

**Munkatétel**

Mindig érvényes (akkor is, ha a testre hatnak nem konzervatív erők – súrlódási, közegellenállási – is).

$$W_{\text{össz}} = \Delta E_{\text{kin}}, \text{ ahol}$$

$W_{\text{össz}}$  a testre ható összes erő által végzett munka összege,

$$\Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin, vég}} - E_{\text{kin, kezdő}}.$$

Nagyon hasznos olyan esetekben, amikor nem érdekes tudni *időben* a test sebességét és helyét (a  $\mathbf{v}(t)$  és  $\mathbf{r}(t)$  függvényeket), hanem elég, ha a test helye és sebességének nagysága között kapunk összefüggést.

**Konzervatív erőterek, potenciális energiák**

| kölcsönhatás                         | erőtörvény  | helyzeti energia függvénye             | hol legyen $E_{\text{pot}} = 0$ ? |
|--------------------------------------|---|--|-----------------------------------|
| gravitációs erő a Föld felszínén     | $\mathbf{F} = -mg \mathbf{k}$                           | $E_{\text{pot}} = mgz$                 | $z = 0$ célszerűen választható    |
| rugóerő (azaz lineáris rugalmas erő) | $\mathbf{F} = -kx \mathbf{i}$                           | $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} kx^2$    | a rugó nyugalmi hosszánál         |
| általános gravitációs erő            | $\mathbf{F} = -\gamma m_1 m_2 / r^2 \cdot \mathbf{e}_r$ | $E_{\text{pot}} = -\gamma m_1 m_2 / r$ | a „végtelen távoli” pontban       |

Munka számolása potenciális energiából:  $W_{AB} = -\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot, kezdő}} - E_{\text{pot, vég}}$

(Ekkora munkát végez az adott erő. Ha mi végezzük a munkát az adott erő ellenében, akkor ennek ellentettjét kell venni.)

Mechanikai energia:  $E_{\text{mech}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$  ( $E_{\text{pot}}$  a megfelelő tagokat tartalmazza)

**Mechanikai energia megmaradás**

Akkor érvényes, ha csak konzervatív erők végeznek munkát a testen, ilyenkor  $E_{\text{mech}}$  a mozgás során állandó.

A súrlódási erő, közegellenállási erő nem konzervatív, hanem disszipatív erő; az általuk végzett munka mindig negatív, ilyenkor a test mechanikai energiája csökken.

**Ütközések**

- Tökéletesen rugalmatlan ütközés: a több testből egy test lesz, aminek a sebessége az impulzus-megmaradást felírva számolható. A mechanikai energia nem marad meg, mivel a két test egybegyűrődésekor az energia egy része deformációs munka végzésére fordítódik.

- Tökéletesen rugalmas ütközés: a több test az ütközés után külön-külön testként mozog, a sebességük meghatározásához az impulzus-megmaradást és a (mozgási) energia megmaradást használjuk fel.

Az impulzus-megmaradást az egyes irányokra külön-külön írjuk fel (a pozitív irányt megválasztva az azzal egyező irányú sebességek pozitívak, az ellentétesek negatívak). Több komponens (pl. szöget bezáró ütközés) esetén az energia-megmaradást nem kell komponensenként írni.

**8/0.** Vízszintes súrlódásmentes síkon 6 N nagyságú vízszintes erővel húzunk egy 2 kg tömegű testet. Mekkora sebességre gyorsul 4 m-es úton, ha 5 m/s-os kezdősebességgel indul?

**MO.**

/a megoldás: A test gyorsulása  $a = F/m = 3 \text{ m/s}^2$ ,  $v_0 = 5 \text{ m/s} \Rightarrow v = v_0 + at = 5 + 3t$  és  $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = 5t + 1,5t^2$ .  
 $s = 4 \text{ m-t } t_1$  idő alatt tesz meg:  $5t_1 + 1,5t_1^2 = 4 \Rightarrow t_1 = 2/3 \text{ s} \Rightarrow v_1 = 5 + 3 \cdot (2/3) = 7 \text{ m/s}$  lesz a sebessége.

/b megoldás: Mivel a sebességre a hely függvényében van szükségünk, nem számoljuk ki az eltelt időt, hanem a  $v(t)$  és  $s(t)$  függvényekből előállítjuk az  $s(v)$  ill.  $v(s)$  összefüggést:

$v = v_0 + at \Rightarrow t = (v - v_0)/a \Rightarrow s = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 \cdot (v - v_0)/a + \frac{1}{2}a[(v - v_0)/a]^2 = \dots = (v^2 - v_0^2)/2a \Rightarrow v = \sqrt{2as + v_0^2}$ ,  
 tehát  $v_1 = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 4 + 5^2} = 7 \text{ m/s}$ .

/c megoldás: Munkatétellel:  $\Delta E_{\text{kin}} = W_{\text{össz}}: \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = ma \cdot s \Rightarrow v_1 = \sqrt{2as + v_0^2} = 7 \text{ m/s}$ .

