Az **F** erő által végzett <u>munka</u>, ha a test adott pályán mozog az $\mathbf{r_1}$ helyvektorú P_1 pontból az $\mathbf{r_2}$ helyvektorú P_2 pontba, az alábbi vonalintegrállal számolható:

$$W_{P_1P_2} = \int_{\boldsymbol{r_1}}^{\boldsymbol{r_2}} dW = \int_{\boldsymbol{r_1}}^{\boldsymbol{r_2}} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dr}$$ [az előadáson a jelölése $W_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{ds}$]

Általános esetben az erő függ a helytől: $\boldsymbol{F(r)} = F_x(x,y,z)\,\boldsymbol{i} + F_y(x,y,z)\,\boldsymbol{j} + F_z(x,y,z)\,\boldsymbol{k}$,

és a pálya, amin a test mozog: $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} \;\rightarrow\; \boldsymbol{dr} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}$,

ezekkel $W_{P_1P_2} = \int_{\boldsymbol{r_1}}^{\boldsymbol{r_2}} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dr} = \int_{\boldsymbol{r_1}}^{\boldsymbol{r_2}}\{F_x(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)\,dz\}$.

Ez így csak akkor számolható ki, ha a pálya párhuzamos valamelyik koordinátatengellyel, azaz dx, dy, dz közül csak egy nem zérus.

Általános esetben a pályát t-vel (az idővel) paraméterezve adjuk meg:

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k} \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{dr} = \left[\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}\right]dt\,,$$

és az erőt is t-vel paraméterezve fejezzük ki:

$$\boldsymbol{F(r)} = F_x(x(t),y(t),z(t))\,\mathbf{i} + F_y(x(t),y(t),z(t))\,\mathbf{j} + F_z(x(t),y(t),z(t))\,\mathbf{k}$$

ezekkel $W_{P_1P_2} = \int_{t_1}^{t_2}\left\{F_x(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt} + F_y(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt} + F_z(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}\right\}dt$.

<u>Konzervatív</u> az $\boldsymbol{F(r)}$ erő akkor, ha $\boldsymbol{rot\,F} = \boldsymbol{0}$. Ekkor

- két pont között a munka független a választott úttól (azaz zárt görbére a munka zérus);
- létezik olyan $E_{pot}(\mathbf{r})$ <u>potenciális energia</u> függvény, hogy $\boldsymbol{F(r)} = -\boldsymbol{grad}\,E_{pot}(\boldsymbol{r})$, ilyenkor

az **F** erő által végzett munka az A kiindulási és a B végpont potenciáljának különbségeként számolható:

$W_{AB} = -\Delta E_{pot} = -[E_{pot}(B) - E_{pot}(A)] = E_{pot}(A) - E_{pot}(B)$.

A munka előjelet vált, ha az ellentétes irányba megyünk az adott görbén.

A fentiek szerint kiszámolt munka az a munka, amit az adott erő végez a testen; az általunk az erő ellenében végzendő munka ennek ellentettje.

rot F kiszámolása: $\boldsymbol{rot\,F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$

Az erő meghatározása a potenciális energia függvényből:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{grad}\,E_{pot} = -\left(\frac{\partial E_{pot}}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

A potenciális energia függvény meghatározása az erőből: $E_{pot}(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r_0}}^{r}\boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{r}})\cdot\boldsymbol{d\tilde{r}}$,

pl. ha a koordinátatengelyekkel párhuzamosan megyünk és $E_{pot}(0,0,0) = 0$, akkor

$$E_{pot} = -\left\{\int_{0,0,0}^{x,0,0} F_x\,dx + \int_{x,0,0}^{x,y,0} F_y\,dy + \int_{x,y,0}^{x,y,z} F_z\,dz\right\}\;;$$

de a konkrét számolások alapja sokszor inkább az **F** = –**grad** E_{pot} (ld. a feladatokat, pl. 7/2.2A).

F(**r**) helyett használatos az **E**(**r**) térerősség (egységnyi tömegű testre ható erő): **E**(**r**) = **F**(**r**) / m [N/kg] ,

az ehhez tartozó potenciálfüggvény U(**r**) = E_{pot} (**r**)/ m [J/kg] ; **E**(**r**) = –**grad** U(**r**) .

7/1. Határozzuk meg az m tömegű anyagi pontra ható **F** = (Ax+B) **i** + Cz^2 **j** + (Dx+E) **k** [N] erő munkáját, ha a test

a) a P_0 (0,0,1) pontból a P_1 (0,2,1) pontba megy az y tengellyel párhuzamosan;
b) a P_2 (2,0,1) pontból a P_0 (0,0,1) pontba megy az x tengellyel párhuzamosan;
c) a P_2 (2,0,1) pontból a P_1 (0,2,1) pontba megy a két pontot összekötő egyenes mentén!
Hasonlítsuk össze az **a)** és **b)** feladatban kapott munka összegét a **c)** feladatéval!
d) Konzervatív-e a fenti erőtér?
e) Határozzuk meg az **F** erő által végzett munkát az x-z síkban fekvő R sugarú, origó középpontú körön végzett teljes körülfordulásra!
f) Határozzuk meg az **F** erő által végzett munkát az x-y síkban fekvő R sugarú, origó középpontú körön végzett teljes körülfordulásra!

