Munkatétel

Mindig érvényes (akkor is, ha a testre hatnak nem konzervatív erők – súrlódási, közegellenállási – is).

$W_{össz} = \Delta E_{kin}$, ahol
$W_{össz}$ a testre ható összes erő által végzett munka összege,
$\Delta E_{kin} = E_{kin,\,vég} - E_{kin,\,kezdő}$.

Nagyon hasznos olyan esetekben, amikor nem érdekes tudni *időben* a test sebességét és helyét (a **v**(t) és **r**(t) függvényeket), hanem elég, ha a test helye és sebességének nagysága között kapunk összefüggést.

Konzervatív erőterek, potenciális energiák

kölcsönhatás	erőtörvény	helyzeti energia függvénye	hol legyen $E_{pot} = 0$?
gravitációs erő a Föld felszínén	$\mathbf{F} = -mg\,\mathbf{k}$	$E_{pot} = mgz$	z = 0 célszerűen választható
rugóerő (azaz lineáris rugalmas erő)	$\mathbf{F} = -kx\,\mathbf{i}$	$E_{pot} = ½\, kx^2$	a rugó nyugalmi hosszánál
általános gravitációs erő	$\mathbf{F} = -\gamma m_1 m_2/r^2 \cdot \mathbf{e}_r$	$E_{pot} = -\gamma m_1 m_2/r$	a „végtelen távoli” pontban

Munka számolása potenciális energiából: $W_{AB} = -\Delta E_{pot} = E_{pot,\,kezdő} - E_{pot,\,vég}$
(Ekkora munkát végez az adott erő. Ha mi végezzük a munkát az adott erő ellenében, akkor ennek ellentettjét kell venni.)

Mechanikai energia: $E_{mech} = E_{kin} + E_{pot}$ (E_{pot} a megfelelő tagokat tartalmazza)

Mechanikai energia megmaradás

Akkor érvényes, ha csak konzervatív erők végeznek munkát a testen, ilyenkor E_{mech} a mozgás során állandó.

A súrlódási erő, közegellenállási erő nem konzervatív, hanem disszipatív erő; az általuk végzett munka mindig negatív, ilyenkor a test mechanikai energiája csökken.

Ütközések

- Tökéletesen rugalmatlan ütközés: a több testből egy test lesz, aminek a sebessége az impulzus-megmaradást felírva számolható. A mechanikai energia nem marad meg, mivel a két test egybegyűrődésekor az energia egy része deformációs munka végzésére fordítódik.
- Tökéletesen rugalmas ütközés: a több test az ütközés után külön-külön testként mozog, a sebességük meghatározásához az impulzus-megmaradást és a (mozgási) energia megmaradást használjuk fel.

Az impulzus-megmaradást az egyes irányokra külön-külön írjuk fel (a pozitív irányt megválasztva az azzal egyező irányú sebességek pozitívak, az ellentétesek negatívak). Több komponens (pl. szöget bezáró ütközés) esetén az energia-megmaradást nem kell komponensenként írni.

8/0. Vízszintes súrlódásmentes síkon 6 N nagyságú vízszintes erővel húzunk egy 2 kg tömegű testet. Mekkora sebességre gyorsul 4 m-es úton, ha 5 m/s-os kezdősebességgel indul?

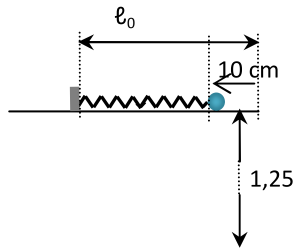
MO.
/a megoldás: A test gyorsulása $a = F/m = 3\ m/s^2$, $v_0 = 5\ m/s$ $\Rightarrow$ $v = v_0 + at = 5 + 3t$ és $s = v_0t + ½at^2 = 5t + 1{,}5t^2$.
$s = 4$ m-t t_1 idő alatt tesz meg: $5t_1 + 1{,}5t_1^2 = 4$ $\Rightarrow$ $t_1 = 2/3$ s $\Rightarrow$ $v_1 = 5 + 3\cdot(2/3) = 7$ m/s lesz a sebessége.
/b megoldás: Mivel a sebességre a hely függvényében van szükségünk, nem számoljuk ki az eltelt időt, hanem a v(t) és s(t) függvényekből előállítjuk az s(v) ill. v(s) összefüggést:
$v = v_0+at$ $\Rightarrow$ $t = (v-v_0)/a$ $\Rightarrow$ $s = v_0t+½at^2 = v_0\cdot(v-v_0)/a + ½a[(v-v_0)/a]^2 = \dots = (v^2 - v_0^2)/2a$ $\Rightarrow$ $v = \sqrt{2as + v_0^2}$,
tehát $v_1 = \sqrt{2\cdot3\cdot4 + 5^2} = 7$ m/s.
/c megoldás: Munkatétellel: $\Delta E_{kin} = W_{össz}$: $½\, mv_1^2 - ½\, mv_0^2 = ma\cdot s$ $\Rightarrow$ $v_1 = \sqrt{2as + v_0^2} = 7$ m/s.

