Tömegközéppont (súlypont)

Pontrendszer esetén az m_i tömegű, $\mathbf{r}_i$ helyvektorú tömegpontok tömegközéppontja a tömegekkel súlyozott átlagos helyvektor:

$$\mathbf{r}_s = \frac{\sum(m_i \mathbf{r}_i)}{\sum m_i} = \frac{\sum(m_i \mathbf{r}_i)}{M}, \quad \text{ahol } M = \sum m_i \text{ az össztömeg.}$$

Kiterjedt test esetén térfogati integrállal számolunk:

$$\mathbf{r}_s = \frac{\int \mathbf{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r}\, \rho\, dV}{\int \rho\, dV} = \frac{\int \mathbf{r}\, \rho\, dV}{M},$$ ahol ρ a sűrűség (ami lehet helyfüggő is), és

$M = \int \rho\, dV$ az össztömeg.

Impulzus, -tétel, -megmaradás tétele

m tömegű, **v** sebességű test impulzusa $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ [kg·m/s] (vektor!)

Impulzustétel tömegpontra: $\mathbf{F}_e = \dot{\mathbf{p}}$

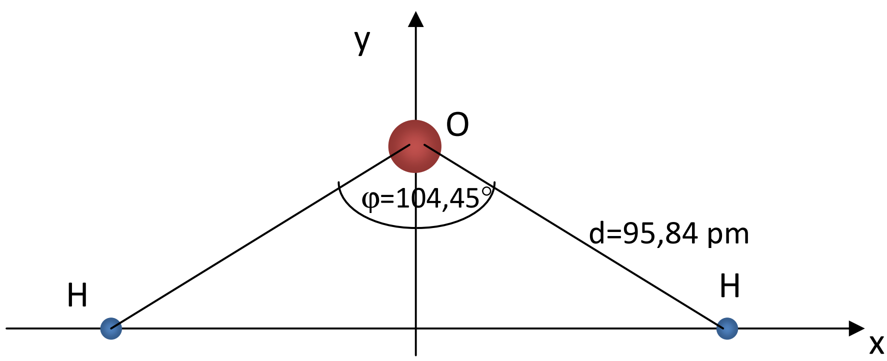
Az impulzus additív; pontrendszer impulzusa $\mathbf{p}_{össz} = \sum (m_i \mathbf{v}_i)$

Impulzustétel pontrendszerre: $\mathbf{F}_{e,külső} = \dot{\mathbf{p}}_{össz}$ (mivel a belső erők eredője zérus)

Impulzus-megmaradás tétele: zárt rendszerben (azaz ahol $\mathbf{F}_{e,külső} = 0$) $\mathbf{p}_{össz}$ = konst.

6/1. Határozzuk meg a vízmolekula tömegközéppontját! A kötéshossz 95,84 pm, a kötésszög 104,45°.

MO.



Helyezzük el így a vízmolekulát. Akkor

$x_{H1} = d\cdot\sin(\varphi/2) = 95{,}84\cdot\sin(104{,}45°/2) = 75{,}75$ pm $\quad y_{H1} = 0 \quad m_{H1} = 1$

$x_{H2} = -d\cdot\sin(\varphi/2) = -95{,}84\cdot\sin(104{,}45°/2) = -75{,}75$ pm $\quad y_{H2} = 0 \quad m_{H2} = 1$

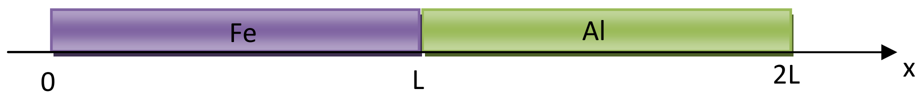
$x_O = 0 \quad y_O = d\cdot\cos(\varphi/2) = 95{,}84\cdot\cos(104{,}45°/2) = 58{,}71$ pm $\quad m_O = 16$

$M = m_{H1} + m_{H2} + m_O = 18$

Tehát $x_s = \frac{(75{,}75\cdot 1)+(-75{,}75\cdot 1)+(0\cdot 16)}{18} = 0$ és $y_s = \frac{(0\cdot 1)+(0\cdot 1)+(58{,}71\cdot 16)}{18} = 52{,}18$ pm.

6/2. Azonos keresztmetszetű, homogén vas és alumínium rudat a végüknél összeragasztunk, majd az egészet a tömegközéppontjánál kettévágjuk. Mennyi lesz a két rész tömegének aránya? A sűrűségek: $\rho_{Fe} = 7{,}8$ kg/dm^3, $\rho_{Al} = 2{,}7$ kg/dm^3.