MO.

a) Mivel az y tengellyel párhuzamosan megyünk, ezért dx = dz = 0:

$$W_{P_0P_1} = \int_{(0,0,1)}^{(0,2,1)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(0,0,1)}^{(0,2,1)} F_y\, dy = \int_{(0,0,1)}^{(0,2,1)} Cz^2\, dy = \int_0^2 C\cdot 1^2\, dy = C\cdot\int_0^2 dy = C\cdot[y]_0^2 = 2C\,.$$

b) Most az x tengellyel párhuzamosan megyünk, ezért dy = dz = 0, tehát

$$W_{P_2P_1} = \int_{(2,0,1)}^{(0,0,1)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(2,0,1)}^{(0,0,1)} F_x\, dx = \int_2^0 (Ax+B)\, dx = \left[A\frac{x^2}{2}+Bx\right]_2^0 = -A\frac{2^2}{2}-2B = -2A-2B.$$

c) Írjuk fel az egyenes egyenletét t-vel paraméterezve, úgy, hogy t_0 = 0-ban legyen a test a P_2 pontban és t_2 = 1 –ben legyen a test a P_1 pontban (így könnyű lesz az integrálási határokat behelyettesíteni a végén).
Az $\mathbf{r}(t)$ komponensei tehát $x = 2(1-t),\ y = 2t,\ z = 1,$ amiből $\frac{dx}{dt} = -2,\ \frac{dy}{dt} = 2\,,\ \frac{dz}{dt} = 0\,;$

a $\mathbf{dr}$ komponensei $dx = -2\,dt,\ dy = 2\,dt,\ dz = 0;$ és $t\!:\ 0 \to 1.$

$$W_{P_2P_1} = \int_{(2,0,1)}^{(0,2,1)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(2,0,1)}^{(0,2,1)} \left(F_x\big(x(t),y(t),z(t)\big)\frac{dx}{dt} + F_y\big(x(t),y(t),z(t)\big)\frac{dy}{dt} + 0\right) dt =$$

$$= \int_{(2,0,1)}^{(0,2,1)} \{(Ax+B)\cdot(-2) + Cz^2\cdot 2\}\, dt = \int_0^1 \{\big(A\big(2(1-t)\big)+B\big)\cdot(-2) + C\cdot 1^2\cdot 2\}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \big(-A\cdot 2^2 + A\cdot 2^2 t - B\cdot 2 + 2C\cdot\big)\, dt = \cdots = -2A-2B+2C\,,$$

vagyis ugyanannyi a munka a P_2 és P_1 pontok között, akár egyenes úton megyünk, akár a P_0 ponton keresztül a koordinátatengelyekkel párhuzamosan.

d) $$\boldsymbol{rot\,F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Ax+B & Cz^2 & Dx+E \end{vmatrix} = -2Cz\,\boldsymbol{i} - D\boldsymbol{j}$$, tehát nem konzervatív az erőtér.

Megjegyzés: az xy síkban azért nézett ki konzervatívnak, mert ***rot F*** -nek a **k** komponense zérus és eddig az x-y síkban fekvő pályákkal számoltunk, aminek a vektora: **dA** = dA **k** , így $\boldsymbol{rot\,F}\cdot d\boldsymbol{A} = 0$, és a Stokes-tétel szerint $\int \boldsymbol{rot\,F}\cdot d\boldsymbol{A} = \oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ → zérus a vonalintegrál értéke zárt görbére.

e) Az x-z síkban fekvő R sugarú (origó középpontú) kör paraméteres alakja t-vel paraméterezve, $t\!:\ 0 \to 2\pi$ választással

az $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ komponensei $x = R\cos t,\quad y = 0,\quad z = R\sin t$

→ $\frac{dx}{dt} = -R\sin t,\ \frac{dy}{dt} = 0\,,\ \frac{dz}{dt} = R\cos t\,;$

a $\mathbf{dr}$ komponensei $dx = -R\sin t\, dt\,,\ dy = 0\,,\ dz = R\cos t\, dt\,;$

$$W = \int_0^{2\pi} \{(A\cdot R\cos t + B)\cdot(-R\sin t) + (C(R\sin t)^2)\cdot(0) + (D\cdot R\cos t + E)\cdot(R\cos t)\}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \{-A\cdot R^2 \sin t\cdot\cos t - B\cdot R\sin t + D\cdot R^2\cos^2 t + E\cdot R\cos t\} dt =$$

$$= \left[\frac{A\cdot R^2}{4}\cos 2t + B\cdot R\cos t + D\cdot R^2\left(\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}\right) + E\cdot R\sin t\right]_0^{2\pi} = \left[D\cdot R^2\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = D\cdot R^2\pi$$