8/1. 10 m magas, 45° hajlásszögű lejtő tetejéről 2 kg tömegű test csúszik le. A lejtőn való mozgás közben a súrlódás elhanyagolható. A lejtő kis görbülettel vízszintes, érdes síkba megy át, amelyen a test súrlódási tényezője $\mu = 0{,}2$.
A lejtő lábától milyen messzire jut el a test?

MO.
/a megoldás: Kiszámoljuk a test gyorsulását a lejtőn, ill. a vízszintes súrlódásos felületen, majd a $v = v_0+at$ ill. $s = v_0t+½at^2$ képletekből kiszámoljuk a lejtő aljára való megérkezés idejét és sebességét, majd a megállás idejét és távolságát:
A lejtőn $a_L = g\cdot\sin\alpha$ és $v_{0L} = 0$ $\Rightarrow$ $v_L = (g\cdot\sin\alpha)\cdot t$ $\Rightarrow$ $s_L = ½(g\cdot\sin\alpha)\cdot t^2$;
a lejtő hossza $L = h/\sin\alpha$, tehát a lejtő alján $h/\sin\alpha = ½(g\cdot\sin\alpha)\cdot t_L^2$ $\Rightarrow$ $t_L = \sqrt{2h/g}\ /\ \sin\alpha$ $\Rightarrow$ $v_L = \sqrt{2hg}$.
A súrlódásos vízszintes síkon $a_S = -\mu g$ és $v_{0S} = v_L = \sqrt{2hg}$ $\Rightarrow$ $v_S = \sqrt{2hg} - \mu g\cdot t$;
a megállásig eltelt idő $\sqrt{2hg} - \mu g\cdot t^* = 0$ $\Rightarrow$ $t^* = \sqrt{2h/g}\ /\ \mu$,
ezzel a megállásig megtett út $s = \sqrt{2hg}\cdot t^* - ½\mu g\cdot t^{*2} = 2h/\mu - h/\mu = h/\mu = 10/0{,}2 = 50$ m.
/b megoldás: Alkalmazhatjuk az előző feladatban levezetett $v = \sqrt{2as + v_0^2}$ és $s = (v^2 - v_0^2)/2a$ összefüggéseket:
$v_L = \sqrt{2a_Ls + v_0^2} = \sqrt{2 \cdot g\sin\alpha \cdot \frac{h}{\sin\alpha} + 0} = \sqrt{2gh}$, és $s = \frac{0 - v_L^2}{2a_S} = \frac{-v_L^2}{-2\mu g} = \frac{2gh}{2\mu g} = \frac{h}{\mu} = 50$ m.
/c megoldás: Munkatétellel, energia-megmaradással:
a lejtőn a súrlódás elhanyagolható, így számolhatunk energia-megmaradással:
a lejtő aljának magasságát választva a helyzeti energia zérus szintjének
$mgh + 0 = 0 + ½\, mv_L^2$ $\Rightarrow$ $v_L^2 = 2gh$
[természetesen munkatétellel is számolhatunk: $\Delta E_{kin} = W_{össz}$: $½\, mv_L^2 - 0 = (mg\cdot\sin\alpha)\cdot(h/\sin\alpha) = mgh$];
a vízszintes síkon való csúszásnál energia-megmaradás nincs, de a munkatételt használhatjuk:
$\Delta E_{kin} = W_{össz}$: $0 - ½\, mv_L^2 = -\mu mg\cdot s$ $\Rightarrow$ $s = v_L^2/(2\mu g) = (2gh)/\ /(2\mu g) = h/\mu = 50$ m.

Vegyük észre, hogy a kényszererő (azaz a lejtő, ill. a vízszintes sík felület által kifejtett nyomóerő) által végzett munka mindig zérus, mert az erő merőleges a mozgás irányára!

8/2. Asztallaphoz rögzített rugó nyugalmi állapotban éppen az asztal széléig ér. 10 cm-rel összenyomjuk, majd cérnával összekötjük (megfeszített állapotban). A rugó ilyen megfeszítéséhez 2,5 N erő szükséges. A végéhez egy 10 g-os testet teszünk, majd elégetjük a cérnát. Az asztal 1,25 m magas.
Mekkora sebességgel és a vízszinteshez viszonyítva milyen szögben csapódik a padlóra a test? A súrlódást hanyagoljuk el!



MO.
A rugóállandó, ha 10 cm-rel való összenyomáshoz $F = 2{,}5$ N erő kell: $k = F / \Delta l = 2{,}5/0{,}1 = 25$ N/m.

