Harmonikus rezgőmozgás (csillapítatlan szabadrezgés)

Rugó végéhez rögzített test **vízszintes**, súrlódásmentes síkon:
Vegyük fel az x tengelyt a rugó tengelyében, az x = 0 legyen ott, ahol a rugó vége van meg nem nyújtott (azaz erőmentes) állapotban (azaz a rugó nyugalmi hosszánál), és az x tengely pozitív iránya mutasson a rugó megnyújtásának irányába, így a rugó által a testre kifejtett erő

$F_r = -kx$,

ahol x a rugó megnyúlása: $x = \ell - \ell_0$ (x>0, ha a rugó megnyúlik; x<0, ha összenyomódik).
A rugó által kifejtett erő mindig a nyugalmi hossz irányába mutat.

A mozgásegyenlet $m\ddot{x} = -kx$,

$\Rightarrow$ $x = A\cos(\omega t+\varphi_0)$,
$v = -A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)$,
$a = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0) = -\omega^2 x$,
$F = -mA\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0) = -m\omega^2 x$,

ahol a körfrekvencia $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$ $\Rightarrow$ a periódusidő $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$;

az A amplitúdó és a φ_0 fázisállandó pedig az x_0 és v_0 kezdeti feltételekből határozható meg:
$x(0) = x_0 = A\cos\varphi_0$ és
$v(0) = v_0 = -A\omega\sin\varphi_0$

$\Rightarrow A = \sqrt{{x_0}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$, $\phi_0 = \text{arc tg}\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$.

A fázisállandó meghatározásakor mindkét egyenletet ($x_0 = A\cos\varphi_0$ és $v_0 = -A\omega\sin\varphi_0$) figyelembe kell venni és vigyázni kell az előjelekre. Pl. $\cos\varphi_0=0 \rightarrow \varphi_0=\pi/2$ vagy $\varphi_0=3\pi/2$:
$\varphi_0=\pi/2$ esetén a test sebessége $(-A\omega\cdot\sin\pi/2)$ negatív, azaz a rugó éppen nyomódik össze;
$\varphi_0=3\pi/2$ esetén a test sebessége $(-A\omega\cdot\sin3\pi/2)$ viszont pozitív, azaz a rugó éppen nyúlik.

Megjegyzés: a mozgásfüggvényt az előadástól eltérően most nem $x = A\sin(\omega t+\varphi)$, hanem $x = A\cos(\omega t+\varphi_0)$ alakban írjuk fel, aminek az az előnye, hogy ha a rezgést úgy indítjuk el, hogy a rugót megnyújtjuk és onnan a testet kezdősebesség nélkül elengedjük ($v_0 = 0$), akkor az amplitúdó $A = x_0$ és a fázisállandó $\varphi_0 = 0$, tehát $x = A\cos(\omega t)$. (Elvi jelentősége nincs, tudjuk, hogy a sin( ) ill. cos( ) függvények $\pi/2$ fázistolással egymásba alakíthatók.)

A maximális sebességet az egyensúlyi helyzeten való áthaladáskor éri el a test, ekkor $v_{max} = A\omega$.

Energia-megmaradás:
$E_{mech} = ½\, kA^2 = ½\, m{v_{max}}^2 = ½\, kx^2 + ½\, mv^2 = \text{konst.}$

Rugó végéhez rögzített test **függőleges** helyzetben:
Lefelé irányított *x*-tengelyt felvéve a mozgásegyenlet

$m\ddot{x} = mg - kx$, ahol x most is a rugó megnyúlása.

Olyan rezgés jön létre, aminek az egyensúlyi helyzete nem a rugó nyugalmi hosszánál van, hanem ott, ahol az eredő erő zérus: $mg - k\cdot x_{es} = 0 \Rightarrow x_{es} = mg/k$.
Tehát az egyensúlyi helyzetben $F_e = 0$; a többi helyzetben m**g** és a rugóerő eredője az egyensúlyi helyzet felé mutat. A rugóerő a felső szélső helyzetben mutathat felfelé vagy lefelé is, attól függően, hogy a nyugalmi hossz alatt vagy felett van a test.

Vezessük be új változónak az egyensúlyi helyzettől való eltérést: $y = x - x_{es} = x - mg/k$.
Ennek deriváltjai megegyeznek x deriváltjaival (mivel csak egy konstans köztük a különbség): $\ddot{y} = \ddot{x}$.
Az új változóval kifejezve az eredeti változót $x = y + mg/k$, amivel a mozgásegyenlet

$m\ddot{x} = m\ddot{y} = -kx + mg = -k(y + mg/k) + mg = -ky - mg + mg = -ky$, azaz $m\ddot{y} = -ky$,

tehát az egyensúlyi helyzettől (és nem a nyugalmi hossztól) mért eltérésre ugyanolyan egyenletet kaptunk, mint vízszintes helyzetű rugó esetén, vagyis ugyanolyan körfrekvenciájú és periódusidejű lesz a rezgőmozgás, csak nem a rugó nyugalmi hossza, hanem a (ráakasztott tömegtől függő) egyensúlyi helyzet körül. Az amplitúdót és a kezdőfázist a vízszintes helyzetben lévő rugóhoz hasonlóan kell meghatározni.

Energia-megmaradás:
Most a helyzeti energiába egy $-mgx$ tagot is be kell venni (amit sokszor célszerű úgy választani, hogy a rugó $\frac{1}{2}kx^2$ energiájához hasonlóan ennek is a rugó nyugalmi hosszánál legyen zérus az értéke).

Közegellenállás

A testre ható közegellenállási erő mindig ellentétes irányú a test sebességével, nagyságára pedig különböző tartományokban különböző közelítéseket alkalmazunk. Mivel ilyenkor a testre ható erők nem állandó nagyságúak, a $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v_0} + \mathbf{a}t$ és $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0}t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$ képletek nem érvényesek, hanem az adott $\mathbf{a}(\mathbf{v})$ differenciálegyenlet megoldásával kaphatjuk meg a $\mathbf{v}(t)$ és $\mathbf{r}(t)$ függvényeket, ami nem mindig könnyű feladat. Könnyen kiszámolható viszont a test stacionárius (állandósult) sebessége (az a sebesség, aminél a test nem gyorsul, vagyis az eredő erő zérus).