**8/1.** 10 m magas,  $45^\circ$  hajlásszögű lejtő tetejéről 2 kg tömegű test csúszik le. A lejtőn való mozgás közben a súrlódás elhanyagolható. A lejtő kis görbülettel vízszintes, érdes síkba megy át, amelyen a test súrlódási tényezője  $\mu = 0,2$ . A lejtő lábától milyen messzire jut el a test?

**MO.**

/a megoldás: Kiszámoljuk a test gyorsulását a lejtőn, ill. a vízszintes súrlódásos felületen, majd a  $v = v_0 + at$  ill.  $s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$  képletekből kiszámoljuk a lejtő aljára való megérkezés idejét és sebességét, majd a megállás idejét és távolságát:

A lejtőn  $a_L = g \cdot \sin\alpha$  és  $v_{0L} = 0 \Rightarrow v_L = (g \cdot \sin\alpha) \cdot t \Rightarrow s_L = \frac{1}{2}(g \cdot \sin\alpha) \cdot t^2$ ;

a lejtő hossza  $L = h/\sin\alpha$ , tehát a lejtő alján  $h/\sin\alpha = \frac{1}{2}(g \cdot \sin\alpha) \cdot t_L^2 \Rightarrow t_L = \sqrt{2h/g} / \sin\alpha \Rightarrow v_L = \sqrt{2hg}$ .

A súrlódásos vízszintes síkon  $a_s = -\mu g$  és  $v_{0s} = v_L = \sqrt{2hg} \Rightarrow v_s = \sqrt{2hg} - \mu g \cdot t$ ;

a megállásig eltelt idő  $\sqrt{2hg} - \mu g \cdot t^* = 0 \Rightarrow t^* = \sqrt{2hg} / \mu$ ,

ezzel a megállásig megtett út  $s = \sqrt{2hg} \cdot t^* - \frac{1}{2}\mu g \cdot t^{*2} = 2h/\mu - h/\mu = h/\mu = 10/0,2 = 50 \text{ m}$ .

/b megoldás: Alkalmazhatjuk az előző feladatban levezetett  $v = \sqrt{2as + v_0^2}$  és  $s = (v^2 - v_0^2)/2a$  összefüggéseket:

$v_L = \sqrt{2a_L s + v_0^2} = \sqrt{2 \cdot g \sin\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} + 0} = \sqrt{2gh}$ , és  $s = \frac{0 - v_L^2}{2a_s} = \frac{-v_L^2}{-2\mu g} = \frac{2gh}{2\mu g} = \frac{h}{\mu} = 50 \text{ m}$ .

/c megoldás: Munkatétellel, energia-megmaradással:

a lejtőn a súrlódás elhanyagolható, így számolhatunk energia-megmaradással:

a lejtő aljának magasságát választva a helyzeti energia zérus szintjének

$$mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_L^2 \Rightarrow v_L^2 = 2gh$$

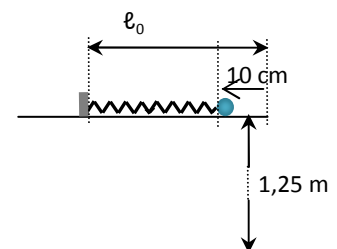
[természetesen munkatétellel is számolhatunk:  $\Delta E_{\text{kin}} = W_{\text{össz}}: \frac{1}{2}mv_L^2 - 0 = (mg \cdot \sin\alpha) \cdot (h/\sin\alpha) = mgh$ ];

a vízszintes síkon való csúszásnál energia-megmaradás nincs, de a munkatételt használhatjuk:

$$\Delta E_{\text{kin}} = W_{\text{össz}}: 0 - \frac{1}{2}mv_L^2 = -\mu mg \cdot s \Rightarrow s = v_L^2 / (2\mu g) = (2gh) / (2\mu g) = h/\mu = 50 \text{ m}$$

**Vegyük észre, hogy a kényszererő (azaz a lejtő, ill. a vízszintes sík felület által kifejtett nyomóerő) által végzett munka mindig zérus, mert az erő merőleges a mozgás irányára!**

**8/2.** Asztallaphoz rögzített rugó nyugalmi állapotban éppen az asztal széléig ér. 10 cm-rel összenyomjuk, majd cérnával összekötjük (megfeszített állapotban). A rugó ilyen megfeszítéséhez 2,5 N erő szükséges. A végéhez egy 10 g-os testet teszünk, majd elégetjük a cérnát. Az asztal 1,25 m magas. Mekkora sebességgel és a vízszinteshez viszonyítva milyen szögben csapódik a padlóra a test? A súrlódást hanyagoljuk el!



**MO.**

A rugóállandó, ha 10 cm-rel való összenyomáshoz  $F = 2,5 \text{ N}$  erő kell:  $k = F / \Delta l = 2,5/0,1 = 25 \text{ N/m}$ .

Mivel a súrlódás elhanyagolható, energia-megmaradással megoldhatjuk a feladatot. Azonban ha a kezdőállapottól a végállapotig egy lépésben írjuk fel az energia-megmaradást, akkor csak a nagyságát kapjuk meg a test sebességének, a komponenseit nem, ezért most külön-külön számolunk a két lépésre.