Mivel a súrlódás elhanyagolható, energia-megmaradással megoldhatjuk a feladatot. Azonban ha a kezdőállapottól a végállapotig egy lépésben írjuk fel az energia-megmaradást, akkor csak a nagyságát kapjuk meg a test sebességének, a komponenseit nem, ezért most külön-külön számolunk a két lépésre.

Az asztalon az összenyomott rugóban tárolt energia $E_{pot} = ½kx^2 = ½·25·0{,}1^2 = 0{,}125$ J.

(A rugó 10 cm-rel való összenyomásához mi $W = \int_0^{0,1} kx\,dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{0,1} = \frac{1}{2}\cdot 25\cdot 0{,}1^2 = 0{,}125$ J munkát végeztünk, avagy a rugó által végzett munka –0,125 J volt.)

A cérna elégetése után ekkora munkát tud végezni a rugó a testen.

A test sebessége az asztal széléhez érve (amikor a rugó a nyugalmi állapotába kerül) a kinetikus energiájából számolható energia-megmaradással: $½kx^2 + 0 = 0 + ½mv^2$ (vagy munkatétellel: $W = ½kx^2 = \Delta E_{kin} = ½\, mv^2 - 0$),

amiből a test sebessége $v = \sqrt{\frac{k}{m}}x = \sqrt{\frac{25}{0{,}01}}\cdot 0{,}1 = 5\,\frac{m}{s}$.

Az asztal szélétől a test mozgása egy $v_x = 5$ m/s vízszintes kezdősebességű ferde hajítás.

A közegellenállást elhanyagolva a test vízszintes sebessége nem változik; függőlegesen pedig h = 1,25 m magasról indulva gyorsul (zérus függőleges kezdősebességről). Erre energia-megmaradást felírva $mgh + 0 = 0 + ½\, mv_z^2$,

tehát földet éréskor a függőleges sebességkomponense $v_z = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 1{,}25} = 5$ m/s (lefelé).

A test sebessége tehát becsapódáskor $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_z}^2} = 5\sqrt{2} \approx 7{,}071$ m/s, a sebességének a vízszintessel bezárt szöge arc tg (v_z/v_x) = arc tg –1 = –45°.

Ha a kiindulástól a végállapotig egyben írjuk fel az energia-megmaradást:

$½kx^2 + mgh + 0 = 0 + 0 + ½mv^2$ $\quad v = \sqrt{\frac{k}{m}x^2 + 2gh} = 5\sqrt{2}$ m/s, megkapjuk a sebesség nagyságát.

8/3.a) Milyen magasra emelkedik a Hold felszínéről v_0 sebességgel függőlegesen kilőtt test?

b) Mennyi legyen v_0, hogy a test elhagyja a Hold vonzókörét?

A Hold sugara R_{Hold} = 1888 km, a Hold felszínén a gravitációs gyorsulás $g_{Hold} = 1{,}6$ m/s².

MO.

a) Az általános gravitációs erő konzervatív, a hozzá tartozó potenciális energia

$E_{pot} = -\gamma\frac{m\cdot M_{Hold}}{r}$, ahol r a test távolsága a Hold középpontjától.

A test v_0 sebességgel indul a Hold felszínéről, ahol $r = R_{Hold}$, és addig emelkedik, amíg v = 0 lesz, ott $r = R_{Hold} + h$.

Energia-megmaradást felírva

$$-\gamma\frac{m\cdot M_{Hold}}{R_{Hold}} + \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -\gamma\frac{m\cdot M_{Hold}}{R_{Hold}+h} + 0 \Rightarrow h = \frac{1}{\frac{1}{R_{Hold}} - \frac{{v_0}^2}{2\gamma M_{Hold}}} - R_{Hold}$$

A Hold adataival: R_{Hold} = 1888 km és $g_{Hold} = \gamma\frac{M_{Hold}}{{R_{Hold}}^2} = 1{,}6\,\frac{m}{s^2}$,

$\Rightarrow \gamma M_{Hold} \approx 5{,}703\cdot 10^{12}\ m^3s^{-2}$, tehát $h = \frac{1}{\frac{1}{1{,}888\cdot 10^3} - \frac{{v_0}^2}{1{,}141\cdot 10^{13}}} - 1{,}888\cdot 10^3$ [m].

b) Mivel a Hold által a testre kifejtett erő $\mathbf{F} = -\gamma\frac{m\cdot M_{Hold}}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$ csak végtelen távol csökken zérusra, ezért ahhoz, hogy a test elhagyja a Hold vonzókörét, az kell, hogy végtelen távolra jusson; az ehhez szükséges kezdősebesség a szökési sebesség (második kozmikus sebesség) $v_{2kozm,Hold}$.