MO.



Helyezzük el úgy a rudakat, hogy a vas 0-tól L-ig, az alumínium L-től 2L-ig tart. A rudak keresztmetszete ’A’.

A tömegközéppontot kiszámolhatjuk

1.) úgy, hogy a rudakat helyettesítjük a tömegközéppontjukba helyezett tömegükkel:

A szimmetriát kihasználva tudjuk, hogy az egyes rudak tömegközéppontja a felezőpontjukban van, vagyis a vasé L/2 -nél, az alumíniumé 3L/2 -nél.

A tömegek $m_{Fe} = \rho_{Fe} \cdot A \cdot L = 7{,}8\ A \cdot L$ ill. $m_{Al} = \rho_{Al} \cdot A \cdot L = 2{,}7\ A \cdot L$.

$$x_S = \frac{(L/2)\cdot(\rho_{Fe}\cdot A\cdot L)+(3L/2)\cdot(\rho_{Al}\cdot A\cdot L)}{(\rho_{Fe}\cdot A\cdot L)+(\rho_{Al}\cdot A\cdot L)} = \frac{L/2\cdot\rho_{Fe}+3L/2\cdot\rho_{Al}}{\rho_{Fe}+\rho_{Al}} = \frac{7{,}8/2+3\cdot 2{,}7/2}{7{,}8+2{,}7} L \approx 0{,}7571\ L$$

2.) térfogati integrállal:

Mivel az x tengely mentén fekszik a rúd, azért $y_s = z_s = 0$, és keressük x_s -t.

A rudat az x tengelyre merőlegesen dx vastagságú szeletekre vágjuk, azaz $dV = A\ dx$;

$dm = \rho \cdot A\ dx$, ahol 0 és L között $\rho=\rho_{Fe}$, L és 2L között $\rho=\rho_{Al}$.

$$x_S = \frac{\int_0^L x\cdot dm+\int_L^{2L} x\cdot dm}{\int_0^L dm+\int_L^{2L} dm} = \frac{\int_0^L x\cdot\rho_{Fe}\ A\ dx+\int_L^{2L} x\cdot\rho_{Al}\ A\ dx}{\int_0^L \rho_{Fe}\ A\ dx+\int_L^{2L}\rho_{Al}\ A\ dx} = \frac{\rho_{Fe}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L+\rho_{Al}\left[\frac{x^2}{2}\right]_L^{2L}}{\rho_{Fe}[x]_0^L+\rho_{Al}[x]_L^{2L}} = \frac{7{,}8\frac{L^2}{2}+2{,}7\frac{3L^2}{2}}{7{,}8\ L+2{,}7\ L} \approx 0{,}7571\ L.$$

Az egyik darab (m_1) tehát a vasrúd 0,7571-ed része,

a másik darab (m_2) a vasrúd 1–0,7571=0,2429-ed része plusz az egész alumíniumrúd,

a két tömeg aránya $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_{Fe}\cdot 0{,}7571 L\cdot A}{\rho_{Fe}\cdot 0{,}2429 L\cdot A + \rho_{Al}\cdot L\cdot A} = \frac{7{,}8\cdot 0{,}7571}{7{,}8\cdot 0{,}2429 + 2{,}7} \approx 1{,}285.$

6/3. L hosszúságú rúd sűrűsége egyik végén ρ_0, másik végén $2\rho_0$, közben egyenletesen változik. A rúd keresztmetszete mindenütt azonos. Hol van a súlypontja?

MO.

A rúd az x tengely mentén helyezkedik el 0-tól L-ig,

a sűrűsége x=0-ban ρ_0, x=L-ben $2\rho_0$, azaz a sűrűsége x függvényében $\rho(x) = \rho_0 (1 + x/L)$.

A súlypontjának x koordinátája

$$x_S = \frac{\int_0^L x\cdot\rho(x)\ A\ dx}{\int_0^L \rho(x)\ A\ dx}$$, ahol

$$\int_0^L x\cdot\rho(x)\ A\ dx = \int_0^L x\cdot\rho_0\left(1+\frac{x}{L}\right)A\ dx = A\ \rho_0\int_0^L\left(x+\frac{x^2}{L}\right)dx =$$

$$= A\ \rho_0\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3L}\right]_0^L = A\ \rho_0\left(\frac{L^2}{2}+\frac{L^2}{3}\right) = A\rho_0\frac{5L^2}{6}$$