VAGY: $W = \oint \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = \int \boldsymbol{rot\,F} \cdot \boldsymbol{dA}$ felhasználásával:

kiszámoltuk, hogy $\boldsymbol{rot\,F} = -2Cz\,\boldsymbol{i} - D\boldsymbol{j}$

és mivel a kör az x-z síkban fekszik, aminek a normálvektora **j**, ezért $\boldsymbol{dA} = dA\,\boldsymbol{j}$

tehát $W = \int \boldsymbol{rot\,F} \cdot \boldsymbol{dA} = \int (-D)\,dA = -D \int dA = (-D) \cdot R^2\pi$

mivel az R sugarú kör területe $R^2\pi$, azaz $\int dA = R^2\pi$.

(A munka előjele a körüljárási iránytól függ.)

f) Az x-y síkban fekvő R sugarú (origó középpontú) kör paraméteres alakja t: $0 \to 2\pi$ választással:

az $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ komponensei $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = 0$ $\rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = -R\sin t$, $\frac{dy}{dt} = R\cos t$, $\frac{dz}{dt} = 0$;

a $\mathbf{dr}$ komponensei $dx = -R\sin t\,dt$, $dy = R\cos t\,dt$, $dz = 0$;

$$W = \int_0^{2\pi} \{(A{\cdot}R\cos t + B) \cdot (-R\sin t) + (C \cdot 0^2) \cdot (R\cos t) + (D{\cdot}R\cos t + E) \cdot (0)\}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \{-A{\cdot}R^2 \sin t \cdot \cos t - B{\cdot}R\sin t\}\,dt = \int_0^{2\pi} \left\{-\frac{1}{2}A{\cdot}R^2 \sin 2t - B{\cdot}R\sin t\right\} dt =$$

$$= \left[\frac{A{\cdot}R^2}{4}\cos 2t + B{\cdot}R\cos t\right]_0^{2\pi} = 0 \, .$$

7/2. Adott a következő erőtér (egységnyi tömegű testre ható erő):

$\mathbf{E} = -2(xy+z)\,\mathbf{i} - x^2\,\mathbf{j} - (2x+5)\,\mathbf{k}$ [N/kg]

Mekkora munkát végez egy m = 5 kg tömegű testen az erőtér, miközben a test az $\mathbf{r}(t) = (t+2)\,\mathbf{i} - 3t\,\mathbf{j} + (t^2+1)\,\mathbf{k}$ görbe mentén a $P_0(2,0,1)$ pontból a $P_1(1,3,2)$ pontba mozog?

MO.

1.) Behelyettesítéssel látható, hogy P_0-ban $t_0 = 0$, P_1-ben $t_1 = -1$, tehát az integrálási határok: t: 0 → –1.

$x(t) = t+2$, $y(t) = -3t$, $z(t) = t^2+1$ $\rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = -3$, $\frac{dz}{dt} = 2t$ $\rightarrow$ $\mathbf{dr} = (\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}\,)\,dt$.

Mivel most a térerősség van megadva ($\mathbf{E} = \mathbf{F} / m$), ezért $W = m \cdot \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dr}$ **:**

$$W = m \cdot \int_{r_0}^{r_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr} = m \cdot \int_{t_0}^{t_1} \left\{E_x \cdot \frac{dx}{dt} + E_y \cdot \frac{dy}{dt} + E_z \cdot \frac{dz}{dt}\right\} dt =$$

$$= 5 \cdot \int_0^{-1} \left\{\left[-2\left((t+2)\cdot(-3t) + (t^2+1)\right)\right] \cdot 1 + \left[-(t+2)^2\right] \cdot (-3) + \left[2(t+2)+5\right] \cdot (2t)\right\} dt =$$

$$= 5 \cdot \int_0^{-1} (3t^2 + 6t + 10)\,dt = \ldots = -40\,[J]$$

2.) Más megoldás: konzervatív-e az erőtér?

$$\boldsymbol{rot\,E} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2(xy+z) & -x^2 & -(2x+5) \end{vmatrix} = (0-0)\boldsymbol{i} - \big(-2-(-2)\big)\boldsymbol{j} + \big(-2x-(-2x)\big)\boldsymbol{k} = \mathbf{0}\,,$$

tehát az erőtér konzervatív → létezik potenciálfüggvény

→ (2.A): előállítjuk az $E_{pot}(\mathbf{r})$ függvényt és abból számoljuk ki a munkát: $W = -\Delta E_{pot} = E_{pot}(P_0) - E_{pot}(P_1)$;

→ a munka tetszőleges úton számolva ugyanannyi

→ (2.B): egyszerűbb utat választunk az integráláshoz.