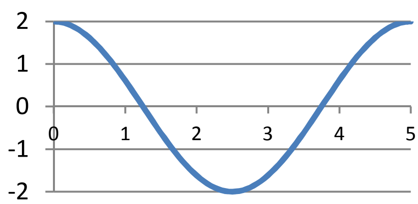
6/1. Egy tömegpont harmonikus rezgőmozgást végez az x tengely mentén:

$x(t) = x^* \cdot \cos(\omega \cdot t + \pi)$, ahol $x^* = -2$ m, $\omega = 2\pi/5\ s^{-1}$.

a) Ábrázoljuk a test x koordinátáját a [0, T] időintervallumban! (Mennyi a T periódusidő? Mekkora az A amplitúdó? Honnan indul a test a t = 0 s-ban?)
b) Mennyi a sebesség átlagértéke egy teljes periódusra?
c) Mennyi a sebesség nagyságának átlagértéke egy teljes periódusra?

MO.

a) $A = |x^*| = 2$ m,
$T = 2\pi/\omega = 2\pi/(2\pi/5) = 5$ s,
$x(0) = x^* \cos\pi = -x^* = 2$ m,
$x(t) = 2 \cdot \cos((2\pi/5) \cdot t)$.



b) $\bar{v} = v_{átl} = [x(T) - x(0)] / T = 0$
c) $\overline{|v|} = |v|_{átl} = 4A / T = 1{,}6$ m/s

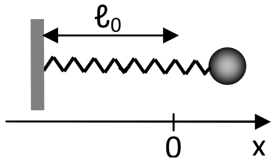
6/2. Vízszintes, súrlódásmentes asztalon a rugó végéhez rögzített m = 100 g tömegű golyó 10 cm-rel való kihúzásához 1 N erőre van szükség.

a) A golyót elengedve mekkora lesz a rezgésidő?

b) Mekkora a golyó sebessége a nyugalmi helyzeten való áthaladáskor?

c) Az elengedés után 2 s múlva hol lesz a golyó?

d) Mekkora ebben a pillanatban a kinetikus energia?



MO.

a) $k = |F/x| = 1 / 0{,}1 = 10\ \text{N/m} = 10\ \text{kg/s}^2$,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}1}{10}} = 0{,}2\pi \approx 0{,}6283\ \text{s}\ .$$

b) $v_{max} = A\omega$: $A = 0{,}1$ m , $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0{,}1}} = 10\ \text{s}^{-1}$, $v_{max} = 1$ m/s .

c) $x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = 0{,}1\cos(10t)$

($\varphi_0 = 0$, mert kezdősebesség nélkül indul a test a maximális kitérésről)

$x(2) = 0{,}1\cos(10\cdot 2) \approx 0{,}04081\ \text{m} = 4{,}081\ \text{cm}$.

d) $v(t) = -0{,}1\cdot 10\sin(10t) = -\sin(10t)$

$v(2) = -\sin(20) \approx -0{,}9129$ m/s,

$E_{kin}(2) = ½\cdot 0{,}1\cdot(-0{,}913)^2 \approx 0{,}04167$ J.

VAGY: $½\,kx^2 + ½\,mv^2 = \text{konst.} = ½\,kA^2 \quad\Rightarrow$

$E_{kin} = ½\,mv^2 = ½\,k\,(A^2 - x(2)^2) = ½\cdot 10\cdot(0{,}1^2 - 0{,}04081^2) \approx 0{,}04167$ J.

6/3. Van egy ℓ_0 = 32 cm hosszú, k = 5,6 N/m rugóállandójú rugónk. Ezt a rugót függőlegesen fellógatjuk, és a végére akasztunk egy m tömegű testet, majd meghúzzuk lefelé, hogy a hossza 60 cm legyen, elengedjük, és megmérjük 10 rezgés idejét: t_{10} = 9,2 s.

a) Mekkora a rugó végére akasztott test tömege?

b) Mekkora a rezgés amplitúdója?

c) Rajzoljuk meg a testre ható erőket a rezgőmozgás alsó és felső pontjában!

MO.

a) A rezgésidőből $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{t_{10}}{10} \quad \rightarrow \quad m = k\,\frac{T^2}{4\pi^2} \approx 0{,}1201$ kg.

b) Függőleges helyzetben a rezgőmozgás egyensúlyi helyzete nem a rugó nyugalmi hossza lesz, hanem az a helyzet, ahol akkora a rugó megnyúlása, hogy az eredő erő zérus legyen: $k\cdot x_{es} = mg$

$\rightarrow$ $x_{es} = mg/k = (0{,}1201\cdot 10/5{,}6)\ \text{m} \approx 0{,}2144$ m.

A rugó az egyensúlyi helyzetben $\ell_{es} = \ell_0 + x_{es} \approx 0{,}32 + 0{,}2144 = 0{,}5344$ m hosszú.

Az amplitúdó ennek és az ℓ_{max} elengedéskori hossznak a különbsége:

$A = \ell_{max} - \ell_{es} \approx 0{,}60 - 0{,}5344 = 0{,}0656\ \text{m} = 6{,}56\ \text{cm}$.

A rezgéskor tehát a rugó hossza $\ell_{max} = \ell_{es} + A = 0{,}60$ m és

$\ell_{min} = \ell_{es} - A \approx 0{,}5344 - 0{,}0656 = 0{,}4688$ m között változik (tehát a rezgés felső pontjában is meg van nyúlva).

c) A testre ható erők:

- a nehézségi erő ($mg = 0{,}1201 \cdot 10 = 1{,}201$ N) lefelé és
- a rugóerő ($F_r = k \cdot \Delta\ell$) a rugó nyugalmi hosszának megfelelő pont felé.