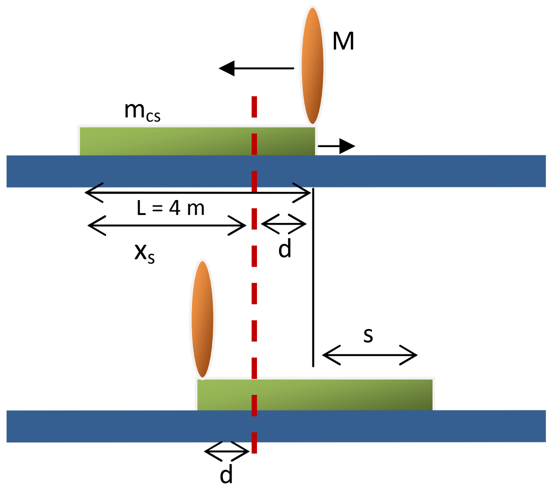
$$M = \int_0^L \rho(x)\ A\ dx = A\ \rho_0\int_0^L\left(1+\frac{x}{L}\right)dx = A\ \rho_0\left[x+\frac{x^2}{2L}\right]_0^L = A\ \rho_0\left(L+\frac{L}{2}\right) = A\ \rho_0\frac{3L}{2},$$

tehát $x_S = \frac{A\rho_0\frac{5L^2}{6}}{A\rho_0\frac{3L}{2}} = \frac{5}{9}\ L.$

6/4. 4 m hosszú, 120 kg tömegű csónak egyik végéből megy át a másikba egy 80 kg tömegű ember. Mennyit mozdul el a csónak a vízparthoz viszonyítva, ha mozgása a vízben jó közelítéssel közegellenállás-mentesnek tekinthető?

MO./1 tömegközépponti tétellel

Mivel a közegellenállás elhanyagolható, külső erő nem hat a csónak + ember rendszerre, így a tömegközéppont gyorsulása zérus, és mivel induláskor nem mozgott a csónak, a tömegközéppont nem mozdulhat el a parthoz képest.



Számoljuk ki a tömegközéppont helyét:

$$x_s = \frac{\int_0^L x \cdot \frac{m_{cs}}{L} dx + L \cdot M}{m_{cs}+M} = \frac{m_{cs} \cdot \frac{L}{2} + L \cdot M}{m_{cs}+M} = 2{,}8\ m$$

vagyis $d = L - x_s = 1{,}2$ m attól a végétől, ahonnan indul az ember.

(Persze számolhattuk volna rögtön ezt is:

$$d = \frac{\int_0^L x \cdot \frac{m_{cs}}{L} dx}{m_{cs}+M} = \frac{m_{cs} \cdot \frac{L}{2}}{m_{cs}+M} = 1{,}2\ m\ )$$

Az ábráról látható, hogy

$s = L - 2d = 1{,}6$ m.

MO./2 impulzus-megmaradással

Ha a csónak mozgása a vízben közegellenállás-mentesnek tekinthető, akkor a csónak + ember rendszerre a külső erők eredője zérus, tehát az impulzusuk összege állandó; méghozzá zérus, mert kiinduláskor álltak. A csónak s távolságot mozdul el a parthoz viszonyítva Δt idő alatt (amíg az ember átsétál egyik végéből a másikba), azaz sebessége $v = s/\Delta t$; közben az ember (L-s) távolságot mozdul el a parthoz képest az ellenkező irányba, azaz sebessége $V = -(L-s)/\Delta t = (s-L)/\Delta t$.

$$0 = m_{cs}v + MV = m_{cs} \cdot s/\Delta t + M \cdot (s-L)/\Delta t \quad \Rightarrow \quad s = L \cdot M/(M+m_{cs}) = 1{,}6\text{ m}.$$

6/5. 30 kg tömegű súrlódásmentes kiskocsin 40 kg tömegű gyerek ül, és van még a kocsin 2 db 5 kg tömegű tégla. A kocsi sebessége 2 m/s. A gyerek eldobja először az egyik téglát menetirányba, majd a másikat ellenkező irányba. A téglákat a kocsihoz képest 5 m/s sebességgel dobja el.

a) Mekkora lesz a kocsi sebessége a második tégla eldobása után?

b) És mekkora lesz a kocsi sebessége akkor, ha az első téglát dobja hátrafelé és a másodikat előrefelé?