2.A) $E_{pot}(\mathbf{r})$ meghatározása: tudjuk, hogy $\mathbf{F} = -\mathbf{grad}\, E_{pot}$, de mivel most $\mathbf{F}$ helyett $\mathbf{E} = \mathbf{F}/m$ van megadva, ha ezzel számolunk, akkor az egységnyi tömegre vonatkozó potenciális energiát kapjuk meg, jelöljük ezt U-val: $U = E_{pot}/m$, és $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\, U$.

Descartes-komponensekkel $\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}$, $-\mathbf{grad}\, U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}\right)$;

a megfelelő komponenseknek egyenlőknek kell lenni, vagyis

$\partial U/\partial x = -E_x$, $\partial U/\partial y = -E_y$, $\partial U/\partial z = -E_z$, azaz ismerjük az $U(\mathbf{r})$ függvény parciális deriváltjait.

$\partial U/\partial x = -E_x = 2(xy+z) \Rightarrow U = \int 2(xy+z)dx = x^2y + 2xz + K_1(y,z)$;

itt K_1 olyan „konstans", ami x-től nem függ, de függhet y-tól és z-től, ezért jelöli $K_1(y,z)$.

Ennek y szerinti deriváltja $\partial U/\partial y = x^2 + \partial K_1(y,z)/\partial y$;

másrészt $\partial U/\partial y = -E_y = x^2 \Rightarrow \partial K_1(y,z)/\partial y = 0$, a konstans tehát független y-tól, de függhet z-től:

$\Rightarrow U = x^2y + 2xz + K_2(z)$.

Ennek z szerinti deriváltja $\partial U/\partial z = 2x + \partial K_2(z)/\partial z$,

másrészt $\partial U/\partial z = -E_z = 2x + 5 \Rightarrow \partial K_2(z)/\partial z = 5 \Rightarrow K_2 = 5z \Rightarrow U = x^2y + 2xz + 5z + K$.

A K konstans értékét válasszuk 0-nak (így $E_{pot} = 0$ az origóban).

Tehát a potenciálfüggvény egységnyi tömegre $U = x^2y + 2xz + 5z$ [J/kg].

Megjegyzés: gyorsabban is összerakhatjuk az U függvényt:

$\partial U/\partial x = -E_x = 2(xy+z) \Rightarrow U = \int 2(xy+z)dx = x^2y + 2xz + k_1(y,z)$

$\partial U/\partial y = -E_y = x^2 \Rightarrow U = \int x^2\, dy = x^2y + k_2(x,z)$

$\partial U/\partial z = -E_z = 2x+5 \Rightarrow U = \int (2x+5)dz = 2xz + 5z + k_3(x,y)$

Gyűjtsük össze a tagokat, de mindegyiket csak egyszer írjuk ki: $U(\mathbf{r}) = x^2y + 2xz + 5z$.

Az erőtér által végzett munka a kezdő- és a végpont potenciáljának a különbsége:

$W/m = -\Delta U = -[U(P_1) - U(P_0)] = U(P_0) - U(P_1)$.

A P_0 (2,0,1) pontban $x_0=2$, $y_0=0$, $z_0=1 \rightarrow U(P_0) = 2^2\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot 1 + 5\cdot 1 = 9$ J/kg;

a P_1 (1,3,2) pontban $x_1=1$, $y_1=3$, $z_1=2 \rightarrow U(P_1) = 1^2\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 2 + 5\cdot 2 = 17$ J/kg;

$W/m = U(2,0,1) - U(1,3,2) = 9 - 17 = -8$ J/kg,

tehát az m = 5 kg tömegű testen az erőtér által végzett munka $W = 5\cdot(-8) = -40$ J.

2.B) Mivel az erőtér konzervatív, választhatunk más, a megadottnál egyszerűbb utat is a P_0 és P_1 pontok között (mivel ekkor a munka csak a kezdő- és végpontoktól függ).

Válasszuk azt az utat, amikor rendre az x,y,z tengelyek mentén megyünk:

$$P_0(2,0,1) \xrightarrow{x} (1,0,1) \xrightarrow{y} (1,3,1) \xrightarrow{z} P_1(1,3,2)$$

Amikor az x tengely mentén megyünk, behelyettesítjük E_x -be y és z értékét (y=0 , z=1) és x: 2 → 1 ;

amikor az y tengely mentén megyünk, behelyettesítjük E_y -ba x és z értékét (x=1 lett, z=1) és y: 0 → 3;

amikor a z tengely mentén megyünk, behelyettesítjük E_z -be x és y értékét (x=1 , y=3 lett) és z: 1 → 2.