Az alsó helyzetben a rugó megnyúlása $\Delta\ell_a = \ell_{max} - \ell_0 = 0{,}60 - 0{,}32 = 0{,}28$ cm,
a rugóerő $F_{r,alsó} = 5{,}6 \cdot 0{,}28 = 1{,}568$ N felfelé, az eredő $F_{e,alsó} = 1{,}568 - 1{,}201 = 0{,}3674$ N felfelé;
a felső helyzetben a rugó megnyúlása $\Delta\ell_f = \ell_{min} - \ell_0 \approx 0{,}1488$ m,
a rugóerő $F_{r,felső} = 5{,}6 \cdot 0{,}1488 \approx 0{,}8332$ N felfelé, az eredő $F_{e,felső} = 1{,}201 - 0{,}8332 = 0{,}3674$ N lefelé.

A KÖZEGELLENÁLLÁSOS FELADATOKNÁL CSAK A NEM SZÜRKE RÉSZEK KELLENEK A ZH-RA!

6/4. a) Mekkora út megtétele után áll meg egy vízszintes úton haladó Polski Fiat a motor kikapcsolása után, ha rá a súrlódási erőn kívül a sebesség négyzetével arányos közegellenállási erő is hat? Írjuk fel a Polski Fiat mozgásegyenletét!
A gépkocsi tömege m = 650 kg, sebessége a motor kikapcsolásának pillanatában
$v_0 = 80$ km/h, a súrlódási együttható $\mu = 0{,}015$; a közegellenállási erő 40 km/h sebességnél 54 N.
b) Milyen húzóerőt képes a gépkocsi motorja kifejteni, ha a maximális sebesség 100 km/h?

MO.
a) A mozgásegyenlet: $ma = F_{motor} - \mu mg - cv^2$, ahol $c = 54\text{ N} / (40/3{,}6\text{ m/s})^2 = 0{,}4374$ kg/m.
Ha a motor ki van kapcsolva: $ma = -\mu mg - cv^2$.
Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása írja le, hogyan változik a sebesség az idő függvényében. A kérdés viszont most az, hogy hogyan változik a sebesség a megtett út függvényében – ezért átalakítjuk a differenciálegyenletet:
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$, azaz $mv\frac{dv}{ds} = -\mu mg - cv^2$.
Szeparáljuk és integráljuk: $\int ds = \int -\frac{mv}{\mu mg + cv^2}dv = -\frac{m}{2c}\int \frac{2v}{\mu mg/c + v^2}dv$
$\rightarrow \quad s = -\frac{m}{2c}ln\left(\frac{\mu mg}{c} + v^2\right) + K,$
és mivel s = 0 -nál $v = v_0$, ezért $K = \frac{m}{2c}ln\left(\frac{\mu mg}{c} + {v_0}^2\right)$,
tehát $s = \frac{m}{2c}ln\frac{\frac{\mu mg}{c} + {v_0}^2}{\frac{\mu mg}{c} + v^2}$.
A megtett út, amíg megáll, azaz v = 0: $s = \frac{m}{2c}ln\frac{\frac{\mu mg}{c} + {v_0}^2}{\frac{\mu mg}{c}} = \frac{m}{2c}ln\left(1 + \frac{c{v_0}^2}{\mu mg}\right) \approx 868\, m.$
b) A maximális sebességnél a = 0 $\rightarrow$ $F_{motor} = \mu mg + c{v_{max}}^2 = 435$ N.

6/5. $\alpha = 30°$-os lejtőn halad felfelé egy m = 30 t tömegű szerelvény. A légellenállás $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$, ahol b = 15000 kg/s; a súrlódás elhanyagolható.
a) Mennyi a mozdony húzóereje, ha a vonat sebessége állandó: $v_0 = 54$ km/h?
b) A mozdony motorja elromlik. Mennyi idő alatt és mekkora úton csökken nullára a vonat sebessége a $v_0 = 54$ km/h sebességről?
c) Mi történik ezután? Feltéve, hogy a lejtő nagyon hosszú, mennyi lesz a vonat végsebessége?
MO.
a) A mozgásegyenlet: $ma = F_{húzó} - mg\sin\alpha - bv$.
Amikor állandó $v_0 = 54$ km/h = 15 m/s sebességgel megy a vonat, a gyorsulás zérus,
tehát $F_{húzó} = mg\sin\alpha + bv_0 = 375$ kN.

b) $F_{húzó} = 0$, $ma = m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\alpha - bv$.

Szeparáljuk és integráljuk: $\int -\frac{m}{mgsin\alpha+bv}dv = -\frac{m}{b}\int\frac{1}{mgsin\alpha/b+v}dv = \int dt$

$t = -\frac{m}{b}ln\left(\frac{mgsin\alpha}{b}+v\right)+K$, és mivel t = 0 -nál $v = v_0$, ezért $K = \frac{m}{b}ln\left(\frac{mgsin\alpha}{b}+v_0\right)$,

tehát $t = -\frac{m}{b}ln\frac{\frac{mgsin\alpha}{b}+v}{\frac{mgsin\alpha}{b}+v_0}$, azaz $v(t) = \left(\frac{mgsin\alpha}{b}+v_0\right)\cdot e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mgsin\alpha}{b}$.

Mikor áll meg? v = 0, ha $t = \frac{m}{b}ln\left(\frac{bv_0}{mgsin\alpha}+1\right) \approx 1{,}833$ s.

Mekkora utat tesz meg, amíg megáll?

integráljuk a *v(t)* függvényt: $s = \frac{m}{b}\left(\frac{mgsin\alpha}{b}+v_0\right)\cdot\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right) - \frac{mgsin\alpha}{b}t$

Behelyettesítve s = 11,67 m.

c) A vonat sebességét a *v(t)* függvény megadja a pillanatnyi megállás utánra is;

látható, hogy $t \to \infty$ esetén $e^{-\frac{b}{m}t} \to 0$, így $v \to v_{stac} = -\frac{mgsin\alpha}{b}$,

tehát a vonat v_{stac} = 10 m/s = 36 km/h állandósult sebességgel megy majd lefelé a lejtőn.