MO. A kocsi+gyerek tömege $M = 30+40 = 70$ kg, a tégláké $m_1 = m_2 = m = 5$ kg,
a kiindulási sebesség $v_0 = 2$ m/s, a tégla relatív sebessége $v_r = 5$ m/s.

a) Az impulzus-megmaradás

az első tégla kidobására, ha előrefelé dobja:

$(M+2m)\ v_0 = m\ (v_0+v_r) + (M+m)\ v_{1a}$, ahol v_{1a} a kocsi sebessége az első tégla kidobása után

$\rightarrow \quad v_{1a} = v_0 - m/(m+M) \cdot v_r$;

a második tégla kidobására, ha hátrafelé dobja:

$(M+m)\ v_{1a} = m\ (v_{1a}-v_r) + M\ v_{2a}$, ahol v_2 a kocsi sebessége a második tégla kidobása után

$\rightarrow \quad v_{2a} = v_{1a} + m/M \cdot v_r = v_0 + m^2/(M(m+M)) \cdot v_r$;

behelyettesítve $v_{1a} = 5/3 \approx 1{,}667$ m/s, $v_{2a} \approx 2{,}024$ m/s.

b) Ha az első téglát dobja hátrafelé:

$(M+2m)\ v_0 = m\ (v_0-v_t) + (M+m)\ v_{1b}$, ahol v_{1b} a kocsi sebessége az első tégla kidobása után

$\rightarrow\quad v_{1b} = v_0 + m/(m+M) \cdot v_r$;

és a másodikat előrefelé:

$(M+m)\ v_{1b} = m\ (v_{1b}+v_t) + M\ v_{2b}$, ahol v_{2b} a kocsi sebessége a második tégla kidobása után

$\rightarrow\quad v_{2b} = v_{1b} - m/M \cdot v_r = v_0 - m^2/(M(m+M)) \cdot v_r$;

behelyettesítve $v_{1b} = 7/3$ m/s, $v_{2b} \approx 1{,}976$ m/s.

Vegyük észre, hogy mivel a **b)** esetben mindkétszer ellentétes irányba dobta a téglákat, mint az **a)** esetben, nem kell újra felírni az egyenleteket, hanem használhatjuk az **a)** rész képleteit úgy, hogy v_r értékére +5 m/s helyett –5 m/s -ot helyettesítünk be.

Általánosabb a megoldás, ha a megfelelő előjelet mindig a v_r -nél használjuk és nem a képletbe írjuk be, azaz

első tégla: $(M+2m)\ v_0 = m\ (v_0+v_r) + (M+m)\ v_1 \quad\rightarrow\quad v_1 = v_0 - m/(m+M) \cdot v_r$,

ha előre dobta, $v_{ra} = +5$ m/s $\rightarrow\ v_{1a} = 2 - 1/3 = 5/3$ m/s;

ha hátra dobta, $v_{rb} = -5$ m/s $\rightarrow\ v_{1b} = 2 + 1/3 = 7/3$ m/s;

második tégla: $(M+m)\ v_1 = m\ (v_1+v_t) + M\ v_2 \quad\rightarrow\quad v_2 = v_1 - m/M \cdot v_r$,

ha hátra dobta, $v_{ra} = -5$ m/s $\rightarrow\ v_{2a} = 5/3 + 5/14 \approx 2{,}024$ m/s;

ha előre dobta, $v_{rb} = +5$ m/s $\rightarrow\ v_{2b} = 7/3 - 5/14 \approx 1{,}976$ m/s.]

6/6. Határozzuk meg egy homogén lemezből kivágott síklap súlypontjának helyzetét, ha annak alakja

a) félkör;

b) derékszögű háromszög;

c) általános háromszög;

d) α nyílásszögű körcikk!

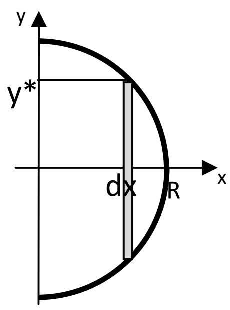
MO.

a) A lemez vastagsága legyen D, így a sűrűség $\rho = \frac{M}{1/2 \cdot R^2 \pi \cdot D}$.

Szimmetria miatt $y_s = 0$; keressük x_s -et.