$$W = m\cdot\int_{P_0}^{P_1}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = 5\cdot\left\{\int_{(2,0,1)}^{(1,0,1)} -2(xy+z)\,dx + \int_{(1,0,1)}^{(1,3,1)} -x^2dy + \int_{(1,3,1)}^{(1,3,2)} -(2x+5)\,dz\right\} =$$

$$= 5\cdot\left\{\int_2^1 -2(x\cdot 0+1)dx + \int_0^3 -1^2\,dy + \int_1^2 -(2\cdot 1+5)dz\right\} = \ldots = -40\ [J].$$

7/3. Egy erőhöz tartozó potenciális energiát az alábbi függvény adja meg:

$E_{pot} = 2xy^2 + 16 - 3xz$

a) Adjuk meg a potenciális energiához tartozó erőt!

b) Mekkora munkát végez a fenti erő, ha a test a $P_0(1,-2,3)$ pontból a $P_1(-4,5,-6)$ pontba mozog a pontokat összekötő egyenes mentén?

c) Mekkora erő hat a testre a P_0 kezdőpontban?

MO.

a) $\mathbf{F} = -\,\mathbf{grad}\, E_{pot} = -\left((2y^2-3z)\,\mathbf{i} + 4xy\,\mathbf{j} - 3x\,\mathbf{k} \right) = (-2y^2+3z)\,\mathbf{i} - 4xy\,\mathbf{j} + 3x\,\mathbf{k}$

b) A potenciális energiából

$W = -\Delta E_{pot} = E_{pot}(P_0) - E_{pot}(P_1) = [2\cdot1\cdot(-2)^2 + 16 - 3\cdot1\cdot3] - [2\cdot(-4)\cdot5^2 + 16 - 3\cdot(-4)\cdot(-6)] = [15] - [-256] = 271$ J .

Persze kiszámolhatjuk a munkát vonalintegrállal is:

$$W = \int_{(1,-2,3)}^{(-4,-2,3)} F_x\, dx + \int_{(-4,-2,3)}^{(-4,5,3)} F_y\, dy + \int_{(-4,5,3)}^{(-4,5,-6)} F_z\, dz =$$

$$= \int_1^{-4} (3\cdot3 - 2\cdot(-2)^2)\, dx + \int_2^5 (-4\cdot(-4)y)\, dy + \int_3^{-6} \big(3\cdot(-4)\big) dz =$$

$$= \int_1^{-4} 1\, dx + \int_2^5 16y\, dy + \int_3^{-6} -12\, dz = [x]_1^{-4} + [8y^2]_2^5 + [-12z]_3^{-6} = 271 \text{ J} .$$

c) $\mathbf{F}(P_0) = (-2\cdot(-2)^2+3\cdot3)\,\mathbf{i} - 4\cdot1\cdot(-2)\,\mathbf{j} + 3\cdot1\,\mathbf{k} = 1\,\mathbf{i} + 8\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$,

ennek nagysága (Pitagorasz-tétellel) $F(P_0) = \sqrt{74} \approx 8{,}602$ N .

Gyakorló feladatok a zárthelyire

7/4. Határozzuk meg az $\mathbf{E} = 2(x+4)\,\mathbf{i} - 3z^2\,\mathbf{j} + 2x^2\,\mathbf{k}$ [N/kg] erőtér által egy m = 2 kg tömegű testen végzett munkát, ha a test

a) a $P_1(3,-1,2)$ [m] és a $P_2(3,1,2)$ [m] pontok között mozog egyenes pályán!

b) a $P_3(0,0,0)$ [m] és a $P_4(-5,4,3)$ [m] pontok között mozog rendre az x,y,z tengelyekkel párhuzamosan!

MO.

a) A mozgás itt csak az y tengellyel párhuzamosan történik, így dx = dz = 0.

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = m\cdot\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dr} = 2\cdot\int_{(3,-1,2)}^{(3,1,2)} \left\{2(x+4)dx - 3z^2dy + 2x^2dz\right\} = 2\cdot\int_{-1}^{1} -3\cdot2^2dy = \ldots = -48\ J\ .$$

b)

$$W = \int_{P_3}^{P_4} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = m\cdot\int_{(0,0,0)}^{(-5,4,3)} \mathbf{E}\cdot\mathbf{dr} = 2\cdot\left\{\int_{(0,0,0)}^{(-5,0,0)} 2(x+4)dx + \int_{(-5,0,0)}^{(-5,4,0)} -3z^2dy + \int_{(-5,4,0)}^{(-5,4,3)} 2x^2dz\right\} =$$

$$= 2\cdot\left\{\int_0^{-5} 2(x+4)dx + \int_0^4 -3\cdot0^2dy + \int_0^3 2\cdot(-5)^2dz\right\} = 2\{-15+0+150\} = 270\ J\ .$$

7/5. Adott a térerősség a következő alakban:

$\mathbf{E} = (3x+2xz)\,\mathbf{i} + (2y^2+5xz)\,\mathbf{j} + 5xy\,\mathbf{k}$ [N/kg] .

a) Állapítsuk meg, létezik-e potenciál, és ha igen, adjuk meg!

b) Mekkora munkát végez az erőtér, ha egy m = 2 kg tömegű test mozog egy egyenes mentén a $P_1\,(1,2,-1)$ [m] pontból a $P_2\,(-1,2,0)$ [m] pontba?