A stacionárius sebesség kifejezhető a mozgásegyenletből is:

most $F_{húzó} = 0$, mert a mozdony nem működik; a pozitív irány mutasson lefelé: $ma = mg\sin\alpha - bv_{stac}$

Stacionárius esetben a = 0: $mg\sin\alpha - bv_{stac} = 0$ →

$v_{stac} = mg\sin\alpha / b = 30\cdot10^3\cdot10\cdot\sin30° / 15000 = 10$ m/s = 36 km/h.

Gyakorló feladatok a zh-ra

6/6. Vízszintes, súrlódásmentes síkon egy rugó végére m = 1 kg tömegű golyót rögzítettünk. A rugó másik vége rögzítve van. A 45 cm-es rugó 20 cm-rel való kihúzásához 5 N erőre van szükség.

a) A golyót elengedve mekkora lesz a rezgésidő?
b) Írjuk fel a golyó kitérését az idő függvényében!
c) Mekkora a golyó maximális sebessége?
d) Mekkora a golyó gyorsulása 10 s-mal a golyó elengedése után?

MO.

a) k = 5 / 0,2 = 25 N/m, $\omega = \sqrt{k/m} = 5\ s^{-1}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{5} \approx 1{,}26$ s

b) A = 0,2 m, tehát x(t) = 0,2 cos (5t) [m]

c) $v_{max} = A\omega = 1$ m/s

d) $a(t) = -\omega^2\cdot x(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) = -0{,}2\cdot5^2\cdot\cos(5\cdot10) = -4{,}8\ m/s^2$

6/7. Vízszintes, súrlódásmentes síkon egy rugó végére m = 1 kg tömegű golyót rögzítettünk. A rugó másik vége rögzítve van. A 45 cm-es rugó 20 cm-rel való kihúzásához 5 N erőre van szükség.

a) Mekkora munkát végeztünk a rugó kihúzásakor?
b) A golyót elengedve mekkora lesz a rezgésidő?
c) Írjuk fel a golyó kitérését az idő függvényében!
d) Mekkora a golyó maximális sebessége?
e) Mekkora a golyó gyorsulása 4 s-mal a golyó elengedése után?

MO.

a) $k = 5 / 0{,}2 = 25$ N/m, $W = ½\, k\, (\Delta l)^2 = 0{,}5 \cdot 25 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}5$ J

b) $\omega = \sqrt{k/m} = 5\ s^{-1}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{5} \approx 1{,}26$ s

c) A = 0,2 m, tehát $x(t) = 0{,}2 \cos(5t)$ [m]

d) $v_{max} = A\omega = 1$ m/s

e) $a(t) = -\omega^2 \cdot x(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t) = -0{,}2 \cdot 5^2 \cdot \cos(5 \cdot 4) = -2{,}04\ m/s^2$

6/8. Egyik végénél felfüggesztett rugóra 90 dkg tömegű testet erősítettünk. Ekkor a rugó megnyúlása 12 cm.

a) Mekkora a rugó rugóállandója?

b) Mennyi munkát végzünk, amíg a rugót további 6 cm-rel megnyújtjuk?

MO.

a) $k = mg / \Delta l_0 = 75$ N/m

b) a rugó nyújtásához $W_r = ½\, k\, (\Delta l_1^2 - \Delta l_0^2) = ½ \cdot 75 \cdot (0{,}18^2 - 0{,}12^2) = 0{,}675$ J munkát kell végeznünk, de közben a test lejjebb került, így a nehézségi erőtér
$W_g = mg\, (\Delta l_1 - \Delta l_0) = 0{,}9 \cdot 10 \cdot (0{,}18 - 0{,}12) = 0{,}54$ J munkát végzett rajta,
tehát nekünk összesen $W = W_r - W_g = 0{,}135$ J munkát kell végeznünk.

6/9. Egy $l_0 = 30$ cm hosszú, $k = 20$ N/m rugóállandójú rugó végére 35 dkg tömegű testet rögzítünk. A rugót függőlegesen lógatjuk fel és úgy engedjük el a testet, hogy az a rugó felfüggesztési pontjától 38 cm-re van. Töltsük ki az alábbi táblázatot! A nehézségi erő potenciális energiája abban a magasságban legyen zérus, ami a rezgés egyensúlyi helyzete.

MO.

A rezgés egyensúlyi helyzete $x_{es} = mg/k = 0{,}35 \cdot 10/20 = 0{,}175$ m,
ami a rugó felfüggesztési pontjától 30+17,5 = 47,5 cm-re van;
az amplitúdó A = 47,5–38 = 9,5 cm = 0,095 m,
azaz a test 38 cm és 47,5+9,5 = 57 cm között rezeg.
$v_{max} = A\omega = A \cdot \sqrt{k/m} = 0{,}095 \cdot 7{,}56 = 0{,}718$ m/s.
$\rightarrow$ $E_{kin,\,max} = ½ \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}718^2 = 0{,}09025$ J az egyensúlyi helyzetben; fent ill. lent $E_{kin} = 0$.
$E_{pot} = mgh$: fent $0{,}35 \cdot 10 \cdot 0{,}095 = 0{,}3325$ J , lent –0,3325 J, egyensúlyinál 0.
A rugó megnyúlása fent 8 cm, az egyensúlyi helyzetben 8+9,5=17,5 cm, lent 8+2·9,5=27 cm,
$\rightarrow$ $E_{pot,rugó} = ½\, kx^2$: fent $½ \cdot 20 \cdot 0{,}08^2 = 0{,}064$ J , lent $½ \cdot 20 \cdot 0{,}27^2 = 0{,}729$ J ,
az egyensúlyi helyzetnél $½ \cdot 20 \cdot 0{,}175^2 = 0{,}30625$ J
A rugó + test rendszer mechanikai energiája az eddigiek összege és állandó.