<u>Descartes-koordinátarendszerben:</u>

A félkört szeleteljük fel az ábrán látható módon:



$$dV = D \cdot 2y^*\,dx = D \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

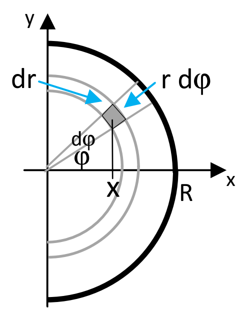
$$x_S = \frac{\int x\rho\,dV}{\int \rho\,dV} = \frac{\int_0^R x\rho D \cdot 2\sqrt{R^2-x^2}\,dx}{M} = \frac{4}{R^2\pi}\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \frac{4}{R^2\pi}\left[-\frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{3/2}\right]_0^R = \frac{4}{R^2\pi} \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3\pi}R$$

<u>Polárkooordináta-rendszerben:</u>

$dV = D \cdot r\,d\varphi\,dr$, az integrálási határok φ-re: $-\pi/2 \rightarrow +\pi/2$;

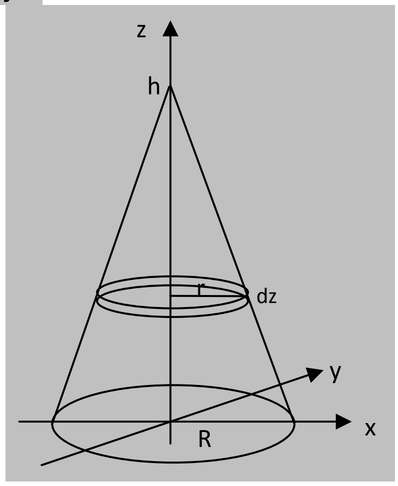
$x = r\cos\varphi$.



$$x_S = \frac{\int x\rho\,dV}{\int \rho\,dV} = \frac{\int_0^R \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (r\cos\varphi)\rho\, D \cdot r\,d\varphi\,dr}{M} = \frac{2}{R^2\pi}\int_0^R r^2\left(\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi\right) dr =$$

$$= \frac{2}{R^2\pi}\int_0^R r^2[\sin\varphi]_{-\pi/2}^{+\pi/2}\,dr = \frac{2}{R^2\pi}\int_0^R r^2 \cdot 2\,dr = \frac{4}{R^2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{4}{R^2\pi} \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3\pi}R\,.$$

6/7. Hol helyezkedik el egy homogén tömegeloszlású kúp súlypontja?

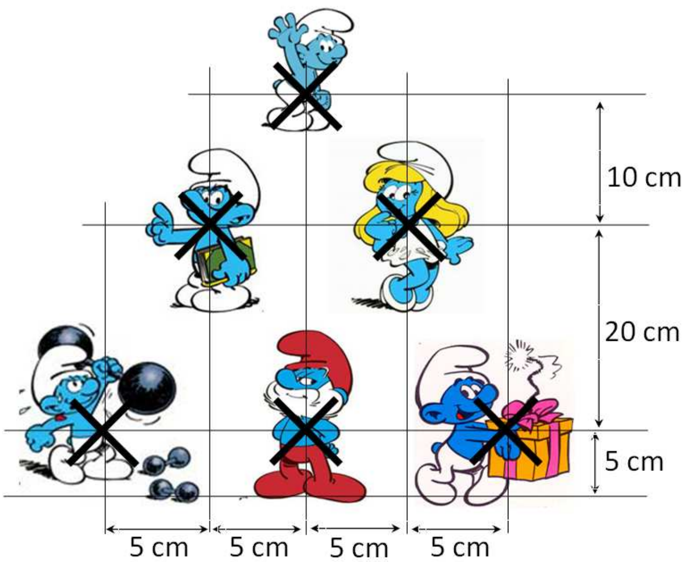


MO.

Szeleteljük fel a kúpot a szimmetriatengelyére – a z tengelyre – merőlegesen korongokra. Egy korong magassága dz, sugara z=0-nál R, z=h-nál 0, azaz $r = x = R\,(1 – z/h)$;
térfogata $dV = x^2\pi\, dz = R^2(1–z/h)^2\pi\, dz$.
A kúp sűrűsége $\rho = m / V_{kúp} = m / (R^2\pi h/3)$.
A kúp tömegközéppontjának z koordinátája

$$z_S = \frac{\int_0^h z\cdot\rho\cdot A(z)\,dz}{m} = \frac{1}{m}\int_0^h z\cdot\frac{3m}{R^2\pi h}\cdot R^2\left(1-\frac{z}{h}\right)^2\pi\,dz =$$
$$= \frac{3}{h^3}\int_0^h z\cdot(h-z)^2\,dz = \frac{3}{h^3}\int_0^h(h^2z-2hz^2+z^3)\,dz =$$
$$= \frac{3}{h^3}\left[\frac{h^2z^2}{2}-\frac{2hz^3}{3}+\frac{z^4}{4}\right]_0^h = \cdots = \frac{h}{4}$$

Gyakorló feladatok zh-ra

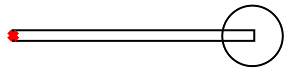


6/8. A törpök fel szeretnének lépni a cirkuszban. A mutatvány az lesz, hogy gúlát alkotnak magukból – ahogy a képen láthatjuk. A keresztek az egyes törpök tömegközéppontját jelölik.
A törpök az alsó sorban balról jobbra:
Törperős 1,5 kg; Törpapa 1,2 kg; Tréfi 1,2 kg;
a középső sorban:
Okoska 0,9 kg; Törpilla 1,1 kg;
legfelül Törpicur 0,5 kg.
Hol van a hat törp tömegközéppontja?
Milyen messze van Törpapa tömegközéppontjától?