Végtelen távolban, azaz h → ∞ esetén az $E_{pot} = -\gamma\frac{m\cdot M_{Hold}}{r}$ potenciális energia értéke zérus. És mivel a minimális szökési sebességet akarjuk kiszámolni, ehhez elég, ha a végtelen távolba zérus sebességgel „érkezik meg" a test.

Energia-megmaradást felírva

$$-\gamma\frac{m\cdot M_{Hold}}{R_{Hold}} + \frac{1}{2}m{v_{2kozm,Hold}}^2 = 0 + 0 \quad\Rightarrow\quad v_{2kozm,Hold} = \sqrt{\frac{2\gamma M_{Hold}}{R_{Hold}}} = \sqrt{2g_{Hold}R_{Hold}} \approx 2{,}458 \text{ km/s}.$$

8/4. Rugalmas ütközés egy egyenes mentén: m tömegű testet u sebességgel nekilökünk egy álló M tömegű testnek. Határozzuk meg a két test ütközés utáni sebességét, és vizsgáljuk meg azokat a speciális eseteket, amikor
a) m = M;
b) m ≪ M;
c) m ≫ M.

MO.
Mivel az ütközés tökéletesen rugalmas, a két testből álló rendszer össz-impulzusa és mozgási energiája állandó:

$$mu + M\cdot 0 = mv + MV$$
$$\tfrac{1}{2} mu^2 + \tfrac{1}{2}M\cdot 0^2 = \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} MV^2.$$

A második egyenletet átrendezve $m(u^2 - v^2) = m(u - v)(u + v) = MV^2$,
az első egyenletet átrendezve $m(u-v) = MV$;
elosztva őket megkapjuk V-t: $V = u+v$,
ezt beírva az első egyenletbe $mu = mv + Mu + Mv \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m-M}{m+M}u$ és $V = \frac{2m}{m+M}u$.

Nézzünk meg speciális eseteket:

a)	m = M (a két golyó egyforma tömegű)	$v = 0$, $V = u$	sebességet cserélnek
b)	m<<M (nagy tömegű álló golyónak ütközik elhanyagolható tömegű golyó)	$v \approx -u$, $V \approx 0$	a kis golyó visszapattan, a nagy meg se mozdul
c)	m>>M (elhanyagolható tömegű golyónak ütközik nagy tömegű golyó)	$v \approx u$, $V \approx 2u$	a nagy golyó változatlan sebességgel megy tovább, a kis golyó kétszer akkora sebességgel indul

8/5. A főútra becsatlakozó mellékúton a STOP táblánál várakozó autóba hátulról beleütközik egy másik autó. A két autó tömege megegyezik. Az ütközésnél a két autó összetapad (rugalmatlanul ütközik) és a két autóból álló roncs súrlódva továbbcsúszik: átcsúszik a 8 m széles főúton, majd onnan tovább a füvön. Végül az ütközés helyétől 18 m-re áll meg. A hátulról jövő kocsi 11,4 m-es féknyomot hagyott az ütközés előtt. Mekkora sebességgel haladt, mielőtt fékezni kezdett? A súrlódási együttható az aszfalton 0,4, a füvön 0,5.

MO.
A feladatot munkatétellel oldjuk meg:
[A] a hátsó kocsi v_0 kezdősebességről indul, s_1 = 11,4 m-es úton fékezi a súrlódási erő, ezután a sebessége v_1 lesz;
[B] ezután tökéletesen rugalmatlanul ütközik az álló kocsival, az ütközés utáni közös sebességük v_2;
[C] a két kocsiból álló roncs az aszfalton s_2 = 8 m-t fékeződik, ami után a sebessége v_3;
[D] majd még a füvön s_3 = 10 m-t fékeződik, ami után megáll, $v_4 = 0$.
A végső állapottól számolunk visszafelé a kiinduló sebességig:
[D] $\tfrac{1}{2}(m+m)v_4^2 - \tfrac{1}{2}(m+m)v_3^2 = -\mu_{fű}(m+m)g\cdot s_3 \quad \rightarrow \quad v_3^2 = 2\mu_{fű}\cdot g\cdot s_3 \qquad (v_3 = 10\text{ m/s})$
[C] $\tfrac{1}{2}(m+m)v_3^2 - \tfrac{1}{2}(m+m)v_2^2 = -\mu_{aszfalt}(m+m)g\cdot s_2 \quad \rightarrow \quad v_2^2 = 2g(\mu_{aszfalt}s_2+\mu_{fű}s_3), \quad v_2 \approx 12{,}81\text{ m/s}$
[B] az ütközésre az impulzus-megmaradást felírva: $mv_1 = (m+m)v_2 \quad \rightarrow \quad v_1 = 2v_2 \approx 25{,}61\text{ m/s}$
[A] $\tfrac{1}{2}m v_1^2 - \tfrac{1}{2}m v_0^2 = -\mu_{aszfalt}mg\cdot s_1 \quad \rightarrow \quad v_0^2 = 2\mu_{aszfalt}g\cdot s_1 + v_1^2 \quad v_1 \approx 27{,}33\text{ m/s} = 98{,}41\text{ km/h}.$

Gyakorló feladatok zh-ra

8/6. Ballisztikus inga: ℓ hosszú fonálon lógó M tömegű zsákba vízszintes u sebességgel belelövünk egy m tömegű testet, ami benne ragad a zsákban (rugalmatlan ütközés), és azzal együtt φ szöggel kilendül. ~~Mekkora volt az u sebesség?~~ Mekkora maximális szöggel lendül ki?