	a test mozgási energiája	a test helyzeti energiája	a rugó potenciális energiája	a rugó+test rendszer mechanikai energiája
a rezgés legfelső pontja	0	0,3325 J	0,064 J	0,3965 J
a rezgés egyensúlyi helyzete	0,09025 J	0	0,30625 J	0,3965 J
a rezgés legalsó pontja	0	–0,3325 J	0,729 J	0,3965 J

6/10. Egy 42 cm hosszú, 8 N/m rugóállandójú rugó végéhez rögzítünk egy 12,5 dkg tömegű testet. Írjuk fel a test kitérését az idő függvényében (a körfrekvencia, amplitúdó, kezdőfázis kiszámolásával), ha

a) vízszintes, súrlódásmentes síkon rögzítjük a rugó végét, majd a rugót 10 cm-rel kihúzzuk és úgy engedjük el, hogy a testnek 0,8 m/s kezdősebességet adunk az egyensúlyi helyzete felé;

b) a rugó végét a plafonhoz rögzítjük, és kezdősebesség nélkül elengedjük a testet úgy, hogy a rugó hossza éppen a nyugalmi hossz! (a rugó függőleges)

Az x = 0 pont legyen a rugó rögzítési pontja mindkét esetben.

MO.

a) Legyen y az egyensúlyi helyzettől való eltérés, vagyis a rugó nyugalmi hosszától mért távolság, ezzel a mozgásegyenlet $ma = m\ddot{y} = -ky$

→ a körfrekvencia $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{k/m} = \sqrt{8/0{,}125} = 8\ s^{-1}$

A kitérés ill. a sebesség:

$y(t) = A\cos(\omega t+\varphi_0) = A\cos(8t+\varphi_0)$ ill. $v(t) = -A\omega\sin(\omega t+\varphi_0) = -8A\sin(8t+\varphi_0)$

A kezdeti feltételek szerint: $y_0 = 0{,}1$ m és $v_0 = -0{,}8$ m/s, azaz

$y(0) = A\cos(8\cdot 0+\varphi_0) = 0{,}1$ ill. $v(0) = -8A\sin(8\cdot 0+\varphi_0) = -0{,}8$

→ $A\cos(\varphi_0) = 0{,}1$ és $A\sin(\varphi_0) = 0{,}1$

→ $A = 0{,}1\cdot\sqrt{2} \approx 0{,}141$ [m] és $\varphi_0 = \text{arc tg } 1 = \pi/4 \approx 0{,}785$ rad

A rugó rögzítési pontjához rakott x koordináta 0,42 m-rel van eltolva, $x(t) = 0{,}42 + y(t)$, azaz

$x(t) = 0{,}42 + 0{,}1\sqrt{2}\cos(8t + \pi/4)$ [m] vagy: $x(t) = 0{,}42 + 0{,}1\sqrt{2}\sin(8t + 3\pi/4)$ [m]

b) Írjuk fel a mozgásegyenletet az x koordinátával (aminek zérus pontja a rugó rögzítési pontja); ekkor a rugóerőt a nyugalmi hossztól (0,42 m-től) kell számolni:

$ma = m\ddot{x} = mg - k(x-0{,}42)$

Ennek a rezgésnek az egyensúlyi helyzete most nem a rugó nyugalmi helyzete lesz, hanem ahol $\ddot{x} = 0$, azaz

$mg - k(x_{es}-0{,}42) = 0$ → $x_{es} = 0{,}42 + mg/k = 0{,}42 + 0{,}125\cdot 10/8 = 0{,}42 + 0{,}15625 = 0{,}57625$ m.

Írjuk most át a mozgásegyenletet úgy, hogy bevezetjük y-t, az egyensúlyi helyzettől való eltérést:

$y(t) = x(t) - x_{es}$, amivel $x(t) = x_{es} + y(t)$, tehát $m(\ddot{x_{es} + y}) = mg - k((x_{es}+y) - 0{,}42)$.

Mivel x(t) és y(t) csak egy konstansban különböznek, ezért a második deriváltjuk egyenlő.

$\rightarrow \quad m\ddot{y} = mg - k\,((0{,}42 + mg/k + y) - 0{,}42) = mg - k\,(mg/k + y) = mg - mg - ky = -\,ky$, vagyis az egyensúlyi helyzettől való eltérésre felírt differenciálegyenletünk ugyanolyan, mint a vízszintesen elhelyezkedő rugó mozgásegyenlete: $m\ddot{y} = -ky$.

A körfrekvencia tehát ugyanannyi lesz a függőleges rezgésnél is, mint a vízszintesnél, $\omega = 8\ s^{-1}$.

A kezdeti értékek pedig $y_0 = -\,0{,}15625$ m [vagy: $x_0 = 0{,}42$ m] és $v_0 = 0$, azaz

$y(0) = A\cos(8\cdot 0+\varphi_0) = -\,0{,}15625$ [vagy: $x(0) = 0{,}57625 + A\cos(8\cdot 0+\varphi_0) = 0{,}42$]

és $v(0) = -8A\sin(8\cdot 0+\varphi_0) = 0$. A sebességből $\sin\varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi_0 = 0$ vagy π,

a kitérésből $y(0) = A\cos\varphi_0 = -\,0{,}15625$ [vagy: $x(0) = 0{,}57625 + A\cos\varphi_0 = 0{,}42$]

$\rightarrow A = 0{,}15625$ és $\varphi_0 = \pi$,

vagyis $x(t) = 0{,}57625 + 0{,}15625\cos(8t + \pi)$ vagy: $x(t) = 0{,}57625 + 0{,}15625\sin(8t + 3\pi/2)$

vagy: $x(t) = 0{,}57625 - 0{,}15625\cos(8t)$

6/11. (8/14.) Hosszú függőleges csőben rugó van elhelyezve, amelynek a cső falával való súrlódása elhanyagolható. A rugóra 10 g tömegű golyót helyezve 1 cm-rel összenyomódik. Mennyivel nyomódik össze a rugó, ha a golyót a rugó tetejétől számított 1 m magasságból ejtjük rá?

MO.