Az asztalon az összenyomott rugóban tárolt energia  $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 0,1^2 = 0,125 \text{ J}$ .

(A rugó 10 cm-rel való összenyomásához mi  $W = \int_0^{0,1} kx \, dx = \left[ \frac{1}{2}kx^2 \right]_0^{0,1} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 0,1^2 = 0,125 \text{ J}$  munkát végeztünk, avagy a rugó által végzett munka  $-0,125 \text{ J}$  volt.)

A cérna elégetése után ekkora munkát tud végezni a rugó a testen.

A test sebessége az asztal széléhez érve (amikor a rugó a nyugalmi állapotába kerül) a kinetikus energiájából számolható energia-megmaradással:  $\frac{1}{2}kx^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$  (vagy munkatétellel:  $W = \frac{1}{2}kx^2 = \Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 - 0$ ),

amiből a test sebessége  $v = \sqrt{\frac{k}{m}x} = \sqrt{\frac{25}{0,01}} \cdot 0,1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Az asztal szélétől a test mozgása egy  $v_x = 5 \text{ m/s}$  vízszintes kezdősebességű ferde hajítás.

A közegellenállást elhanyagolva a test vízszintes sebessége nem változik; függőlegesen pedig  $h = 1,25 \text{ m}$  magasról indulva gyorsul (zérus függőleges kezdősebességről). Erre energia-megmaradást felírva  $mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_z^2$ ,

tehát földet éréskor a függőleges sebességkomponense  $v_z = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1,25} = 5 \text{ m/s}$  (lefelé).

A test sebessége tehát becsapódáskor  $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = 5\sqrt{2} \approx 7,071 \text{ m/s}$ , a sebességének a vízszintessel bezárt szöge  $\text{arc tg}(v_z/v_x) = \text{arc tg} -1 = -45^\circ$ .

Ha a kiindulástól a végállapotig egyben írjuk fel az energia-megmaradást:

$$\frac{1}{2}kx^2 + mgh + 0 = 0 + 0 + \frac{1}{2}mv^2 \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}x^2 + 2gh} = 5\sqrt{2} \text{ m/s, megkapjuk a sebesség nagyságát.}$$

**8/3.a)** Milyen magasra emelkedik a Hold felszínéről  $v_0$  sebességgel függőlegesen kilőtt test?

**b)** Mennyi legyen  $v_0$ , hogy a test elhagyja a Hold vonzókörét?

A Hold sugara  $R_{\text{Hold}} = 1888 \text{ km}$ , a Hold felszínén a gravitációs gyorsulás  $g_{\text{Hold}} = 1,6 \text{ m/s}^2$ .

**MO.**

**a)** Az általános gravitációs erő konzervatív, a hozzá tartozó potenciális energia

$$E_{\text{pot}} = -\gamma \frac{m \cdot M_{\text{Hold}}}{r}, \text{ ahol } r \text{ a test távolsága a Hold középpontjától.}$$

A test  $v_0$  sebességgel indul a Hold felszínéről, ahol  $r = R_{\text{Hold}}$ , és

addig emelkedik, amíg  $v = 0$  lesz, ott  $r = R_{\text{Hold}} + h$ .

Energia-megmaradást felírva

$$-\gamma \frac{m \cdot M_{\text{Hold}}}{R_{\text{Hold}}} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\gamma \frac{m \cdot M_{\text{Hold}}}{R_{\text{Hold}} + h} + 0 \Rightarrow h = \frac{1}{\frac{1}{R_{\text{Hold}}} - \frac{v_0^2}{2\gamma M_{\text{Hold}}}} - R_{\text{Hold}}$$

A Hold adataival:  $R_{\text{Hold}} = 1888 \text{ km}$  és  $g_{\text{Hold}} = \gamma \frac{M_{\text{Hold}}}{R_{\text{Hold}}^2} = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,

$$\Rightarrow \gamma M_{\text{Hold}} \approx 5,703 \cdot 10^{12} \text{ m}^3 \text{s}^{-2}, \text{ tehát } h = \frac{1}{\frac{1}{1,888 \cdot 10^3} - \frac{v_0^2}{1,141 \cdot 10^{13}}} - 1,888 \cdot 10^3 \text{ [m].}$$

**b)** Mivel a Hold által a testre kifejtett erő  $\mathbf{F} = -\gamma \frac{m \cdot M_{\text{Hold}}}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$  csak végtelen távol csökken zérusra,

ezért ahhoz, hogy a test elhagyja a Hold vonzókörét, az kell, hogy végtelen távolra jusson; az ehhez szükséges kezdősebesség a szökési sebesség (második kozmikus sebesség)  $v_{2\text{koz},\text{Hold}}$ .

Végtelen távolban, azaz  $h \rightarrow \infty$  esetén az  $E_{\text{pot}} = -\gamma \frac{m \cdot M_{\text{Hold}}}{r}$  potenciális energia értéke zérus. És mivel a minimális szökési sebességet akarjuk kiszámolni, ehhez elég, ha a végtelen távolba zérus sebességgel „érkezik meg” a test.