MO. Az ütközés tökéletesen rugalmatlan, tehát össz-impulzusuk állandó:

$$mu = (M+m)v \quad \Rightarrow \quad v = u\cdot m/(M+m)$$

Innen energia-megmaradással az emelkedés magassága

$$\tfrac{1}{2}(M+m)v^2 = (M+m)gh \quad \Rightarrow \quad h = v^2/2g = u^2\cdot m^2/[2g(M+m)^2]$$

és az ehhez tartozó szög $h = \ell(1-\cos\varphi) \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = (\ell-h)/\ell = 1 - h/\ell = 1 - u^2\cdot m^2/[2g\ell(M+m)^2]$.

8/7. A rablók nem bírták kinyitni a páncélszekrényt, ezért magukkal viszik az egészet. Menekülés közben felmásztak vele a 2,3 m magas kerítés tetejére és onnan bedobják a kerítésen kívül várakozó kocsijukba. A páncélszekrényt 12 m/s kezdősebességgel vízszintesen dobják el. Amikor a páncélszekrény beleesik a kocsiba, sebességének függőleges komponensét elnyeli a kocsijukon levő gumimatrac, és a kocsi rajta a páncélszekrénnyel elkezd csúszni az aszfalton. A páncélszekrény tömege m = 200 kg, a kocsié M = 800 kg, a súrlódási együttható μ = 0,432.

a) Milyen messze csúszik a kocsi a páncélszekrénnyel?

b) Mennyi a páncélszekrény + kocsi rendszer mechanikai energiája

- a páncélszekrény eldobásakor,
- a páncélszekrény kocsihoz érkezésekor,
- a páncélszekrény + kocsi elindulásakor,
- amikor a páncélszekrény + kocsi 0,5 m-t tett meg?

A kocsi vízszintes sík terepen van, az legyen a helyzeti energia zérus szintje.

MO.

a) Elhajításkor a páncélszekrény sebességének vízszintes komponense v_x = 12 m/s, ami nem változik a hajítás során, tehát ekkora vízszintes sebességgel érkezik a páncélszekrény a kocsihoz, amivel rugalmatlanul ütközik. A kocsi+páncélszekrény vízszintes sebességgel fog mozogni, az ütközéskor a sebesség függőleges komponense elnyelődik, a vízszintes sebességkomponensre felírhatjuk az impulzus-megmaradást:

$m_{páncél} \cdot v_x = (m_{páncél} + m_{kocsi}) \cdot u \rightarrow$ tehát a kocsi a páncélszekrénnyel u = 2,4 m/s kezdősebességgel indul meg.

Ezt a sebességét elveszíti a súrlódás miatt. Munkatétellel

$0 - ½(m_{páncél} + m_{kocsi}) \cdot u^2 = -\mu(m_{páncél} + m_{kocsi}) \cdot g \cdot s \quad \rightarrow \quad s = u^2/(2\mu g) = 2/3$ m .

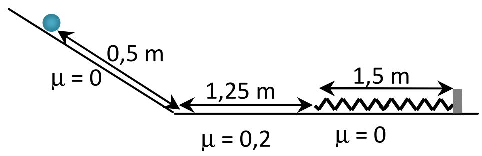
b)

- a páncélszekrény eldobásakor: a kocsié zérus, a páncélszekrényé
  $E_{mech} = E_{pot} + E_{kin} = m_{páncél} \cdot g \cdot h + ½ m_{páncél} \cdot v_0^2 = 200 \cdot 10 \cdot 2{,}3 + ½ \cdot 200 \cdot 12^2 = 19000$ J;
- a páncélszekrény kocsihoz érkezésekor: ugyanennyi;
- a páncélszekrény + kocsi elindulásakor: itt már nem marad meg az energia, mert a rugalmatlan ütközéskor egy része elnyelődik (deformációs munka), tehát a kocsi+páncélszekrény ütközés utáni sebességével kell kiszámolni a mozgási energiát:
  $E_{mech} = ½(m_{páncél} + m_{kocsi}) \cdot u^2 = 2880$ J;
- amikor a páncélszekrény + kocsi 0,5 m-t tett meg:
  a súrlódási munka csökkentette az előzőleg kiszámolt energiát, tehát
  $E_{mech} = 2880 - \mu(m_{páncél} + m_{kocsi}) \cdot g \cdot s = 2880 - 0{,}432 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}5 = 720$ J.