MO.

a)
$$\mathbf{rot\,E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x+2xz & 2y^2+5xz & 5xy \end{vmatrix} = (5x-5x)\mathbf{i} - (5y-2x)\mathbf{j} + (5z-0)\mathbf{k} = (2x-5y)\mathbf{j} + 5z\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

tehát nem létezik potenciál.

b) A P_0-ból P_1-be mutató egyenes egyenlete t-vel paraméterezve, P_0-nál t=0, P_1-nél t=1 választással:

$\mathbf{r}(t) = (-2t+1)\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + (t-1)\,\mathbf{k} \quad \rightarrow \qquad d\mathbf{r} = (-2\,\mathbf{i} + \mathbf{k})\,dt$.

$$W = m \cdot \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = m \cdot \int_{t_0}^{t_1} \left\{ E_x \cdot \frac{dx}{dt} + E_y \cdot \frac{dy}{dt} + E_z \cdot \frac{dz}{dt} \right\} dt =$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \left\{ [3 \cdot (-2t+1) + 2 \cdot (-2t+1) \cdot (t-1)] \cdot (-2) + [2 \cdot 2^2 + 5(-2t+1) \cdot (t-1)] \cdot 0 + [5(-2t+1) \cdot 2] \cdot 1 \right\} dt =$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \left\{ 8t^2 - 20t + 8 \right\} dt = \ldots = \frac{4}{3} \text{J} .$$

7/6. Határozzuk meg az $\mathbf{F} = [\,(2x+z) \cdot \ln(y)\,]\,\mathbf{i} + [\,(x^2+xz)\,/\,y\,]\,\mathbf{j} + [\,x \cdot \ln(y)\,]\,\mathbf{k}$ erő által végzett munkát, miközben a test az $\mathbf{r} = (5-2t)\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j} - 4t\,\mathbf{k}$ egyenes mentén a $P_0\,(7,3,4)$ pontból a $P_1\,(5,3,0)$ pontba jut! (Az erő N-ban, az **r** m-ben értendő.)
Konzervatív az erőtér?

MO.

$d\mathbf{r} = (-2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{k})\,dt$

az integrálási határok (behelyettesítéssel): P_0 -ban $t_0 = -1$, P_1 -ben $t_1 = 0$

$W = \int_{t_0}^{t_1} \left[F_x \cdot \frac{dx}{dt} + F_z \cdot \frac{dz}{dt} \right] dt$ mert *dy=0*

$W = \int_{-1}^{0} [(2(5-2t) - 4t) \cdot ln3 \cdot (-2) + (5-2t) \cdot ln3 \cdot (-4)]\,dt = \ldots = -52 \cdot ln3 \approx -57{,}1$ J

Konzervatív, ha **rot F** = … = 0

rot F = (x/y–x/y) **i** – (ln(y)–ln(y)) **j** + ((2x+z)/y–(2x+z)/y) **k** = **0**

tehát konzervatív az erőtér →

eszerint az **a)** feladatot számolhatjuk máshogy is, mehetünk pl. a tengelyekkel párhuzamosan:

$W = \int_{(7,3,4)}^{(5,3,4)} F_x dx + \int_{(5,3,4)}^{(5,3,0)} F_z dz = \int_{(7,3,4)}^{(5,3,4)} (2x+4) ln3\,dx + \int_{(5,3,4)}^{(5,3,0)} 5 \cdot ln3\,dz = \ldots = -\,52 \cdot ln3$

vagy előállíthatjuk a potenciálfüggvényt: $U = -(x^2 + xz) \cdot \ln(y)$

és kiszámolhatjuk a munkát a potenciálból: $W = -\Delta U = U(P_0) - U(P_1) = -77 \cdot \ln 3 - (-25 \cdot \ln 3) = -52 \cdot \ln 3$

7/7. Egy $\mathbf{E} = (3-2y)\,\mathbf{i} - 2(x+yz)\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ alakú erőtérben egységnyi tömegű test mozog az $\mathbf{r} = (t^2+1)\,\mathbf{i} + (t-1)\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$ görbe mentén.

a) Konzervatív-e az erőtér?

b) Mekkora munkát végez az erőtér, míg a $P_0\,(2,-2,-2)$ pontból a $P_1\,(2,0,2)$ pontba jut a test?