MO.

Válasszuk Törpapa tömegközéppontját origónak, akkor az egyes törpök helyvektorai (cm-ben):
Törperős (–10;0), Törpapa (0;0), Tréfi (10;0), Okoska (–5;20), Törpilla (5;20), Törpicur (0;30).
A hat törp tömegközéppontja: $\mathbf{r}_s = (m_1\mathbf{r}_1+\ldots+m_6\mathbf{r}_6) / (m_1+\ldots+m_6)$
a vízszintes koordinátája
$x_S = (–10\cdot1,5+0\cdot1,2+10\cdot1,2–5\cdot0,9+5\cdot1,1+0\cdot0,5)/(1,5+1,2+1,2+0,9+1,1+1,5) = –2 / 6,4 = –0,3125$ cm
a függőleges koordinátája
$y_S = (0\cdot1,5+0\cdot1,2+0\cdot1,2+20\cdot0,9+20\cdot1,1+30\cdot0,5)/(1,5+1,2+1,2+0,9+1,1+1,5) = 55 / 6,4 = 8,59375$ cm
A tömegközéppont távolsága Törpapától $d = \sqrt{0{,}3125^2 + 8{,}59375^2} \approx 8{,}60$ cm

6/9. Az ábrán látható módon egy 0,8 m hosszú, 0,6 kg tömegű rúd végéhez egy 10 cm sugarú, 0,2 kg tömegű korongot erősítettünk. A rúd+korong a másik végén átmenő vízszintes tengely körül súrlódásmentesen elfordulhat.
Hol van a rúd+korong tömegközéppontja?



MO.
A rúd tömegközéppontja L/2-re van a tengelytől, a korongé L-re, az egészé pedig
x_s = (½·0,8·0,6+0,8·0,2)/(0,6+0,2) = 0,5 m -re van a tengelytől.

6/10. Az 1995-ös olimpia alkalmával történt, hogy az egyik rúdugró aranyat akart csempészni az ugrórúdjában. A rúdja 4 cm átmérőjű és 5 m hosszú volt, és szénszál erősítésű kevlarból készült, aminek sűrűsége ρ_k = 1,5 kg/dm^3. A versenybizottság azonban megvizsgált minden rudat, és feltűnt nekik, hogy a rúd 6,7 dkg-mal nehezebb, mint az a fenti adatok alapján várható lenne, és ráadásul a súlypontja se a felénél van, hanem 1 cm-rel odébb.
Hol, mennyi arany volt a rúdban, ha az a rúd teljes keresztmetszetében, egy darabban volt belerakva? Az arany sűrűsége ρ_{Au} = 19,3 kg/dm^3.

MO. Ha az egész rúd kevlarból lenne, a tömege
$m_{tk} = \rho_k \cdot V_{rúd} = \rho_k \cdot L \cdot r^2\pi = 19300 \cdot 5 \cdot 0{,}02^2\pi \approx 9{,}425$ kg lenne,
de az arannyal együtt a tömege $m_{rúd} \approx 9{,}425 + 0{,}067 = 9{,}492$ kg.
Legegyszerűbb úgy gondolkodnunk, hogy két testünk van:
– egy tiszta kevlar rúd (teljes hosszában, azaz ott is, ahol az arany van), és
– a 6,7 dkg plusz tömeg (ott, ahol az arany van),
és az aranydarabkának a tömegközéppontját vissza tudjuk számolni abból, hogy mennyivel tolódott el a rúd tömegközéppontjának koordinátája a közepéhez képest.
Tehát van $m_{tk} \approx 9{,}425$ kg, aminek a tömegközéppontja a rúd felénél van, és
a plusz tömeg, $\Delta m = 0{,}067$ kg, aminek ismeretlen a tömegközéppontja,
és így a teljes $m_{rúd} \approx 9{,}492$ kg tömegű rúd tömegközéppontja a végétől 2,51 m-re van:
$x_s = 2{,}51 = \dfrac{2{,}50 \cdot 9{,}425 + x \cdot 0{,}067}{9{,}492}$, amiből x ≈ **3,917 m** a rúd végétől,
vagy
$x'_s = 0{,}01 = \dfrac{x' \cdot 0{,}067}{9{,}492}$, amiből x' ≈ **1,417 m** a rúd közepétől.