8/8. Egy 30° hajlásszögű egyenes lejtőn van egy m = 0,5 kg tömegű test a lejtő aljától 0,5 m távolságra (a lejtőn mérve a távolságot). A testnek v_0 = 2 m/s kezdősebességet adunk lefelé. A lejtő (egy sima kis ívvel) vízszintes síkban folytatódik. A lejtőn a súrlódás elhanyagolható, a vízszintes terepen a súrlódási együttható μ = 0,2.

a) Hol áll meg a test, ha a testet csak a súrlódás fékezi? (nincs akadály, rugó a síkon)

b) A vízszintes síkon elhelyezünk egy k = 8 N/m rugóállandójú, ℓ_0 = 1,5 m hosszú rugót a lejtő aljától 1,25 m-re, aminek a túlsó vége rögzítve van. Ahol a rugó elkezdődik, a sík súrlódása már elhanyagolható. Mennyi a rugó maximális összenyomódása, amikor a test nekimegy?



c) Hogyan változnak az eredmények, ha a testet a lejtőn kezdetben nem lefelé, hanem felfelé indítjuk el?

MO.

a) A lejtőn –mivel a súrlódás elhanyagolható– érvényes az energia-megmaradás, abból számolhatjuk a test v_1 sebességét a lejtő aljában. A 30°-os lejtőn h=0,5·sin30°=0,25 m magasról indul a test. Ha a potenciális energia zéruspontját a lejtő aljába rakjuk, akkor $½ \cancel{m} v_0^2 + \cancel{m}gh = ½ \cancel{m} v_1^2$

azaz $½ \cdot \cancel{0{,}5} \cdot 2^2 + \cancel{0{,}5} \cdot 10 \cdot 0{,}25 = ½ \cdot \cancel{0{,}5} \cdot v_1^2 \quad \rightarrow \quad v_1 = 3$ m/s.

A vízszintes síkon munkatételt alkalmazhatunk: $\Delta E_{kin} = -W$: $0 - ½\, \cancel{m}\, v_1^2 = -\mu \cancel{m} g \cdot s$

→ $s = v_1^2/(2\mu g) = 3^2/4 = 2{,}25$ m

b) A vízszintes sík kezdetén $v_1 = 3$ m/s most is.

A rugóig s_1=1,25 m-en a test a súrlódás miatt v_2 sebességre lassul, ami munkatétellel

$½\, \cancel{m}\, v_2^2 - ½\, \cancel{m}\, v_1^2 = -\mu \cancel{m} g \cdot s_1$ → $v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2\mu g s_1} = 2$ m/s .

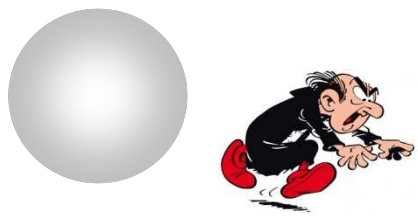
A rugó maximális összenyomódását energia-megmaradással számolhatjuk a test+rugó rendszer mechanikai energiájából: $½\, m\, v_2^2 + 0 = +½\, k\, x^2$

[vagy munkatétellel a rugó által a testen végzett munkából: $0 - ½\, m\, v_2^2 = -½\, k\, x^2$]

→ $x = \sqrt{m v_2^2/k} = \sqrt{0{,}5 \cdot 2^2/8} = 0{,}5$ m

c) Sehogy, mert energia-megmaradásból látszik, hogy a kezdeti állapotban a test mozgási energiája független attól, hogy a test felfelé vagy lefelé mozog.

8/9. Hókuszpók maga nem síel, de kiment leskelődni a síelő törpök után. A hegy aljában sétálgat a vízszintes mezőn, amikor egy lavina megindul a hegyről. Meglátja, hogy egy óriási, 110 kg tömegű hógömb tart feléje 12 m/s sebességgel. Megpróbál elfutni előle. 8 m/s sebességgel fut, merthogy annál gyorsabban nem tud, - így aztán a lavina utoléri őt.



A lavina elragadja Hókuszpókot; ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy Hókuszpók a hógömbbel tökéletesen rugalmatlanul ütközik. Hókuszpók tömege 50 kg.

a) Mennyi lesz a hógömb sebessége, miután bekebelezte Hókuszpókot?

Az alábbi kérdésekre a válaszokat előjellel együtt adjuk meg:

b) Mennyi Hókuszpók impulzusának változása a lavinával való találkozásakor? Mennyi a hógömb impulzusának változása? Mennyi a Hókuszpók+lavina rendszer impulzusának változása?

c) Mennyi Hókuszpók mozgási energiájának változása a lavinával való találkozásakor? Mennyi a hógömb mozgási energiájának változása? Mennyi a Hókuszpók+lavina rendszer mozgási energiájának változása?