MO.

a) $\boldsymbol{rot\,E} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3-2y & -2(x+yz) & -y^2 \end{bmatrix} = (-2y+2y)\boldsymbol{i} - (0-0)\boldsymbol{j} + (-2+2)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$

tehát az erőtér konzervatív.

b) A munkát számolhatjuk a potenciálból:

$\partial U/\partial x = -E_x = -(3-2y), \quad \partial U/\partial y = -E_y = 2(x+yz), \quad \partial U/\partial z = -E_z = y^2 \quad \rightarrow$

a potenciál $U = -3x + 2xy + y^2 z$, ezzel

$W = -\Delta E_{pot} = m \cdot (-\Delta U) = 1 \cdot (U(P_0) - U(P_1)) = [-3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) + (-2)^2(-2)] - [-3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 0^2 \cdot 2] = -16$ J .

VAGY: **dr**/dt = 2t **i** + **j** + 2 **k**, és P_0-ban t_0 = –1, P_1-ben t_1 = 1;

$W = \int_{-1}^{1}\left[\left(3-2(t-1)\right)\cdot 2t - 2\left((t^2+1)+(t-1)2t\right)\cdot 1-(t-1)^2\cdot 2\right]\mathrm{dt} =$

$= \int_{-1}^{1}[-12t^2+10t-4]\,\mathrm{dt} = -\,16\,J$.

VAGY: mivel az erőtér konzervatív, a munka számolható más utat választva is, pl. a koordinátatengelyekkel párhuzamosan haladva.

7/8. Mekkora munkát végez az **E** = (y–3) **i** + (x–2z²) **j** – 4 yz **k** erőtér egy m = 1,8 kg tömegű testen, ha a test a P_0(–1,1,2) pontból a P_1(5,1,2) pontba mozog az **r** = (2–3t) **i** + t² **j** + 2 **k** görbe mentén? Konzervatív-e az erőtér?

MO.

$$\boldsymbol{rot\,E} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-3 & x-2z^2 & -4yz \end{bmatrix} = (-4z+4z)\boldsymbol{i} - (0-0)\boldsymbol{j} + (1-1)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$$

tehát az erőtér konzervatív.

A munkát számolhatjuk a potenciálból:

∂U/∂x = $-E_x$ = –(y–3), ∂U/∂y = $-E_y$ = –(x–2z²), ∂U/∂z = $-E_z$ = 4yz →

a potenciál U = 3x – xy + 2yz², ezzel

W/m = U(P_0) – U(P_1) = [3·(–1)–(–1)·1+2·1·2²] – [3·5–5·1+2·1·2²] = –12 J/kg.

VAGY vonalintegrállal: **dr**/dt = –3 **i** + 2t **j** + 0 **k**, és P_0-ban t_0 = 1, P_1-ben t_1 = –1

$\mathrm{W/m} = \int_1^{-1}[(t^2-3)\cdot(-3)+(((2-3t)-2\cdot 2^2)\cdot 2t+0)]\,\mathrm{dt} = -3\int_1^{-1}[3t^2+4t-3]\,\mathrm{dt} = -\,12\ \mathrm{J/kg}$.

VAGY: mivel az erőtér konzervatív, a munka számolható más utat választva is, legegyszerűbben úgy, hogy az x tengellyel párhuzamosan megyünk a P_0-ból a P_1-be:

$\mathrm{W/m} = \int_{(-1,1,2)}^{(5,1,2)}(y-3)\mathrm{dx} = \int_{-1}^{5}(1-3)\mathrm{dx} = -2\int_{-1}^{5}\mathrm{dx} = -2[x]_{-1}^{5} = -12\ \mathrm{J/kg}$.

Az 1,8 kg tömegű testen végzett munka W = –1,8·12 = –21,6 J .

7/9. Egy test az

r(t) = (t–2) **i** – 2t **j** + (2t²–1) **k** [m] görbe mentén mozog

a P_0(0, –4, 7) [m] pontból a P_1(–2, 0, –1) [m] pontba.

Mekkora munkát végez eközben a testen az

F = (2xy+z) **i** + 3xz **j** + (y²–x) **k** [N] erő?

MO.

Ha kiszámoljuk rot**F**-et, látjuk, hogy az nem zérus (**rotF** = (2y–3x)**i**+2**j**+(3z–2x)**k**), tehát a munkát mindenképpen az előírt vonalintegrállal kell kiszámolni.

Behelyettesítéssel látható, hogy P_0-ban t_0 = 2, P_1-ben t_1 = 0,

tehát az integrálási határok: t: 2 → 0.