Energia-megmaradást felírva

$$-\gamma \frac{m \cdot M_{\text{Hold}}}{R_{\text{Hold}}} + \frac{1}{2}mv_{2\text{koz},\text{Hold}}^2 = 0 + 0 \Rightarrow v_{2\text{koz},\text{Hold}} = \sqrt{\frac{2\gamma M_{\text{Hold}}}{R_{\text{Hold}}}} = \sqrt{2g_{\text{Hold}}R_{\text{Hold}}} \approx 2,458 \text{ km/s.}$$

**8/4.** Rugalmas ütközés egy egyenes mentén:  $m$  tömegű testet  $u$  sebességgel nekilökünk egy álló  $M$  tömegű testnek. Határozzuk meg a két test ütközés utáni sebességét, és vizsgáljuk meg azokat a speciális eseteket, amikor

- a)  $m = M$ ;
- b)  $m \ll M$ ;
- c)  $m \gg M$ .

**MO.**

Mivel az ütközés tökéletesen rugalmas, a két testből álló rendszer össz-impulzusa és mozgási energiája állandó:

$$mu + M \cdot 0 = mv + MV$$

$$\frac{1}{2} mu^2 + \frac{1}{2} M \cdot 0^2 = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} MV^2.$$

A második egyenletet átrendezve  $m(u^2 - v^2) = m(u - v)(u + v) = MV^2$ ,

az első egyenletet átrendezve  $m(u - v) = MV$ ;

elosztva őket megkapjuk  $V$ -t:  $V = u + v$ ,

$$\text{ezt beírva az első egyenletbe } mu = mv + Mu + Mv \Rightarrow v = \frac{m - M}{m + M} u \text{ és } V = \frac{2m}{m + M} u.$$

Nézzünk meg speciális eseteket:

|    |   |                             |  |
|----|---|-----------------------------|--|
| a) | $m = M$ (a két golyó egyforma tömegű)                                     | $v = 0, V = u$              | sebességet cserélnek   |
| b) | $m \ll M$ (nagy tömegű álló golyónak ütközik elhanyagolható tömegű golyó) | $v \approx -u, V \approx 0$ | a kis golyó visszapattan, a nagy meg se mozdul   |
| c) | $m \gg M$ (elhanyagolható tömegű golyónak ütközik nagy tömegű golyó)      | $v \approx u, V \approx 2u$ | a nagy golyó változatlan sebességgel megy tovább, a kis golyó kétszer akkora sebességgel indul |

**8/5.** A főútra becsatlakozó mellékúton a STOP táblánál várakozó autóba hátulról beleütközik egy másik autó. A két autó tömege megegyezik. Az ütközésnél a két autó összetapad (rugalmatlanul ütközik) és a két autóból álló roncs súrlódva továbbcsúszik: átsúszik a 8 m széles főúton, majd onnan tovább a fűvön. Végül az ütközés helyétől 18 m-re áll meg. A hátulról jövő kocsit 11,4 m-es féknyomot hagyott az ütközés előtt. Mekkora sebességgel haladt, mielőtt fékezni kezdett? A súrlódási együttható az aszfalton 0,4, a fűvön 0,5.

**MO.**

A feladatot munkatétellel oldjuk meg:

[A] a hátsó kocsi  $v_0$  kezdősebességről indul,  $s_1 = 11,4$  m-es úton fékezi a súrlódási erő, ezután a sebessége  $v_1$  lesz;

[B] ezután tökéletesen rugalmatlanul ütközik az álló kocsival, az ütközés utáni közös sebességük  $v_2$ ;

[C] a két kocsiból álló roncs az aszfalton  $s_2 = 8$  m-t fékeződik, ami után a sebessége  $v_3$ ;

[D] majd még a fűvön  $s_3 = 10$  m-t fékeződik, ami után megáll,  $v_4 = 0$ .

A végső állapottól számolunk visszafelé a kiinduló sebességig:

$$[D] \frac{1}{2} (m+m) v_4^2 - \frac{1}{2} (m+m) v_3^2 = -\mu_{fű} (m+m) g \cdot s_3 \Rightarrow v_3^2 = 2\mu_{fű} \cdot g \cdot s_3 \quad (v_3 = 10 \text{ m/s})$$

$$[C] \frac{1}{2} (m+m) v_3^2 - \frac{1}{2} (m+m) v_2^2 = -\mu_{aszfalt} (m+m) g \cdot s_2 \Rightarrow v_2^2 = 2g(\mu_{aszfalt} s_2 + \mu_{fű} s_3), \quad v_2 \approx 12,81 \text{ m/s}$$

$$[B] \text{ az ütközésre az impulzus-megmaradást felírva: } mv_1 = (m+m)v_2 \Rightarrow v_1 = 2v_2 \approx 25,61 \text{ m/s}$$

$$[A] \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu_{aszfalt} mg \cdot s_1 \Rightarrow v_0^2 = 2\mu_{aszfalt} g \cdot s_1 + v_1^2 \quad v_1 \approx 27,33 \text{ m/s} = 98,41 \text{ km/h.}$$

### Gyakorló feladatok zh-ra

**8/6.** Ballisztikus inga:  $\ell$  hosszú fonálon lógó  $M$  tömegű zsákba vízszintes  $u$  sebességgel belelövünk egy  $m$  tömegű testet, ami benne ragad a zsákban (rugalmatlan ütközés), és azzal együtt  $\varphi$  szöggel kilendül. ~~Mekkora volt az  $u$  sebesség?~~ Mekkora maximális szöggel lendül ki?