A rugóállandó $k = mg / \Delta l_1 = 0{,}01\cdot 10 / 0{,}01 = 10$ N/m.

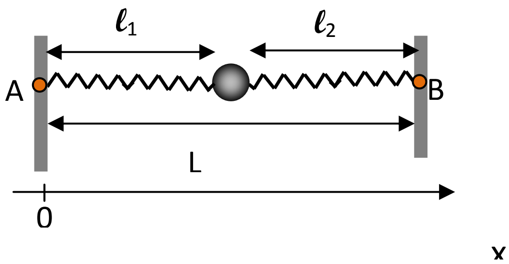
Írjuk fel az energia-megmaradást úgy, hogy a nehézségi erőtér potenciális energiájának zérus szintje a rugó tetejénél legyen (azaz amikor a rugó nincs összenyomva):

$$mg\,H = mg\,(-\Delta l_2) + \tfrac{1}{2}\,k\,\Delta l_2^{\,2} ,$$

behelyettesítve $0{,}01\cdot 10\cdot 1 = -0{,}01\cdot 10\cdot \Delta l_2 + \tfrac{1}{2}\cdot 10\cdot \Delta l_2^{\,2}$, azaz $5\,\Delta l_2^{\,2} - 0{,}1\,\Delta l_2 - 0{,}1 = 0$

aminek megoldása $\Delta l_2 \approx 15{,}2$ cm.

6/12. Írjuk fel a mozgásegyenletét a két rugóval kifeszített m = 3 g tömegű testnek, ha csak az AB egyenes mentén történő mozgásokra szorítkozunk! A két rugó rugóállandója $k_1 = 0{,}1$ N/m ill. 0,2 N/m, nyugalmi hosszaik $\ell_{01} = 10$ cm ill. $\ell_{02} = 12$ cm, az AB távolság 25 cm. Adjuk meg a mozgásegyenlet általános megoldását! Milyen mozgásnak felel ez meg?



MO. $ma = m\ddot{x} = F_1 + F_2$,

ahol F_1 és F_2 a két rugó által kifejtett erő:

$F_1 = -\,k_1\,\Delta\ell_1$, $F_2 = +\,k_2\,\Delta\ell_2$;

$\Delta\ell_1 = \ell_1 - \ell_{01} = x - \ell_{01}$, $\Delta\ell_2 = \ell_2 - \ell_{02} = (L-x) - \ell_{02}$;

tehát a mozgásegyenlet

$m\ddot{x} = -\,k_1\,(x - \ell_{01}) + k_2\,(L-x - \ell_{02})$ (1)

azaz $m\ddot{x} = -\,(k_1+k_2)\,x + [k_1\ell_{01}+k_2(L- \ell_{02})]$.

A mozgásegyenletben a $[k_1\ell_{01}+k_2(L- \ell_{02})]$ tag azért jelenik meg, mert a rugók rögzítési pontja közötti távolság nagyobb, mint a két rugó nyugalmi hosszának összege.

Az x_e egyensúlyi helyzetben az eredő erő zérus:

$$F_{1e} + F_{2e} = -\,k_1\,(x_e - \ell_{01}) + k_2\,(L-x_e - \ell_{02}) = m\ddot{x}_e = 0 \qquad (2)$$

Vonjuk ki (2)-t az (1)-ből, azaz írjuk most úgy fel a mozgásegyenletet, hogy a testre ható erők aktuális értékének az egyensúlyi helyzetben ható erőktől való eltérését tekintjük:

$m\ddot{x} - m\ddot{x}_e = (F_1 - F_{1e}) + (F_2 - F_{2e}) =$

$= [-k_1(x-\ell_{01}) + k_2(L-x-\ell_{02})] - [-k_1(x_e-\ell_{01}) + k_2(L-x_e-\ell_{02})] = -k_1(x-x_e) - k_2(x-x_e)$.

Vezessük be új változónak az x_e-től való eltérést: $y = x - x_e$,

ezzel a mozgásegyenlet $m\ddot{y} = -(k_1+k_2)\,y$.

A test tehát az x_e egyensúlyi helyzet körül harmonikus rezgőmozgást végez.

(2)-ből $x_e = (k_1\ell_{01}+k_2L-k_2\ell_{02})/(k_1+k_2) = 12$ cm .

A rezgőmozgás periódusideje $T = 2\pi\sqrt{m/(k_1+k_2)} = 0{,}2\pi \approx 0{,}63$ s

(az amplitúdója és fázisállandója pedig a kezdeti feltételektől függ)

6/13. Függőlegesen felhajítunk egy követ, és az 2 s múlva esik vissza. A kőre a közegellenállás miatt $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$ fékező erő hat. A kő tömege m = 0,2 kg, b = 0,1 kg/s.

a) Írjuk fel a kő mozgásegyenletét!

b) Mennyi volt a kezdősebesség?

c) Mennyi az emelkedési és esési idő?

d) Milyen magasra emelkedett a kő?

e) Mekkora sebességgel érkezett vissza a földre?

MO.

a) $ma = m\frac{dv}{dt} = -mg - bv$ (a z tengely felfelé mutat)

Behelyettesítve m és b értékét: $a = \frac{dv}{dt} = -10 - 0{,}5v$ (v m/s-ban értendő)

b) A kezdősebességet úgy tudjuk meghatározni, hogy két integrálással meghatározzuk a z(t) függvényt, amiben a v_0 kezdősebesség paraméterként szerepel, majd a z(2) = z(0) feltételből kiszámoljuk v_0-t. Tehát: szeparáljuk és integráljuk a mozgásegyenletet:

$$-\frac{1}{mg+bv}dv = -\frac{1}{b}\frac{1}{\frac{mg}{b}+v}dv = \frac{1}{m}dt$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{1}{\frac{mg}{b}+v'}dv' = -\frac{b}{m}\int_0^t dt' \quad \rightarrow \quad \left[\ln\left(\frac{mg}{b}+v'\right)\right]_{v_0}^{v} = -\frac{b}{m}[t']_0^t$$