6/11. 66 kg tömegű kötéltáncos súlypontja a kötél felett 1 m magasságban van. Ugyanezen magasságban tartja a kezében lévő 6 m hosszú, 4 kg tömegű merev rudat, melynek két végén levő 2 m-es fonálon egy-egy ólomgolyó függ. Legalább milyen tömegűeknek kell lenniük a golyóknak ahhoz, hogy a rendszer (kötéltáncos + rúd + golyók) súlypontja a kötél alá essék? (A rudat középütt fogja, a 2 m távolság a rúdtól a golyó középpontjáig értendő.)

6/12. Határozzuk meg a hamisjátékos 15 mm élhosszú, fából készült dobókockája súlypontjának helyzetét, ha egyik oldalába 1 mm vastag vaslemezt épített be. A fa sűrűsége 0,5 g/cm^3, a vasé 7,8 g/cm^3.

6/13. Jancsi ül egy kis kocsiban két téglával, és úgy akarja elindítani a kocsit, hogy a téglákat kidobja a kocsiból. Jancsi tömege 48 kg, a kocsié 12 kg, egy tégláé 4 kg. Jancsi a *kocsihoz képest* 3 m/s-os sebességgel tudja eldobni a téglákat. A kocsi súrlódásmentesen mozoghat.
Mekkora lesz a sebessége a két tégla kidobása után, ha azokat

a) egyszerre,

b) egymás után dobja ki?

MO. impulzus-megmaradást felírva, a tégla sebességét véve pozitív iránynak

a) $(48+12+2\cdot4)\cdot0 = 2\cdot4\cdot3 + (48+12)\cdot v \rightarrow v = -24/60 = -0{,}4$ m/s

b) $(48+12+2\cdot4)\cdot0 = 4\cdot3 + (48+12+4)\cdot v_1 \rightarrow v_1 = -12/64 = -0{,}1875$ m/s

$(48+12+4)\cdot v_1 = 4\cdot(v_1+3) + (48+12)\cdot v_2 \rightarrow v_2 = (-12-11{,}25)/60 = -0{,}3875$ m/s

6/14. Jancsi és Juliska állnak a jégen egymástól 12 m-re, fogják egy kötél két végét.

a) Hol van a tömegközéppontjuk az őket összekötő egyenes mentén, ha Jancsi 35 kg, Juliska 25 kg tömegű?

Jancsi hirtelen elkezdi húzni a kötelet. Egy pillanat alatt felgyorsulva mindketten súrlódásmentesen csúszni kezdenek egymás felé állandó sebességgel. Jancsi sebessége 1,5 m/s.

b) Mennyi Juliska sebessége?

c) Milyen távol lesznek egymástól, amikor Jancsi 3 m-t csúszott?

Ütközésük tökéletesen rugalmatlan ütközésnek tekinthető (összekapaszkodnak, nem eresztik el egymást). Az ütközésük 0,05 s-ig tartott.

d) Mennyi lesz a közös sebességük?

e) Mennyi Juliska ill. Jancsi impulzusának változása?

f) Mekkora erő hatott Juliskára ill. Jancsira, ha feltesszük, hogy ütközéskor a köztük ható erő állandó volt?

g) Hány ’g’ gyorsulást jelentett ez Juliskának ill. Jancsinak?

MO.

a) Juliskától $x_s = (0\cdot25 + 12\cdot35) / (25+35) = 7$ m-re, Jancsitól 5 m-re.

b) impulzus-megmaradással (mivel a külső erők eredője zérus), ha Jancsi sebessége pozitív:

$$m_{Jancsi}\, v_{Jancsi} + m_{Juliska}\, v_{Juliska} = 0 \Rightarrow v_{Juliska} = -2{,}1 \text{ m/s}$$

c) $s_{Juliska} / s_{Jancsi} = v_{Juliska} / v_{Jancsi}$, amíg Jancsi $s_{Jancsi} = 3$ m-t tesz meg, addig Juliska $s_{Juliska} = 4{,}2$ m -t, tehát a távolság köztük $d = 12 - (3+4{,}2) = 4{,}8$ m

d/ impulzus-megmaradással:

$$m_{Jancsi}\, v_{Jancsi} + m_{Juliska}\, v_{Juliska} = 0 = (m_{Jancsi}+m_{Juliska})\cdot v_{közös} \rightarrow v_{közös} = 0$$

e) $\Delta p_{Juliska} = 25 \cdot (0 - (-2{,}1)) = 52{,}5$ kgm/s ; $\Delta p_{Jancsi} = 35 \cdot (0 - 1{,}5) = -52{,}5$ kgm/s

f) $F_{Juliska} = \Delta p_{Juliska} / \Delta t = 52{,}5 / 0{,}05 = 1050$ N ; $F_{Jancsi} = \Delta p_{Jancsi} / \Delta t = -52{,}5 / 0{,}05 = -1050$ N

g) $a_{Juliska} = F_{Juliska} / m_{Juliska} = 1050/25 = 42\ m/s^2 = 4{,}2$ g ;

$a_{Jancsi} = F_{Jancsi} / m_{Jancsi} = 1050/35 = 30\ m/s^2 = 3{,}0$ g .

6/15. Egy 7 kg-os lövedék pályájának legfelső pontján, a kilövés után 3 s-mal két darabra robban szét. A robbanás egy, a kilövési ponttól 1200 m távolságban tartózkodó őrmester feje fölött történt, majd a robbanás után 1 s-mal egy 2 kg- os repeszdarab az őrmester lába elé esett. A kilövés helyétől milyen távolságban keressék a másik repeszdarabot?

MO.

Mivel a kilövéstől a robbanásig 3 s telt el és ezalatt 1200 m-t tett meg vízszintesen a lövedék, vízszintes sebessége $v_x = v_0 \cos\alpha = d / t_h = 1200 / 3 = 400$ m/s. Ez lesz a sebessége a robbanáskor, a robbanás ugyanis a pálya csúcspontján történik, amikor a repesz függőleges sebessége zérus: $v_z = v_0 \sin\alpha - gt_h = 0$. Utóbbiból kiszámítható a robbanás helyének magassága: a lövedék kezdősebességének függőleges komponense $v_{0z} = v_0 \sin\alpha = gt_h = 10 \cdot 3 = 30$ m/s volt, amivel $h = (v_0 \sin\alpha)\, t_h - ½\, g\, t_h^2 = 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 45$ m. A robbanás után az $m_1 = 2$ kg tömegű repeszdarab ebből a magasságból érkezett le $t_1 = 1$ s alatt, vagyis $h + v_{10}\, t_1 - ½\, g\, t_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{10} = -40$ m/s függőleges kezdősebessége volt a robbanás után.

Az impulzus-megmaradást felírva a robbanásra:

$M\,(v_0 \cos\alpha)\, \mathbf{i} = m_1\, v_{10}\, \mathbf{k} + m_2\, \mathbf{v_2}$

$\Rightarrow \quad \mathbf{v_2} = (M\, v_0 \cos\alpha) / m_2\, \mathbf{i} - (m_1\, v_{10}) / m_2\, \mathbf{k} = (7 \cdot 400/5)\, \mathbf{i} - (2 \cdot (-40)/5)\, \mathbf{k} = 560\, \mathbf{i} + 16\, \mathbf{k}$ (m/s)

lesz az 5 kg tömegű darab kezdősebessége. A helyvektora

$\mathbf{r}(t) = (1200 + 560\, t)\, \mathbf{i} + (45 + 16\, t - 5\, t^2)\, \mathbf{k}$ (m).

Ebből ki tudjuk számolni, hogy mikor és hol ér földet:

$45 + 16\, t_t - 5\, t_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 \approx 5$ s alatt ér földet

$d_2 = 1200 + 560\, t_2 = 4000$ m távolságban a kilövés helyétől.

Nem zh-feladatok

6/16. Egy háromszög három csúcsában egyenlő tömegű golyók vannak. Mutassuk meg, hogy a három golyóból álló pontrendszer tömegközéppontja a háromszög súlypontjában helyezkedik el!

6/17. Határozzuk meg egy homogén félgömb súlypontjának helyzetét!

6/18. Egy egyenes csonkakúp alaplapjának sugara R, fedőlapjáé r. Milyen arányban osztja a súlypontja a magasságát? A csonkakúp anyaga homogén.

6/19. A levegő sűrűsége a $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}$ formulával leírható módon függ a h magasságtól.
$\rho_0 = 1{,}2$ kg/m^3, $p_0 = 10^5$ Pa.
Milyen magasan van egy egyenletes keresztmetszetű levegőoszlop tömegközéppontja?