MO.

a) Rugalmatlan ütközésnek tekinthetjük: $m_{hg}v_{hg} + M_{HP}V_{HP} = (m_{hg}+M_{HP})U$

→ $U = (m_{hg}v_{hg}+M_{HP}V_{HP})/(m_{hg}+M_{HP}) = (110\cdot 12+50\cdot 8)/(110+50) = 10{,}75$ m/s

b) $\Delta p_{HP} = M_{HP}(U-V_{HP}) = 50\cdot(10{,}75-8) = +137{,}5$ kgm/s

$\Delta p_{hg} = m_{hg}(U-v_{hg}) = 110\cdot(10{,}75-12) = -137{,}5$ kgm/s

$\Delta p_{össz} = 0$

c) $\Delta E_{kin,HP} = ½\, M_{HP}(U^2-V_{HP}^2) = ½\cdot 50\cdot(10{,}75^2-8^2) = +1289{,}0625$ J

$\Delta E_{kin,hg} = ½\, m_{hg}(U^2-v_{hg}^2) = ½\cdot 110\cdot(10{,}75^2-12^2) = -1564{,}0625$ J

$\Delta E_{kin,össz} = \Delta E_{kin,HP} + \Delta E_{kin,hg} = 1289{,}0625 - 15674{,}0625 = -275$ J

8/10. Mennyivel nyúlt meg a rugós erőmérő rugója a nyugalmi hosszhoz képest, ha a mutató a 40 N-os skálaponton áll és a nyújtás közben 1,6 J munkát végeztünk?

MO.

$F = kx = 40$ N

$W = -\Delta E_{pot} = ½kx^2 - 0 = 1{,}6$ J

→ $x = 2W / (kx) = 2W / F = 2\cdot 1{,}6/40 = 0{,}08$ m = 8 cm.

8/11. Asztallaphoz rögzített rugó nyugalmi állapotban éppen az asztal széléig ér. 14 cm-rel összenyomjuk, majd cérnával összekötjük (megfeszített állapotban). A rugó ilyen megfeszítéséhez 4,2 N erő szükséges. A végéhez egy 20 g-os testet teszünk, majd elégetjük a cérnát. Az asztal 1,0 m magas. A súrlódás elhanyagolható. Töltsük ki az alábbi táblázatot:

	a test mozgási energiája	a test+rugó rendszer potenciális energiája	a test+rugó rendszer összes mechanikai energiája
a rugó összenyomott állapotában			
a test asztal szélére való érkezésekor			
a test földre érkezésekor (a becsapódás előtt)			

MO.
A rugóállandó $k = F/\Delta l = 4{,}2/0{,}14 = 30$ N/m.
A táblázat kitöltéséhez elég kiszámolni
egyrészt az összenyomott rugó potenciális energiáját és tudni, hogy ez alakul a test mozgási energiájává az asztal szélére való megérkezésekor,
másrészt a test helyzeti energiáját az asztal magasságán, és tudni, hogy ez alakul mozgási energiává a földre érkezéskor.

	a test mozgási energiája	a test+rugó rendszer potenciális energiája	a test+rugó rendszer összes mechanikai energiája
a rugó összenyomott állapotában	0	$½kx^2 + mgh =$ $= ½·30·0{,}14^2 + 0{,}02·10·1 =$ $= 0{,}294 + 0{,}2 = 0{,}494$ J	0,494 J
a test asztal szélére való érkezésekor	$½mv^2 = ½kx^2 = 0{,}294$ J	$mgh = 0{,}2$ J	0,494 J
a test földre érkezésekor (a becsapódás előtt)	$½mv^2 = ½kx^2 + mgh =$ $0{,}294 + 0{,}2 = 0{,}494$ J	0	0,494 J

8/12. Vízszintes súrlódásmentes asztalon egyik végén rögzített, k = 10 N/m rugóállandójú, ℓ = 24 cm hosszú rugó fekszik, és a végéhez van rögzítve egy m_1 = 40 dkg tömegű test. Az asztalon a rugó tengelyében nekilökünk egy m_2 = 20 dkg tömegű testet v = 1,2 m/s sebességgel. (A testek nem gurulnak, hanem súrlódásmentesen csúsznak az asztalon.) A két test tökéletesen rugalmasan ütközik.

a) Mekkora lesz az m_1 tömegű test sebessége az ütközés után?

b) Mekkora lesz a rugó maximális összenyomódása?