$$ln\frac{\frac{mg}{b}+v}{\frac{mg}{b}+v_0} = -\frac{b}{m}t \quad \rightarrow \quad v = \left(\frac{mg}{b}+v_0\right)\cdot e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b} = \frac{dz}{dt}$$

majd integráljuk a v(t) függvényt:

$$\int_0^z dz' = z = \int_0^t\left\{\left(\frac{mg}{b}+v_0\right)\cdot e^{-\frac{b}{m}t'} - \frac{mg}{b}\right\}dt' = \left(\frac{mg}{b}+v_0\right)\left[-\frac{m}{b}e^{-\frac{b}{m}t'}\right]_0^t - \frac{mg}{b}[t']_0^t$$

$$z = \frac{m}{b}\left(\frac{mg}{b}+v_0\right)\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right) - \frac{mg}{b}t$$

m és b értékét behelyettesítve $z = 2(20+v_0)\left(1-e^{-\frac{t}{2}}\right) - 20t$

A z(2) = z(0) = 0 feltétel: $2(20+v_0)\left(1-e^{-2/2}\right) - 20\cdot 2 = 0$, amiből $v_0 \approx 11{,}64$ m/s.

c) Az emelkedés addig tart, amíg v értéke zérusra csökken, azaz $v(t_{fel}) = 0$:

$$\left(\frac{mg}{b}+v_0\right)\cdot e^{-\frac{b}{m}t_{fel}} - \frac{mg}{b} = 0 \quad \rightarrow \quad t_{fel} = -\frac{m}{b}\,ln\frac{\frac{mg}{b}}{\frac{mg}{b}+v_0} = \frac{m}{b}\ln\left(1+\frac{v_0 b}{mg}\right) \approx 0{,}92 \text{ s , így}$$

az esés ideje $t_{le} = t_{össz} - t_{fel} \approx 1{,}08$ s.

d) A maximális magasságot a t_{fel} időben éri el:

$$z(t_{fel}) = 2(20+11{,}64)\left(1-e^{-\frac{0{,}92}{2}}\right) - 20\cdot 0{,}92 \approx 4{,}9\,m$$

e) Földet éréskor

$$v(2) = \left(\frac{mg}{b}+v_0\right)\cdot e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{mg}{b} = (20+11{,}64)\cdot e^{-2/2} \approx -8{,}36\,m/s$$

(negatív, mert lefelé esik)

6/14. 1400 m magasan álló helikopterből kiesik egy 80 kg-os kezdő ejtőernyős. Az ejtőernyős akkor rántja meg az ernyő nyitózsinórját, amikor eléri a 30 m/s-os sebességet, de az ernyő nem nyílik ki rögtön, csak 1 s múlva (addig egyáltalán nem kezd fékezni). $g = 10\ m/s^2$

a) Mekkorára nő a sebessége és mennyit zuhan ez alatt az 1 s alatt?

b) Írjuk fel az ejtőernyős mozgásegyenletét az ejtőernyő kinyílása előtt ill. után!

Az ernyő fékezőereje az ejtőernyős sebességének négyzetével arányos, az arányossági tényező $c = 200$ kg/m.

c) A fékezőhatás következtében az ejtőernyős sebessége közelít egy határértékhez. Mekkora ez a határsebesség? (azaz a stacionárius sebesség?)

MO.

a) $v = gt$, a 30 m/s-ot 3 s-nál éri el, $v(4) = 40$ m/s nagyságú lesz, és közben
$d = z(4) - z(3) = 10/2 \cdot 4^2 - 10/2 \cdot 3^2 = 35$ m -t zuhan

b) vektorként: $m\mathbf{a} = m\mathbf{g}$ és $m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + cv^2\,\mathbf{k}$
ha felfelé pozitív: $ma = -mg$ és $ma = -mg + cv^2$
ha lefelé pozitív: $ma = mg$ és $ma = mg - cv^2$

c) v_{stac} = áll. → $a = 0$ → $v_{stac}^2 = mg/c$, $v_{stac} = 2$ m/s.

6/15. Egy $m = 80$ kg tömegű síelő $\alpha = 30°$-os, $\mu = 0{,}1$ súrlódási együtthatójú sípályán csúszik le. A síelőre ható közegellenállási erő a sebességének négyzetével arányos, az arányossági tényező $c = 1{,}2$ kg/m, $g = 10\ m/s^2$.

a) Írjuk fel a síelő mozgásegyenletét a lejtővel párhuzamos és arra merőleges komponensekre bontva!

b) Mekkora maximális sebességet érhet el a síelő?

MO.

a) lejtőre merőleges: $F_{ny} - mg\cos\alpha = m\,a_\perp = 0$
lejtővel párhuzamos:
$mg\sin\alpha - F_s - F_k = mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha - cv^2 = m\,a_\parallel = m\,\ddot{s}$, ha s a lejtőn megtett út

b) a maximális sebességnél $a_\parallel = 0$ ⇒ $v = \sqrt{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)mg/c} = 16{,}6$ m/s = 59,8 km/h

6/16. Egy repülőgép $v_0 = 72$ km/h kezdősebességgel ér földet és gurulni kezd. A fékezőerő nagysága
$F(v) = c(v+u)^2$ [N] ,
ahol $u = 10$ m/s és v a pillanatnyi sebesség nagysága m/s-ban,
$c = 1$ kg/m.
A gép tömege $m = 500$ kg.

a) Mennyi idő alatt áll meg a gép?

b) Mekkora utat tesz meg addig?