**MO.** Az ütközés tökéletesen rugalmatlan, tehát össz-impulzusuk állandó:

$$mu = (M+m) v \Rightarrow v = u \cdot m / (M+m)$$

Innen energia-megmaradással az emelkedés magassága

$$\frac{1}{2} (M+m) v^2 = (M+m) gh \Rightarrow h = v^2 / 2g = u^2 \cdot m^2 / [2g(M+m)^2]$$

$$\text{és az ehhez tartozó szög } h = \ell(1 - \cos\varphi) \Rightarrow \cos\varphi = (\ell - h) / \ell = 1 - h / \ell = 1 - u^2 \cdot m^2 / [2g\ell(M+m)^2].$$

**8/7.** A rablók nem bírták kinyitni a páncélszekrényt, ezért magukkal viszik az egészet. Menekülés közben felmásztak vele a 2,3 m magas kerítés tetejére és onnan bedobják a kerítésen kívül várakozó kocsijukba. A páncélszekrényt 12 m/s kezdősebességgel vízszintesen dobják el. Amikor a páncélszekrény beleesik a kocsiba, sebességének függőleges komponensét elnyeli a kocsijukon levő gumimatrac, és a kocsi rajta a páncélszekrényvel elkezd csúszni az aszfalton. A páncélszekrény tömege  $m = 200$  kg, a kocsié  $M = 800$  kg, a súrlódási együttható  $\mu = 0,432$ .

a) Milyen messze csúszik a kocsi a páncélszekrényvel?

b) Mennyi a páncélszekrény + kocsi rendszer mechanikai energiája

- a páncélszekrény eldobásakor,
- a páncélszekrény kocsinhoz érkezésekor,
- a páncélszekrény + kocsi elindulásakor,
- amikor a páncélszekrény + kocsi 0,5 m-t tett meg?

A kocsi vízszintes sík terepen van, az legyen a helyzeti energia zérus szintje.

**MO.**

a) Elhajításkor a páncélszekrény sebességének vízszintes komponense  $v_x = 12$  m/s, ami nem változik a hajítás során, tehát ekkora vízszintes sebességgel éri a kocsit, amivel rugalmatlanul ütközik. A kocsi+páncélszekrény vízszintes sebességgel fog mozogni, az ütközéskor a sebesség függőleges komponense elnyelődik, a vízszintes sebességkomponensre felírhatjuk az impulzus-megmaradást:

$$m_{\text{páncél}} \cdot v_x = (m_{\text{páncél}} + m_{\text{kocsi}}) \cdot u \rightarrow \text{tehát a kocsi a páncélszekrényvel } u = 2,4 \text{ m/s kezdősebességgel indul meg.}$$

Ezt a sebességet elveszíti a súrlódás miatt. Munkatétellel

$$0 - \frac{1}{2}(m_{\text{páncél}} + m_{\text{kocsi}}) \cdot u^2 = -\mu(m_{\text{páncél}} + m_{\text{kocsi}}) \cdot g \cdot s \rightarrow s = u^2 / (2\mu g) = 2/3 \text{ m.}$$

b)

- a páncélszekrény eldobásakor: a kocsié zérus, a páncélszekrényé

$$E_{\text{mech}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = m_{\text{páncél}} \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m_{\text{páncél}} \cdot v_0^2 = 200 \cdot 10 \cdot 2,3 + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 12^2 = 19000 \text{ J;}$$

- a páncélszekrény kocsinhoz érkezésekor: ugyanennyi;

- a páncélszekrény + kocsi elindulásakor: itt már nem marad meg az energia, mert a rugalmatlan ütközéskor egy része elnyelődik (deformációs munka), tehát a kocsi+páncélszekrény ütközés utáni sebességével kell kiszámolni a mozgási energiát:

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2}(m_{\text{páncél}} + m_{\text{kocsi}}) \cdot u^2 = 2880 \text{ J;}$$

- amikor a páncélszekrény + kocsi 0,5 m-t tett meg:

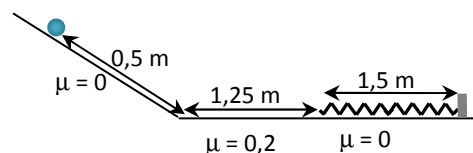
a súrlódási munka csökkentette az előzőleg kiszámolt energiát, tehát

$$E_{\text{mech}} = 2880 - \mu(m_{\text{páncél}} + m_{\text{kocsi}}) \cdot g \cdot s = 2880 - 0,432 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 0,5 = 720 \text{ J.}$$

