Fizika 1 – Mechanika   2018 / 1. házi feladat megoldása

Egy repülőgép mozgását az

$$\mathbf{r}(\mathrm{t}) = \mathrm{a}\cos\left(\frac{t}{t_0}\right)\,\mathbf{i} \;+\; 2\mathrm{a}\sin\left(\frac{t}{t_0}\right)\mathbf{j}$$ függvény írja le, ahol $\mathrm{a} = 200\ \mathrm{m}$, $\mathrm{t}_0 = 2\ \mathrm{s}$.

Változik-e a repülőgép sebességének a nagysága a pályája különböző szakaszain? Ha igen, akkor hol nő, ill. hol csökken?

Megoldás:

1. Vizsgálhatjuk a sebességvektor

$$\mathbf{v}(\mathrm{t}) = -\,\mathrm{a}/\mathrm{t}_0\,\sin(\mathrm{t}/\mathrm{t}_0)\,\mathbf{i} + 2\mathrm{a}/\mathrm{t}_0\,\cos(\mathrm{t}/\mathrm{t}_0)\,\mathbf{j} = -\,100\,\sin(\mathrm{t}/2)\,\mathbf{i} + 200\,\cos(\mathrm{t}/2)\,\mathbf{j}$$

abszolút értékének

$$|\mathbf{v}(\mathrm{t})| = \sqrt{\left(-\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{t}_0}\sin\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{t}_0}\right)\right)^2 + \left(\frac{2\mathrm{a}}{\mathrm{t}_0}\cos\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{t}_0}\right)\right)^2} = \sqrt{\left(-100\sin\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right)\right)^2 + \left(200\cos\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right)\right)^2}$$

$$|\mathbf{v}(\mathrm{t})| = 100\sqrt{\sin^2\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right)} = 100\sqrt{1 + 3\cos^2\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right)}$$

időbeli változását:

$$\frac{\mathrm{d}\,|\mathbf{v}(\mathrm{t})|}{\mathrm{d}\,\mathrm{t}} = |\dot{\mathbf{v}}(\mathrm{t})| = -150\,\frac{\sin\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right)+4\cos^2\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right)}}\,.$$

$|\dot{\mathbf{v}}(\mathrm{t})| = 0$, ha $\sin\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right) = 0$, azaz $\frac{\mathrm{t}}{2} = 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi; \ldots$ $\rightarrow$ $t = 0 + k\cdot\pi$ esetén;

illetve felhasználva, hogy $\sin\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\mathrm{t}$

$|\dot{\mathbf{v}}(\mathrm{t})| = -75\,\frac{\sin\mathrm{t}}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right)+4\cos^2\left(\frac{\mathrm{t}}{2}\right)}} = 0$, ha $\sin t = 0$ $\rightarrow$ $t = 0 + k\cdot\pi$.

Ezek a pályának azok a pontjai, ahol az ellipszispálya metszi a koordinátatengelyeket.

A periódusidő $T = 4\pi$, a repülőgép egy-egy negyed ellipszist π s alatt tesz meg.

A sebesség nagysága csökken (azaz a repülőgép a hagyományos szóhasználat szerint „lassul”):

$|\dot{\mathbf{v}}(\mathrm{t})| < 0$, ha $\sin t > 0$, azaz $0 < t < \pi$; ill. $2\pi < t < 3\pi$ esetén,

azaz amikor a repülőgép az I. ill. a III. negyedben tartózkodik.

A másik két negyedben a sebesség nagysága nő (azaz a repülőgép „gyorsul”).

2. Nézzük a **v**(t) és az **a**(t) vektorok irányát:
– ha **a** és **v** éppen egy irányba mutatnak, akkor **v** nagysága nő (és iránya nem változik);
– ha **a** **v**-vel éppen ellentétes irányba mutat, akkor **v** nagysága csökken (és iránya nem változik);
– ha **a** és **v** merőlegesek egymásra, akkor **v** nagysága nem változik (de iránya igen);
– tetszőleges szöget bezáró **a** és **v** vektorok esetén tehát azt kell vizsgálni, hogy **a**-nak a **v** irányára vett vetülete **v**-vel megegyező irányítottságú-e vagy ellentétes vele.