A **dr** vektor: $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} =-2, \frac{dz}{dt} = 4t,$ tehát **dr** = (**i** –2 **j** + 4t **k**) dt

x(t) = (t–2), y(t) = – 2t, z(t) = (2t²–1) behelyettesítésével

$\mathrm{W} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1}\mathbf{F}\big(\mathrm{x(t),y(t),z(t)}\big)\cdot\mathbf{dr} =$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\left\{\left(2(t-2)(-2t)+(2t^2-1)\right)\cdot 1+\left(3(t-2)(2t^2-1)\right)\cdot(-2)+\left((-2t)^2-(t-2)\right)\cdot 4t\right\}\mathrm{dt} =$$

$$= \int_2^0\{4t^3+18t^2+22t-13\}\,\mathrm{dt} = [t^4+6t^3+11t^2-13t]_2^0 = \mathbf{-82\ J}$$

7/10. Adott a következő erőtér:

$\mathbf{E} = (y-3)\,\mathbf{i} + (x-2z^2)\,\mathbf{j} - 4yz\,\mathbf{k}$ [N/kg]

Mekkora munkát kell végeznünk a fenti erőtér ellen, ha egy egységnyi tömegű testet mozgatunk az $x = 3$ [m] síkban fekvő $y^2 + z^2 = 4$ egyenletű kör mentén pozitív irányban a $P_0(3,2,0)$ [m] pontból a $P_1(3,-2,0)$ [m] pontba?

MO. $m = 1$ kg $\rightarrow$ $\mathbf{F} = m\cdot\mathbf{E} = (y-3)\,\mathbf{i} + (x-2z^2)\,\mathbf{j} - 4yz\,\mathbf{k}$ [N]

$\mathbf{r}(t) = 3\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 2\sin t\,\mathbf{k}$

$d\mathbf{r} = (-2\sin t\,\mathbf{j} + 2\cos t\,\mathbf{k})\,dt$

P_0-ban $t = 0$, P_1-ben $t = \pi$

$$W = \int_0^{\pi} \left[(3 - 2\cdot 4\sin^2 t)(-2\sin t) - (4\cdot 2\cos t\cdot 2\sin t)\cdot(2\cos t)\right]dt = \ldots =$$

$$= \int_0^{\pi} (-38\sin t + 48\sin^3 t)\,dt = \left[38\cos t - \frac{48\cos t\sin^2 t}{3} - \frac{2\cdot 48\cos t}{3}\right]_0^{\pi} = -12\ J$$

$W = -12$ J munkát végezne az erőtér, azaz nekünk 12 J munkát kell végeznünk.

Más megoldás:

rot E = ... = **0**, tehát az erőtér konzervatív.

A potenciál $U = 3x - xy + 2yz^2$ [J/kg],

az erőtér által végzett munka $W/m = -\Delta U = U(P_0) - U(P_1) = -12$ J/kg,

az egységnyi tömegen általunk végzendő munka $W = 12$ J.

Nem zh feladatok

7/11. Keressük meg az alábbi helyzeti energia függvényekhez tartozó erőtereket!

a) $E_{pot} = ax + by + cz$

b) $E_{pot} = A\cdot e^{ax+by+cz}$

c) $E_{pot} = A\cdot z\cdot e^{ax+by}$

d) $E_{pot} = A\,(ax + by + cz)^{-1}$

MO.

a) $\boldsymbol{F} = -\mathbf{grad}\,E_{pot} = -(a\,\boldsymbol{i} + b\,\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k})$

b) $\boldsymbol{F} = -A\,(a\cdot e^{ax+by+cz}\,\boldsymbol{i} + b\cdot e^{ax+by+cz}\,\boldsymbol{j} + c\cdot e^{ax+by+cz}\,\boldsymbol{k}) = -A\cdot e^{ax+by+cz}\,(a\,\boldsymbol{i} + b\,\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k}) = -E_{pot}\,(a\,\boldsymbol{i} + b\,\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k})$

(Bevezetve az $a\,\boldsymbol{i} + b\,\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{v}$ vektort az E_{pot} felírható $E_{pot} = A\cdot e^{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}$ alakban.)

7/12. Keressük meg az alábbi erőterekhez tartozó helyzeti energia függvényt, ha van! (Ha csak bizonyos feltételek teljesülése esetén létezik helyzeti energia, akkor adjuk meg a szükséges feltételeket!)

a) $\mathbf{F} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$

b) $\mathbf{F} = ax\,\mathbf{i} + by\,\mathbf{j} + cz\,\mathbf{k}$

c) $\mathbf{F} = ay\,\mathbf{i} + bx\,\mathbf{j} + cz\,\mathbf{k}$

d) $\mathbf{F} = a\,(x^2 + y^2 + z^2)\,(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$

MO.

a) ***rot F = 0,*** $E_{pot} = -(ax + by + cz)$ (ami felírható rövidebben: $E_{pot} = -\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}$)

b) ***rot F = 0,*** $E_{pot} = -\frac{1}{2}\,(a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2)$

c) $$\boldsymbol{rot\ F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ay & bx & cz \end{vmatrix} = (b - a)\,\boldsymbol{k}$$

vagyis akkor van csak potenciál, ha $b = a$; ekkor $E_{pot} = -(a\,xy + \frac{1}{2}\,c\,z^2)$