MO.
a) Az ütközés tökéletesen rugalmas, tehát megmarad az impulzus és az energia is:
impulzus-megmaradás: $m_2v = m_1v_1 + m_2v_2$;
energia-megmaradás: $½m_2v^2 = ½m_1v_1^2 + ½m_2v_2^2$;
ezt az egyenletrendszert megoldva v_1-re és v_2-re:
$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v = -0{,}4\ \mathrm{m/s}$ és $v_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v = 0{,}8\ \mathrm{m/s}$.
b) Energia-megmaradással: az m_1 test nyomja össze a rugót,
közvetlenül az ütközés után m_1-nek még nincs potenciális energiája, csak mozgási: $E_A = ½m_1v_1^2$;

a maximális összenyomódásnál a sebesség éppen zérus, ekkor csak potenciális energiája van m_1-nek: $E_B = ½k·\Delta x^2$.
Ezeket egyenlővé téve és rendezve Δx-re:

$\Delta x = \sqrt{\frac{m_1}{k}} v_1 = \sqrt{\frac{m_1}{k}} \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v,$ számértékileg Δx = 0,16 m.

Alternatív megoldás: a teljes eseménysor kezdetét és végét tekintve: m_2 ütközés előtti mozgási energiája egyenlő az m_2 ütközés utáni mozgási energiájával és a rugó potenciális energiájával (amikor az m_1 éppen megáll),

azaz: $½m_2v^2 = ½m_2v_2^2 + ½k·\Delta x^2$, ahonnan: $\Delta x = \sqrt{\frac{m_2}{k}(v^2 - v_2^2)} = 0{,}16\ \mathrm{m}.$

8/13. Hogy egy test a Földet elhagyhassa, kb. 11,18 km/s kezdeti sebességre van szüksége. Ha egy bolygóközi szondát 13 km/s sebességgel indítanak el, mekkora lesz a Földhöz viszonyított sebessége, amikor a Földtől már igen távol van?

MO. Energia-megmaradással, felhasználva azt, hogy a „Földtől igen távol” a potenciális energia zérus:

$$-\gamma \frac{m·M_{Föld}}{R_{Föld}} + \frac{1}{2} m{v_0}^2 = 0 + \frac{1}{2} m{v_1}^2 ,$$

valamint hogy $\gamma \frac{M_{Föld}}{R_{Föld}} = g·R_{Föld}$: $m·g·R_{Föld} + \frac{1}{2} m{v_0}^2 = 0 + \frac{1}{2} m{v_1}^2 \quad \rightarrow \quad v_1 = \sqrt{{v_0}^2 - 2g·R_{Föld}}$,

$g = 9{,}81\ m/s^2$ és $R_{Föld}$ = 6370 km behelyettesítéssel $v_1 \approx 6{,}635$ km/s.

8/14. Hosszú függőleges csőben rugó van elhelyezve, amelynek a cső falával való súrlódása elhanyagolható. A rugóra 10 g tömegű golyót helyezve 1 cm-rel összenyomódik. Mennyivel nyomódik össze a rugó, ha a golyót a rugó tetejétől számított 1 m magasságból ejtjük rá?

MO. A rugóállandó $k = mg / \Delta l_1 = 0{,}01·10 / 0{,}01 = 10$ N/m.
Írjuk fel az energia-megmaradást úgy, hogy a nehézségi erőtér potenciális energiájának zérus szintje a rugó tetejénél legyen (azaz amikor a rugó nincs összenyomva):

$$mg H = mg (-\Delta l_2) + ½ k \Delta l_2^2 ,$$

behelyettesítve $0{,}01·10 · 1 = -0{,}01·10· \Delta l_2 + ½ ·10· \Delta l_2^2$, azaz $5 \Delta l_2^2 - 0{,}1 \Delta l_2 - 0{,}1 = 0$,
aminek megoldása $\Delta l_2 \approx 15{,}2$ cm.

Nem zh-feladat

Miért nehezebb egy kisebb tömegű csónakból kiugrani a partra, mint egy nagyobb tömegű hajóból?
MO. A kérdés az, hogy mekkora munkával tudjuk magunkat és a csónakot felgyorsítani az álló helyzetből az ugrás sebességére. M a csónak tömege, V lesz a csónak sebessége, m az ember tömege, v lesz az ember sebessége, ezekkel a munkatételt használva

$$W = \Delta E_{kin} = E_{kin\ ugráskor} - 0 = ½ MV^2 + ½ mv^2.$$

Másrészt, mivel csak belső erő fog hatni (amikor elrugaszkodunk a csónakról), ezért az ember+csónak rendszer impulzusa állandó marad, méghozzá zérus, mert kezdetben nyugalomban voltak:

$$MV + mv = 0.$$

Innen $V = - m/M · v$ és $W = ½ M (-m/M · v)^2 + ½ mv^2 = … = ½ m (1 + m/M) v^2$,
vagyis minél nagyobb az m/M hányados, annál nagyobb munkát kell befektetni ahhoz, hogy egy bizonyos v sebességre felgyorsítsuk magunkat.