**8/8.** Egy  $30^\circ$  hajlásszögű egyenes lejtőn van egy  $m = 0,5$  kg tömegű test a lejtő aljától 0,5 m távolságra (a lejtőn mérve a távolságot). A testnek  $v_0 = 2$  m/s kezdősebességet adunk lefelé. A lejtő (egy sima kis ívvel) vízszintes síkban folytatódik. A lejtőn a súrlódás elhanyagolható, a vízszintes terepen a súrlódási együttható  $\mu = 0,2$ .

a) Hol áll meg a test, ha a testet csak a súrlódás fékezi? (nincs akadály, rugó a síkon)

b) A vízszintes síkon elhelyezünk egy  $k = 8$  N/m rugóállandójú,  $\ell_0 = 1,5$  m hosszú rugót a lejtő aljától 1,25 m-re, aminek a túlsó vége rögzítve van. Ahol a rugó elkezdődik, a sík súrlódása már elhanyagolható. Mennyi a rugó maximális összenyomódása, amikor a test nekimegy?



c) Hogyan változnak az eredmények, ha a testet a lejtőn kezdetben nem lefelé, hanem felfelé indítjuk el?

**MO.**

a) A lejtőn –mivel a súrlódás elhanyagolható– érvényes az energia-megmaradás, abból számolhatjuk a test  $v_1$  sebességét a lejtő aljában. A  $30^\circ$ -os lejtőn  $h = 0,5 \cdot \sin 30^\circ = 0,25$  m magasról indul a test. Ha a potenciális energia zéruspontját a lejtő aljába rakjuk, akkor  $\frac{1}{2} m v_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_1^2$

$$\text{azaz } \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 2^2 + 0,5 \cdot 10 \cdot 0,25 = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot v_1^2 \rightarrow v_1 = 3 \text{ m/s.}$$

A vízszintes síkon munkatételt alkalmazhatunk:  $\Delta E_{\text{kin}} = -W$ :  $0 - \frac{1}{2} m v_1^2 = -\mu mg \cdot s$

$$\rightarrow s = v_1^2 / (2\mu g) = 3^2 / 4 = 2,25 \text{ m}$$

b) A vízszintes sík kezdetén  $v_1 = 3 \text{ m/s}$  most is.

A rugóig  $s_1 = 1,25 \text{ m}$ -en a test a súrlódás miatt  $v_2$  sebességre lassul, ami munkatétellel

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = -\mu mg \cdot s_1 \rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2\mu g s_1} = 2 \text{ m/s}.$$

A rugó maximális összenyomódását energia-megmaradással számolhatjuk a test+rugó rendszer mechanikai energiájából:  $\frac{1}{2} m v_2^2 + 0 = +\frac{1}{2} k x^2$

[ vagy munkatétellel a rugó által a testen végzett munkából:  $0 - \frac{1}{2} m v_2^2 = -\frac{1}{2} k x^2$  ]

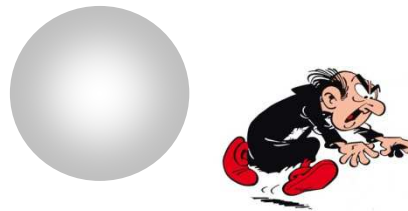
$$\rightarrow x = \sqrt{m v_2^2 / k} = \sqrt{0,5 \cdot 2^2 / 8} = 0,5 \text{ m}$$

c) Sehogy, mert energia-megmaradásból látszik, hogy a kezdeti állapotban a test mozgási energiája független attól, hogy a test felfelé vagy lefelé mozog.

**8/9.** Hókuszpók maga nem síel, de kiment leskelődni a síelő törpök után. A hegy aljában sétálgat a vízszintes mezőn, amikor egy lavina megindul a hegyről. Meglátja, hogy egy óriási, 110 kg tömegű hógömb tart feléje 12 m/s sebességgel.

Megpróbál elfutni előle. 8 m/s sebességgel fut, merthogy annál gyorsabban nem tud, - így aztán a lavina utoléri őt.

A lavina elragadja Hókuszpókot; ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy Hókuszpók a hógömbbel tökéletesen rugalmatlanul ütközik. Hókuszpók tömege 50 kg.



a) Mennyi lesz a hógömb sebessége, miután bekebelezte Hókuszpókot?

Az alábbi kérdésekre a válaszokat előjellel együtt adjuk meg:

b) Mennyi Hókuszpók impulzusának változása a lavinával való találkozásakor? Mennyi a hógömb impulzusának változása? Mennyi a Hókuszpók+lavina rendszer impulzusának változása?

c) Mennyi Hókuszpók mozgási energiájának változása a lavinával való találkozásakor? Mennyi a hógömb mozgási energiájának változása? Mennyi a Hókuszpók+lavina rendszer mozgási energiájának változása?