2.A
Az **a** vektornak a **v** vektor irányára vett vetületét kifejezhetjük skalárszorzattal (ld. a honlapra kirakott 1. anyag megoldását).

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{a}|\cdot\cos\varphi \quad\rightarrow\quad |\mathbf{a}|\cdot\cos\varphi = \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\,/\,|\mathbf{v}|$$

Elegendő azt vizsgálni, hogy a skalárszorzat milyen előjelű: ha pozitív, akkor **a** vetülete **v** irányába mutat, ha negatív, akkor ellentétes irányba.

$$\mathbf{v}(t) = -\,a/t_0\,\sin(t/t_0)\,\mathbf{i} + 2a/t_0\cos(t/t_0)\,\mathbf{j} = -\,100\sin(t/2)\,\mathbf{i} + 200\cos(t/2)\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}(t) = -\,a/t_0^2\cos(t/t_0)\,\mathbf{i} - 2a/t_0^2\sin(t/t_0)\,\mathbf{j} = -\,50\cos(t/2)\,\mathbf{i} - 100\sin(t/2)\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{a}(t) = -\,a/t_0\sin(t/t_0)\cdot(-\,a/t_0^2\cos(t/t_0)) + 2a/t_0\cos(t/t_0)\cdot(-\,2a/t_0^2\sin(t/t_0)) =$$
$$= a^2/t_0^3\sin(t/t_0)\cdot\cos(t/t_0) - 4a^2/t_0^3\sin(t/t_0)\cdot\cos(t/t_0) = -\,3a^2/t_0^3\sin(t/t_0)\cdot\cos(t/t_0)$$
$$\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{a}(t) = -\,15000\sin(t/2)\cdot\cos(t/2) = -\,7500\sin t\cdot$$

$$\left.\begin{array}{ll} & \mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{a}(t) = 0,\ \text{ ha } \sin t = 0 \\ |\mathbf{v}(t)| \text{ nő, azaz „gyorsul”, ha} & \mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{a}(t) > 0 \ \rightarrow\ \sin t < 0 \\ |\mathbf{v}(t)| \text{ csökken, azaz „lassul”, ha} & \mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{a}(t) < 0 \ \rightarrow\ \sin t > 0 \end{array}\right\} \rightarrow\ \text{ld. az 1. pontnál}$$

2.B
A vetület irányítottságát a két vektor által bezárt szög szabja meg. Ha **a** és **v** hegyesszöget zárnak be, akkor **a**-nak a vetülete **v**-vel megegyező irányú és így **v** nagysága nő; ha tompaszöget, akkor **v** nagysága csökken.
Hegyesszög esetén $\cos\varphi > 0 \ \rightarrow$ a skalárszorzat pozitív (mivel az abszolút értékek pozitívak),
tompaszög esetén $\cos\varphi < 0 \ \rightarrow$ a skalárszorzat negatív.

A számítást ld. a 2.A-nál.

2.C
Az **a** és **v** vektorok által bezárt szöget leolvashatjuk egy olyan ábráról is, amely a pálya mentén ábrázolja a vektorokat. Az **a** vektor mindig ellentétes irányú az **r** vektorral (mivel **a**(t) = $-\,1/t_0^2\cdot$ **r**(t)), tehát az origó felé mutat. A **v** vektor az ellipszis érintőjének irányába mutat pozitív irányban. Látható, hogy az I. és a III. negyedben az ellipszis érintője „kifelé” mutat az adott pontban húzható kör érintőjéhez képest (ami éppen merőleges lenne az origóba mutató vektorra), tehát a **v** vektor tompaszöget zár be az **a** vektorral, a test lassul; míg a II. és a IV. negyedben az ellipszis érintője „befelé” mutat az adott pontban húzható kör érintőjéhez képest, tehát a **v** vektor hegyesszöget zár be az **a** vektorral, a test „gyorsul”.