdot m_{Föld} / r^2 = m \cdot g \cdot r_{Föld}^2 / r^2 \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{g\, r_{Föld}^2}{\omega^2}}$

5/17. Számítsuk ki a Hold centripetális gyorsulását kétféleképpen: a
a) gravitációs erőtörvényt,
b) körmozgás adatait   felhasználva.
A Hold pályájának sugara kb. 60-szorosa a Föld sugarának ($R_{Föld} \approx 6400$ km),
a Hold keringési ideje 27 nap.

Nem zh feladat: kancsal fecske, avagy inkább kancsal gólya (vagy még inkább normális molylepke)

A kancsal gólya szeretne a fészkére repülni. Ő azt hiszi, hogy egyenesen a fészke felé repül, de kancsalsága miatt mindig az őt a fészekkel összekötő egyenessel állandó α szöget bezárva repül. A gólya sebességének nagysága állandó (v). Odaér-e valaha a fészkére?



MO. Síkbeli polárkoordináta-rendszerben a sebességvektor

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = (r\boldsymbol{e_r})^{\boldsymbol{\cdot}} = \dot{r}\boldsymbol{e_r} + r\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e_r} + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e_\varphi},$$

azaz a sebességvektor radiális komponense $v_r = \dot{r}$, tangenciális komponense $v_t = r\dot{\varphi}$.

Legyen a fészek az origóban, a gólya helyvektora **r**. Bontsuk fel a gólya sebességét radiális és tangenciális komponensekre: $\boldsymbol{v} = -v\,cos\alpha\,\boldsymbol{e_r} + v\,sin\alpha\,\boldsymbol{e_\varphi}$.

A radiális komponenst tekintve tehát

(1) $\dot{r} = -v\cos\alpha$

Integrálva: $r = d - (v\cos\alpha)\,t$, azaz a gólya távolsága a fészektől lineárisan csökken,

és $t = d / (v\cos\alpha)$ idő alatt $r = 0$, vagyis a gólya beér a fészkébe!

<u>A kérdést tehát megválaszoltuk, de nézzük meg azt is, milyen pályán repül a gólya.</u>

A tangenciális komponenst tekintve

(2) $r\dot{\varphi} = v\sin\alpha$, ahol

α a gólya kancsalságának szöge, ez konstans,

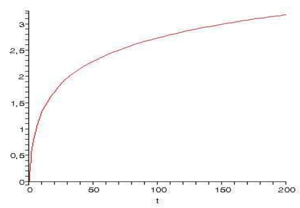
φ a fészektől a fecskéhez t időben húzott helyvektornak a 0 időben húzott helyvektorral bezárt szöge.

r(t)-t behelyettesítve $(d - vt\cos\alpha)\dfrac{d\varphi}{dt} = v\sin\alpha$,

szeparálva és integrálva: $\displaystyle\int \frac{1}{d - v\cos\alpha\cdot t}\,dt = \frac{1}{v\sin\alpha}\int d\varphi \;\rightarrow\; \frac{1}{-v\cos\alpha}\ln\frac{d - v\cos\alpha\cdot t}{d} = \frac{\varphi}{v\sin\alpha}$,

amiből $\varphi = -\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\ln\left(1 - \dfrac{v\cos\alpha}{d}t\right)$.

$t \to \dfrac{d}{v\cos\alpha}$ esetén ez a függvény végtelenhez tart, vagyis a gólya végtelen sokszor fordul körbe, amíg beér a fészkébe, de ezt véges idő alatt és véges úton teszi.



<u>Határozzuk meg a gólya pályáját!</u>

Az egyik lehetőség, hogy az r(t), φ(t) függvényekből kiküszöböljük t-t:

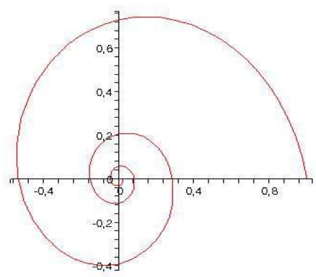
$r = d - (v\cos\alpha)t \;\Rightarrow\; t = (d-r)/(v\cos\alpha)$ és $\varphi = -\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\ln\left(1 - \dfrac{v\cos\alpha}{d}\cdot\dfrac{d-r}{v\cos\alpha}\right) = -\mathrm{tg}\alpha\cdot\ln\dfrac{r}{d}$;

a másik lehetőség, hogy az (1) és (2) differenciálegyenletet elosztjuk egymással:

$$\frac{v_t}{v_r} = \frac{r\,d\varphi}{dr} = \frac{v\sin\alpha}{-v\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\alpha \text{, szeparáljuk: } \int_0^{\varphi} d\varphi = -\mathrm{tg}\alpha\cdot\int_d^r \frac{1}{r}dr \text{ és integráljuk:}$$

$$\varphi = -\mathrm{tg}\alpha\cdot\ln\frac{r}{d}$$

Ez az ún. logaritmikus spirális egyenlete, melynek jellemzője, hogy egy-egy teljes fordulatot megtéve a középponttól mért távolság mértani sor szerint (mindig ugyanannyiad részére) csökken:



r-et kifejezve φ(r)-ből $r = d\cdot e^{-\varphi/\mathrm{tg}\alpha}$, $\dfrac{r_2}{r_1} = e^{-\frac{\varphi_2}{\mathrm{tg}\alpha}+\frac{\varphi_1}{\mathrm{tg}\alpha}}$,

egy fordulatot megtéve $\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi$,

így $\dfrac{r_2}{r_1} = e^{-\frac{2\pi}{\mathrm{tg}\alpha}} = \text{konst.}$