**MO.**

a) Rugalmatlan ütközésnek tekinthetjük:  $m_{\text{hg}} v_{\text{hg}} + M_{\text{HP}} v_{\text{HP}} = (m_{\text{hg}} + M_{\text{HP}}) U$

$$\rightarrow U = (m_{\text{hg}} v_{\text{hg}} + M_{\text{HP}} v_{\text{HP}}) / (m_{\text{hg}} + M_{\text{HP}}) = (110 \cdot 12 + 50 \cdot 8) / (110 + 50) = 10,75 \text{ m/s}$$

b)  $\Delta p_{\text{HP}} = M_{\text{HP}} (U - v_{\text{HP}}) = 50 \cdot (10,75 - 8) = +137,5 \text{ kgm/s}$

$$\Delta p_{\text{hg}} = m_{\text{hg}} (U - v_{\text{hg}}) = 110 \cdot (10,75 - 12) = -137,5 \text{ kgm/s}$$

$$\Delta p_{\text{össz}} = 0$$

c)  $\Delta E_{\text{kin,HP}} = \frac{1}{2} M_{\text{HP}} (U^2 - v_{\text{HP}}^2) = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot (10,75^2 - 8^2) = +1289,0625 \text{ J}$

$$\Delta E_{\text{kin,hg}} = \frac{1}{2} m_{\text{hg}} (U^2 - v_{\text{hg}}^2) = \frac{1}{2} \cdot 110 \cdot (10,75^2 - 12^2) = -1564,0625 \text{ J}$$

$$\Delta E_{\text{kin,össz}} = \Delta E_{\text{kin,HP}} + \Delta E_{\text{kin,hg}} = 1289,0625 - 1564,0625 = -275 \text{ J}$$

**8/10.** Mennyivel nyúlt meg a rugós erőmérő rugója a nyugalmi hosszhoz képest, ha a mutató a 40 N-os skálaponton áll és a nyújtás közben 1,6 J munkát végeztünk?

**MO.**

$$F = kx = 40 \text{ N}$$

$$W = -\Delta E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} kx^2 - 0 = 1,6 \text{ J}$$

$$\rightarrow x = 2W / (kx) = 2W / F = 2 \cdot 1,6 / 40 = 0,08 \text{ m} = 8 \text{ cm}.$$

**8/11.** Asztalhoz rögzített rugó nyugalmi állapotban éppen az asztal széléig ér. 14 cm-rel összenyomjuk, majd cérnával összekötjük (megfeszített állapotban). A rugó ilyen megfeszítéséhez 4,2 N erő szükséges. A végéhez egy 20 g-os testet teszünk, majd elégetjük a cérnát. Az asztal 1,0 m magas. A súrlódás elhanyagolható. Töltsük ki az alábbi táblázatot:

|  | a test mozgási energiája | a test+rugó rendszer potenciális energiája | a test+rugó rendszer összes mechanikai energiája |
|--|--------------------------|--|--|
| a rugó összenyomott állapotában                |                          |  |  |
| a test asztal szélére való érkezésekor         |                          |  |  |
| a test földre érkezésekor (a becsapódás előtt) |                          |  |  |

**MO.**

A rugóállandó  $k = F/\Delta l = 4,2/0,14 = 30 \text{ N/m}$ .

A táblázat kitöltéséhez elég kiszámolni

egyrészt az összenyomott rugó potenciális energiáját és tudni, hogy ez alakul a test mozgási energiájává az asztal szélére való megérkezésekor,

másrészt a test helyzeti energiáját az asztal magasságán, és tudni, hogy ez alakul mozgási energiává a földre érkezéskor.

|  | a test mozgási energiája   | a test+rugó rendszer potenciális energiája  | a test+rugó rendszer összes mechanikai energiája |
|--|--|---|--|
| a rugó összenyomott állapotában                | 0  | $\frac{1}{2}kx^2 + mgh =$<br>$= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 0,14^2 + 0,02 \cdot 10 \cdot 1 =$<br>$= 0,294 + 0,2 = 0,494 \text{ J}$ | 0,494 J  |
| a test asztal szélére való érkezésekor         | $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 = 0,294 \text{ J}$                          | $mgh = 0,2 \text{ J}$   | 0,494 J  |
| a test földre érkezésekor (a becsapódás előtt) | $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 + mgh =$<br>$0,294 + 0,2 = 0,494 \text{ J}$ | 0   | 0,494 J  |

**8/12.** Vízszintes súrlódásmentes asztalon egyik végén rögzített,  $k = 10 \text{ N/m}$  rugóállandójú,  $\ell = 24 \text{ cm}$  hosszú rugó fekszik, és a végéhez van rögzítve egy  $m_1 = 40 \text{ dkg}$  tömegű test. Az asztalon a rugó tengelyében nekilökünk egy  $m_2 = 20 \text{ dkg}$  tömegű testet  $v = 1,2 \text{ m/s}$  sebességgel. (A testek nem gurulnak, hanem súrlódásmentesen csúsznak az asztalon.) A két test tökéletesen rugalmasan ütközik.

a) Mekkora lesz az  $m_1$  tömegű test sebessége az ütközés után?

b) Mekkora lesz a rugó maximális összenyomódása?