MO. A mozgásegyenlet

$$m\frac{dv}{dt} = -c(v+u)^2.$$

Szeparáljuk és integráljuk:

$$\int_{v_0}^{v} -(v'+u)^{-2}\,dv' = \frac{c}{m}\int_0^t dt'$$

$$\left[\frac{1}{v'+u}\right]_{v_0}^{v} = \frac{c}{m}[t']_0^t \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{v+u} - \frac{1}{v_0+u} = \frac{c}{m}t, \text{ azaz } \quad v = \frac{m}{c}\frac{1}{t+\frac{m}{c(v_0+u)}} - u = 500\frac{1}{t+\frac{50}{3}} - 10$$

a) v = 0 ha $t = \frac{m}{c}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v_0+u}\right) \approx 33{,}3\ s$

b) A megtett utat megkapjuk a v(t) függvény integrálásával:

$$\int_0^x dx' = \int_0^t \left(\frac{m}{c}\frac{1}{t'+\frac{m}{c(v_0+u)}} - b\right)dt'$$

$$x = \frac{m}{c}ln\left[1 + \frac{k}{m}(v_0+u)t\right] - ut = 500\ ln\left(1 + \frac{30}{500}t\right) - 10\ t$$

a megállásig megtett távolság x(33,3) ≈ 216 m.

VAGY:

a $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$ átalakítással $m\,v\frac{dv}{ds} = -c(v+u)^2,$

ezt szeparálva $\int ds = -\frac{m}{c}\int\frac{v}{(v+u)^2}dv$

és integrálva $s = -\frac{m}{c}\left[\ln(v+u) + \frac{u}{v+u}\right]_{v_0}^{v} = -\frac{m}{c}\left(ln\frac{v+u}{v_0+u} + \frac{u}{v+u} - \frac{u}{v_0+u}\right) = 500\left(ln\frac{30}{v+10} + \frac{10}{30} - \frac{10}{v+10}\right)$

A megállásig (v=0) megtett út s(0) = 500(ln3–2/3) ≈ 216 m.

6/17. h = 6 m mély vízmedence tetején r = 1,5 mm sugarú golyót v_0 = 0 kezdősebességgel elengedünk. A golyóra a nehézségi és a felhajtóerőn kívül még egy 6πηrv nagyságú fékező erő is hat, ahol v a golyó sebessége, η = 1 g/ms. (A golyó sűrűsége ρ = 2 g/cm^3.)

a) Írjuk fel a golyó mozgásegyenletét, és adjuk meg annak általános megoldását!

b) Ábrázoljuk a golyó sebességét és megtett útját az idő függvényében!

c) Mennyi idő alatt és milyen sebességgel ér le a golyó a medence fenekére?

d) Mennyi a golyó átlagsebessége, és hol éri el ezt a sebességet?

e) Oldjuk meg az előző részfeladatokat arra az esetre is, ha v_0 = 10 m/s és függőlegesen lefelé irányul!

MO. a) Felfelé mutató z tengelyt felvéve a mozgásegyenlet

$$m\ddot{z} = -mg + F_{felhajtó} - F_{közegell} = -mg + \rho_{víz}\frac{m}{\varrho_{test}}g - (6\pi\eta r)v$$

Az adatokat behelyettesítve $\ddot{z} = \frac{dv}{dt} = -(v+5)$

Integrálással $ln\frac{v+5}{v_0+5} = -t \quad \rightarrow \quad v = (v_0+5)e^{-t} - 5$

és $z = (v_0+5)(1-e^{-t}) - 5t$

A feladat első részében v_0 = 0, azaz $v = 5e^{-t} - 5$ és $z = 5(1-e^{-t}) - 5t.$

c) Mikor ér le a medence fenekére: a z(t) = –6 egyenlet megoldása (numerikusan!) t ≈ 2,08 s, ekkor a sebessége v(2,08) ≈ –4,4 m/s.

d) Az átlagsebesség $v_{átl}$ = –6/2,08 ≈ –2,88 m/s;

a v(t) = –2,88 egyenlet megoldása t ≈ 0,86 s; ekkor z(0,86) ≈ –1,4 m.

e) Ha a kezdősebesség lefelé mutat, akkor v_0 = –10 m/s (mivel a z tengely felfelé mutat) és a v(t) ill. z(t) függvények $v = -5e^{-t} - 5$ és $z = -5(1-e^{-t}) - 5t$

Így a z(t) = –6 egyenlet megoldása t ≈ 0,7 s (ekkor ér le) és v(0,7) ≈ –7,5 m/s (ekkora sebességgel); $v_{átl}$ ≈ –8,6 m/s, ezt 0,33 s-nál éri el 3,0 m mélységben.

6/18. Vízszintes, súrlódásmentes síkon egy rugó végére m = 1 kg tömegű golyót rögzítettünk. A rugó másik vége rögzítve van. A rugó 20 cm-re való kihúzásához 5 N erőre van szükség.
a) A golyót elengedve mekkora lesz a rezgésidő?
b) Mekkora a golyó sebessége a nyugalmi helyzeten való áthaladáskor?

6/19. m tömegű golyót erősítünk k rugóállandójú rugóra. Az egyik végén rögzített rugó az x tengelyen van, egyensúlyi helyzete legyen az origó. A golyót t=0 időben v_0 kezdősebességgel meglökjük a –x tengely irányába, ezután az harmonikus rezgőmozgást végez.
a) Határozzuk meg és ábrázoljuk x-et az idő függvényében!
b) Határozzuk meg a gyorsulás átlagértékét az első félperiódusban!
c) Milyen összefüggés van a gyorsulás és x között? Ebből határozzuk meg az x kitérés átlagértékét az első félperiódusban!

6/20. A vonat egy mozdonyból és három kocsiból áll, mindegyik rész tömege m = 1 t. A vonatot fékezi egyrészt a súrlódási erő, másrészt a vonat sebességével arányos közegellenállási erő. A szerelvény állandó v_0 = 72 km/h-ás sebességgel halad, ekkor a mozdony F_1 = 440 N húzóerőt fejt ki. A vonatról menet közben lekapcsolják az utolsó kocsit. Az elülső rész továbbra is v_0 = 72 km/h-ás sebességgel halad tovább, de most a mozdony húzóereje csak F_2 = 340 N.
Írjuk fel a mozgásegyenletet!
Mennyi idő múlva áll meg a lekapcsolt kocsi?
(A b közegellenállási együttható csak a menetirányba eső felület nagyságától és alakjától függ, a kocsik számától, stb. nem.)