**MO.**

a) Az ütközés tökéletesen rugalmas, tehát megmarad az impulzus és az energia is:

impulzus-megmaradás:  $m_2v = m_1v_1 + m_2v_2$ ;

energia-megmaradás:  $\frac{1}{2}m_2v^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$ ;

ezt az egyenletrendszert megoldva  $v_1$ -re és  $v_2$ -re:

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v = -0,4 \text{ m/s} \quad \text{és} \quad v_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v = 0,8 \text{ m/s}.$$

b) Energia-megmaradással: az  $m_1$  test nyomja össze a rugót,

közvetlenül az ütközés után  $m_1$ -nek még nincs potenciális energiája, csak mozgási:  $E_A = \frac{1}{2}m_1v_1^2$ ;

a maximális összenyomódásnál a sebesség éppen zérus, ekkor csak potenciális energiája van  $m_1$ -nek:  $E_B = \frac{1}{2}k \cdot \Delta x^2$ . Ezeket egyenlővé téve és rendezve  $\Delta x$ -re:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m_1}{k}} v_1 = \sqrt{\frac{m_1}{k} \frac{2m_2}{m_1 + m_2}} v, \quad \text{számértékileg } \Delta x = 0,16 \text{ m.}$$

Alternatív megoldás: a teljes eseménysor kezdetét és végét tekintve:  $m_2$  ütközés előtti mozgási energiája egyenlő az  $m_2$  ütközés utáni mozgási energiájával és a rugó potenciális energiájával (amikor az  $m_1$  éppen megáll),

$$\text{azaz: } \frac{1}{2}m_2 v^2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}k \cdot \Delta x^2, \quad \text{ahonnan: } \Delta x = \sqrt{\frac{m_2}{k} (v^2 - v_2^2)} = 0,16 \text{ m.}$$

**8/13.** Hogy egy test a Földet elhagyhassa, kb. 11,18 km/s kezdeti sebességre van szüksége. Ha egy bolygóközi szondát 13 km/s sebességgel indítanak el, mekkora lesz a Földhöz viszonyított sebessége, amikor a Földtől már igen távol van?

**MO.** Energia-megmaradással, felhasználva azt, hogy a „Földtől igen távol” a potenciális energia zérus:

$$-\gamma \frac{m \cdot M_{\text{Föld}}}{R_{\text{Föld}}} + \frac{1}{2} m v_0^2 = 0 + \frac{1}{2} m v_1^2,$$

$$\text{valamint hogy } \gamma \frac{M_{\text{Föld}}}{R_{\text{Föld}}} = g \cdot R_{\text{Föld}}: \quad m \cdot g \cdot R_{\text{Föld}} + \frac{1}{2} m v_0^2 = 0 + \frac{1}{2} m v_1^2 \quad \rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2g \cdot R_{\text{Föld}}},$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2 \text{ és } R_{\text{Föld}} = 6370 \text{ km behelyettesítéssel } v_1 \approx 6,635 \text{ km/s.}$$

**8/14.** Hosszú függőleges csőben rugó van elhelyezve, amelynek a cső falával való súrlódása elhanyagolható. A rugóra 10 g tömegű golyót helyezve 1 cm-rel összenyomódik. Mennyivel nyomódik össze a rugó, ha a golyót a rugó tetejétől számított 1 m magasságból ejtjük rá?

**MO.** A rugóállandó  $k = mg / \Delta l_1 = 0,01 \cdot 10 / 0,01 = 10 \text{ N/m}$ .

Írjuk fel az energia-megmaradást úgy, hogy a nehézségi erőter potenciális energiájának zérus szintje a rugó tetejénél legyen (azaz amikor a rugó nincs összenyomva):

$$mg H = mg (-\Delta l_2) + \frac{1}{2} k \Delta l_2^2,$$

$$\text{behelyettesítve } 0,01 \cdot 10 \cdot 1 = -0,01 \cdot 10 \cdot \Delta l_2 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \Delta l_2^2, \quad \text{azaz } 5 \Delta l_2^2 - 0,1 \Delta l_2 - 0,1 = 0,$$

$$\text{aminek megoldása } \Delta l_2 \approx 15,2 \text{ cm.}$$

## Nem zh-feladat

Miért nehezebb egy kisebb tömegű csónakból kiugrani a partra, mint egy nagyobb tömegű hajóból?

**MO.** A kérdés az, hogy mekkora munkával tudjuk magunkat és a csónakot felgyorsítani az álló helyzetből az ugrás sebességére.  $M$  a csónak tömege,  $V$  lesz a csónak sebessége,  $m$  az ember tömege,  $v$  lesz az ember sebessége, ezekkel a munkatételt használva

$$W = \Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin ugráskor}} - 0 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m v^2.$$

Másrészt, mivel csak belső erő fog hatni (amikor elrugaszkodunk a csónakról), ezért az ember+csónak rendszer impulzusa állandó marad, méghozzá zérus, mert kezdetben nyugalomban voltak:

$$M V + m v = 0.$$

$$\text{Innen } V = -m/M \cdot v \text{ és } W = \frac{1}{2} M (-m/M \cdot v)^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \dots = \frac{1}{2} m (1 + m/M) v^2,$$

vagyis minél nagyobb az  $m/M$  hányados, annál nagyobb munkát kell befektetni ahhoz, hogy egy bizonyos  $v$  sebességre felgyorsítsuk magunkat.